UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

SECRETARÍA ACADÉMICA
CONSEJO DE POSGRADO
DIRECCIÓN DE INVESTIGACIÓN
DOCTORADO EN EDUCACIÓN

Racionalidad matemática y mediación semiótica en el campo de experiencia de las transformaciones geométricas.

Tesis que para obtener el grado de
Doctor en Educación
Presenta

Mario Armando Giordano Moreno

Tutora:

Dra. Verónica Hoyos Aguilar

México, D.F. Marzo de 2005

Agradecimientos:

Agradezco a mi tutora, la Dra. Verónica Hoyos Aguilar, su orientación y su apoyo para la realización de esta tesis.

Agradezco las observaciones y las recomendaciones de los lectores de esta tesis:

Dra. María G. Bartolini Bussi

Dr. Eduardo Mancera Martínez

Dr. Ferdinando Arzarello

Dr. Ernesto Sánchez Sánchez

Dr. Iñaqui de Olaizola Arizmendi

Dra. Mariana Sáiz Roldán

Dr. Rodrigo Cambray Núñez

Agradezco al Consejo del Sistema Nacional de Educación Tecnológica el apoyo otorgado para la terminación de esta tesis.

INDICE

1. Introducción

Esta tesis se ubica dentro de la problemática general de la prueba en la clase de matemáticas, enfocándose en la construcción de argumentaciones con las que los estudiantes justifican afirmaciones o resultados matemáticos obtenidos a partir de su desempeño dentro de un campo de experiencia (Bartolini y Boero, 1998) matemática, el de las transformaciones geométricas en el plano. Desde la perspectiva con la que se ha desarrollado esta tesis juegan un papel esencial cierta clase de artefactos culturales[1], introducidos en la actividad de los estudiantes como el contexto externo de dicho campo de experiencia. También es esencial el involucramiento de los estudiantes en situaciones de validación (Balacheff, 1987), aquéllas que contienen el requerimiento explícito de llevar a cabo una prueba, así como el papel del conductor y de los guiones de actividad para orientar la reflexión y la discusión hacia el desarrollo de una racionalidad teórica, es decir, hacia la formulación de razones o argumentos que no estén limitados a la evidencia empírica que la manipulación de los artefactos hace evidente sino que se refieran a conocimientos matemáticos consolidados en la experiencia de los estudiantes. Se pretende de esta manera dar cuenta del desarrollo de una racionalidad matemática y de las relaciones que esto tiene con la mediación semiótica lograda en el proceso de apropiación de los artefactos culturales considerados.

En la parte empírica del proyecto de tesis participaron estudiantes que cursaban el tercer semestre del plan de estudios del Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM. Las edades de estos estudiantes en el momento de su participación promediaban los 16 años y las actividades se llevaron a cabo como sesiones extra clase en el laboratorio de matemáticas de la UPN.

[1] Los artefactos culturales forman parte, junto con las personas, de un sistema de actividad (Crawford, 1996). Se trata, en nuestro caso, de software de geometría dinámica (Cabri) y de eslabonamientos mecánicos (Máquinas Matemáticas Articuladas), que potencialmente constituyen representaciones de objetos o procesos matemáticos característicos de las transformaciones geométricas.

Los resultados obtenidos de nuestra investigación permiten mostrar la pertinencia de que los estudiantes lleven a cabo actividades de indagación, apoyadas en artefactos culturales, para generar discusiones o procesos de comunicación matemática y llegar a elaborar formas de razonamiento, tales como la experiencia crucial, el ejemplo genérico o aún la experiencia mental (Balacheff, 1987), como soportes para el desarrollo de argumentos o de formas de validación matemática. También podemos señalar que ha sido posible proponer, a partir de una propuesta de Sfard (1991), un mecanismo específico con el que se explica la transición desde la actividad sustentada en la exploración y la indagación de nociones geométricas, por medio de los artefactos culturales, a la generación de instrumentos de mediación semiótica como herramientas del pensamiento. Finalmente, de nuestro estudio podemos concluir que el involucramiento genuino de los estudiantes en situaciones de validación y la integración semántica de representaciones, promueven el desarrollo de una racionalidad teórica que consiste en dar cuenta de las relaciones matemáticas que subyacen en las representaciones que los artefactos proporcionan y en las que los estudiantes reconstruyen e interiorizan, esto les permite separarse eficazmente del nivel fenomenológico para avanzar en un nivel racional de validación matemática.

1.1. Contenido de los capítulos

El capítulo de introducción, tiene como finalidad mostrar el panorama general del proyecto de investigación, señalar el contenido de los capítulos subsecuentes, hacer una descripción del problema de investigación que se aborda en la tesis y, finalmente, señalar algunas de las aportaciones que la tesis pudiera hacer al campo de investigación.

En el capítulo 2 se presentan resultados de investigaciones con las que nuestro trabajo comparte enfoques y características teóricas y metodológicas, así como los referentes teóricos y los elementos específicos a la tesis de investigación. En la primera parte del capítulo se revisan investigaciones enfocadas al estudio del desempeño que los estudiantes tienen en la construcción de argumentos y de justificaciones matemáticas, cuando se involucran en situaciones de validación o cuando disponen de herramientas que proporcionan una variedad de representaciones coherentes respecto a ciertos contenidos matemáticos y donde se privilegia el aprendizaje centrado en la actividad de los propios aprendices. También reseñamos, en esta primera parte del capítulo 2, estudios en los que se han utilizado los mismos artefactos culturales que hemos adoptado en la parte empírica de nuestra investigación.

En la segunda parte del capítulo 2 se presenta una revisión más detallada de los temas y de los constructos que conforman el marco teórico y conceptual desde el que se aborda el desarrollo de la tesis. Se presentan, también, reflexiones personales referidas a esos aspectos. Finalmente, se plantean las hipótesis, la tesis y las preguntas de investigación, junto con las unidades de análisis para llevar a cabo la revisión de los datos recabados y la discusión de los resultados de la investigación.

En el capítulo 3 se indica la metodología seguida durante la fase empírica, así como las condiciones particulares bajo las cuales ésta se llevó a cabo. Se hacen algunas precisiones respecto a los estudiantes participantes y la forma en que su participación se produjo.

El capítulo 4 se dedica a la presentación y discusión de resultados tanto del estudio empírico inicial como del estudio empírico final, considerando que el primero permitió afinar de mejor manera las actividades de aprendizaje y permitió también enfocar con mayor precisión los objetivos de la investigación. Se pretende mostrar en los apartados correspondientes al estudio final los resultados más relevantes del trabajo de investigación y de hacer una discusión referida a éstos, en términos de los referentes teóricos previamente señalados y en términos de los planteamientos en relación a la tesis, a las hipótesis y a las preguntas de investigación. También se presenta y se discute, dentro de este capítulo, una experiencia de resolución de problemas, la cual permite argumentar acerca del potencial que el escenario de aprendizaje empleado en esta investigación tiene para inducir en los estudiantes ciertas formas de concebir los objetos matemáticos y producir estrategias y aproximaciones a la resolución de un problema.

En el capítulo 5 se presentan las conclusiones finales de la tesis, referidas a las preguntas de investigación, así como a la tesis misma, se hacen señalamientos con respecto a las diferencias entre las investigaciones reseñadas en el marco teórico y esta investigación, y se presenta una breve discusión de posibles temas o preguntas de investigación que pudieran plantearse a partir de los resultados hasta aquí obtenidos.

Finalmente se presentan las referencias bibliográficas y los apéndices en los que se muestran las hojas de trabajo y los guiones de actividad con los que los estudiantes llevaron a cabo las actividades en el laboratorio de matemáticas.

1.2. El problema de investigación

El problema de investigación que se aborda en esta tesis tiene dos referentes esenciales; por una parte, la noción de prueba matemática, en el sentido de proceso racional con el cual se pretende justificar la validez de una aserción o de un resultado matemático; por otra parte, la noción de mediación semiótica, entendida como la internalización de signos o herramientas psicológicas poseedoras de significados, a partir de la utilización dirigida de artefactos culturales de índole diversa y de la reflexión y la discusión colectiva que la actividad permite generar. Ambos aspectos pudieran dar cuenta de cierto desarrollo de una autonomía intelectual, significada por las actitudes personales hacia las tareas de aprender y utilizar matemáticas. Esta tesis pretende contribuir a fortalecer propuestas de actividad matemática en el salón de clases, en las que se asume la necesidad de involucrar genuinamente a los estudiantes en sus propios procesos de aprendizaje. Es sobre estos aspectos, que se construye la indagación presentada en este documento.

Dentro de este contexto, nuestro problema de investigación radica en indagar acerca de las posibles relaciones entre la mediación lograda como resultado de actividades dirigidas utilizando artefactos culturales, y la racionalidad puesta en juego por los estudiantes para validar un conjunto de hechos geométricos referidos al dominio de las transformaciones geométricas en el plano.

Se pretende, desde la perspectiva de la investigación, elaborar una argumentación teórica referida al desempeño de los estudiantes al llevar a cabo actividades de indagación matemática, mismas que tienen la finalidad de involucrarlos en procesos de validación con respecto a lo que esa indagación les permite descubrir y proponer. Tienen un papel central en la realización de dichas actividades el uso intensivo, y complementario, del software de geometría dinámica Cabri y de eslabonamientos mecánicos diseñados para funcionar en correspondencia con la teoría de las transformaciones geométricas, las llamadas Máquinas Matemáticas Articuladas.

En la revisión documental realizada, encontramos referencias que señalan la necesidad y la importancia de que los estudiantes desarrollen medios autónomos de validación o de prueba matemática (e.g., Balacheff, 1999; Herbst, 2000; Simon, 1996; Yackel y Cobb, 1996). Un fundamento para este desarrollo lo constituye la base empírica de la que el sujeto puede apropiarse al experimentar con artefactos culturales convenientes (véase, e. g., Arzarello, 1997; Bartolini, 1993; Mariotti, et al., 1997), y de manera que los medios o los procesos de validación puestos en juego adquieran un carácter teórico o científico mediante la reflexión crítica respecto a lo que se descubre o lo que se afirma y de la sistematización de los hechos matemáticos involucrados.

Consideramos que las actividades de exploración y de indagación de las transformaciones geométricas estructuradas en torno a la geometría dinámica y a las máquinas articuladas, promueven significativamente el desarrollo de esas actitudes hacia lo que podría representar aprender matemáticas. Es por esto que, en nuestra investigación, se ha recurrido a este tipo de actividades como la parte fundamental del estudio empírico con el que se busca argumentar esta tesis.

Es importante, también, mencionar que las cuestiones referidas a la explicación, a la argumentación y a la prueba en el campo de la educación matemática se investigan recurrentemente, dados los focos de interés que el razonamiento y la prueba representan. Baste señalar, como prueba de ello, los espacios dedicados a estos temas en los manuales internacionales de investigación en educación matemática o en los foros de presentación y discusión de las investigaciones en este campo. Constructos más específicos como situación de validación, unidad cognitiva de un teorema o discusión matemática, han permitido avanzar en la caracterización de los procesos que los estudiantes desarrollan cuando la actividad en el aula se dirige hacia esos focos de interés. Además, existe también el reconocimiento creciente del potencial de mediación para el aprendizaje matemático que representa la utilización de tecnología y de ciertos artefactos culturales (e. g., Chassapis, 1998; Hoyos, 2003-b; Mariotti, 2002; Szendrei, 1996).

En esta tesis se han adoptado esos y otros referentes teóricos con la intención de concretar la apropiación por los estudiantes de experiencias matemáticas al estar inmersos en ambientes de aprendizaje enriquecidos. Particularmente, la mediación ejercida por la realización de actividades apoyadas en la utilización complementaria de un software de geometría dinámica y de eslabonamientos mecánicos para la elaboración de argumentaciones que validen hechos geométricos confirmados empíricamente, constituye una propuesta alternativa para el estudio de los procesos de razonamiento y prueba matemática en los estudiantes.

También es importante señalar que en nuestra revisión documental no se encontraron reportes de investigación referidos al desempeño de los estudiantes en la composición de transformaciones, al menos desde el punto de vista de la utilización de los artefactos culturales señalados y de la *unidad cognitiva de un teorema*[2]. Consideramos por ello, que estos aspectos de nuestra investigación son nuevos para el campo de investigación en el que se busca insertar esta tesis.

1.3. Posibles aportaciones de esta tesis

Señalaremos también lo que consideramos representan las aportaciones de esta tesis al campo de investigación en educación matemática que tiene como objeto de estudio al razonamiento y la prueba.

Los resultados de la tesis permiten mostrar la pertinencia del empleo, bajo un esquema de actividad dirigida, de artefactos culturales para inducir la apropiación de contenidos matemáticos relevantes, puesto que esto promueve eficazmente la internalización de instrumentos de mediación semiótica como herramientas del pensamiento. Se trata de la apropiación de objetos matemáticos dotados de significado por medio de la actividad generada en torno a los artefactos materiales utilizados y las correspondientes representaciones (externas e internas) que los sujetos llegan a construir.

Los resultados también permiten argumentar a favor de la importancia de la interacción social y del papel del profesor para llevar la discusión matemática al nivel de la validación. Una vez que un hecho matemático ha sido suficientemente confirmado, es necesario dirigir la actividad hacia la fundamentación de ese hecho, dar respuestas a la pregunta *¿por qué es cierto?* Desde la perspectiva con la que se ha desarrollado esta tesis, los estudiantes involucrados en esta nueva

[2] Este constructo hace referencia a la posibilidad de que los estudiantes pueden construir una prueba a partir de elementos que surgen durante la argumentación que acompaña el proceso previo de construcción de una conjetura. Esto tiene fundamento epistemológico en lo que se considera como un rasgo característico de la producción de teoremas: “la amalgama entre el enfoque progresivo de la afirmación y la actividad argumentativa dirigida a justificar su plausibilidad” (Boero et al., 1996, p. 114)

fase de actividad matemática en el aula, se han apropiado ya de objetos matemáticos “experiencialmente” reales (Yackel y Cobb, 1996), o experimentados en un contexto material, lo cual favorece significativamente el avance en los procesos de validación. Es por este que proponemos, como el resultado más relevante de esta tesis, el poder argumentar a favor de un proceso que permite transitar desde la estructuración cognitiva de hechos matemáticos ubicados en un nivel fenomenológico hasta una reestructuración de esos hechos matemáticos en un nivel racional, es decir, en un nivel en el que es posible presentar argumentos matemáticamente válidos que fundamentan tal afirmación. En nuestro caso, esto parece estar fuertemente condicionado por cierta complementariedad entre los artefactos o las herramientas utilizadas por los estudiantes, misma que se genera por medio de las actividades llevadas a cabo y que se manifiesta en el desempeño de los estudiantes en las situaciones de validación generadas.

Para terminar esta introducción señalaremos lo que consideramos que este trabajo puede aportar al ámbito actual de la enseñanza y el aprendizaje de matemáticas en nuestro país. Si bien existe el reconocimiento explícito de la necesidad de transformar las concepciones acerca de lo que significa enseñar y aprender matemáticas, así como el reconocimiento del potencial que representa el uso de la tecnología como un medio eficaz para la construcción de conocimientos, nos parece que no se ha hecho suficiente énfasis en la importancia y la necesidad que significa el contar dentro del ámbito escolar con espacios y actividades que por su propia naturaleza promueven aproximaciones a los contenidos curriculares desde la óptica de una construcción social (y cada vez más autónoma) de conocimientos. Los cambios curriculares que se están dando en nuestros contextos escolares deberán otorgar mayor atención a esta clase de aproximaciones al aprendizaje, puesto que representan una posibilidad de alcanzar logros no sólo en el aprendizaje de los contenidos, sino también en el fortalecimiento de actitudes y compromisos de orden social y de convivencia armónica.

2. Marco teórico

Dados los temas centrales que se abordan en este documento, en la primera parte de este capítulo se reseñan y se discuten los trabajos de investigación revisados que de manera más señalada se refieren a estos mismos temas. En la segunda parte se presentan y se discuten los referentes teóricos principales, así como los elementos centrales alrededor de la tesis misma.

2.1. Estudios directamente relacionados con la temática de esta tesis

Se reseñan cinco trabajos de investigación considerados como antecedentes de nuestro propio trabajo, tanto desde el punto de vista teórico, como desde el metodológico y empírico. La revisión de estos trabajos ha permitido plantear un marco teórico referencial y establecer ciertas condiciones metodológicas básicas, así como estructurar la fase empírica del proyecto.

2.1.1. Procesos de prueba y situaciones de validación

Balacheff (1987; 2000) trabaja sobre el problema de la determinación de las variables didácticas cuya manipulación permitiría al profesor devolver la responsabilidad de la toma de decisiones a los estudiantes, considerando la importancia de alcanzar un equilibrio entre tal devolución y su propia capacidad de intervención y de conducción del proceso dirigido al desenvolvimiento de los estudiantes en situaciones de validación. Una situación de validación es una situación didáctica que contiene orgánicamente la exigencia de elaborar una prueba, y una prueba es todo proceso de validación de los enunciados que, desde la perspectiva de los alumnos, aparecen como conjeturas. A su vez, los procesos de validación son considerados como los tipos de racionalidad que sustentan las pruebas producidas en una situación de validación. Finalmente, el término razonamiento se refiere a “la actividad intelectual no completamente explícita que se ocupa de la manipulación de la información dada o adquirida, para producir una nueva información." (Balacheff, 2000, p. 13).

Balacheff contextualiza el estudio de los procesos de prueba simultáneamente en dos niveles: en referencia a quien los utiliza en tanto que sujeto que aprende (sujet connaissant), y en referencia a la situación en que ese sujeto o sujetos ejecutan el proceso. Para este investigador, un proceso de validación encierra una dialéctica de la validación, el sujeto inmerso en un proceso de validación toma decisiones a partir de un análisis de pros y contras o sobre la consideración de contradicciones potenciales. Si el sujeto tiene acceso a la experimentación, tal como "la ejecución de un decisión, o la realización del contenido de una afirmación" (Balacheff, 1987, p. 159), la situación misma permite una prueba pragmática, ésta es hipotética[3], por la singularidad del acontecimiento que la constituye, carece del reconocimiento de un carácter genérico del hecho bajo estudio. Si tal acceso a la experimentación no es posible, entonces las pruebas son necesariamente intelectuales. Una prueba intelectual "moviliza una significación contra otra, una pertinencia contra otra, una racionalidad contra otra." (ídem.). Son entonces, las pruebas intelectuales las que manifiestamente ponen en evidencia el carácter dialéctico de las situaciones de validación.

Las pruebas, sean pragmáticas o intelectuales, se diferencian en términos de tres "polos":

- el polo de la validación o el tipo de racionalidad puesta en juego,
- el polo de las concepciones o del estatus de los conocimientos
- y el polo del lenguaje o de la formulación de las pruebas.

Con respecto a los dos últimos señalaremos brevemente que para Balacheff, mientras las pruebas pragmáticas se apoyan en saberes prácticos, las pruebas intelectuales demandan que los conocimientos puedan ser tomados como objetos de reflexión y de debate, el sujeto debe tomar una posición teórica en la que ya no

[3] Al parecer, Balacheff utiliza aquí este término en el sentido de lo que probablemente suceda o pueda suceder.

sólo se trata de resolver una situación o un problema, sino que se requiere fundamentar tal solución. Por otro lado, el lenguaje que corresponde a las pruebas pragmáticas es un lenguaje de la familiaridad, que no constituye la herramienta fundamental de expresión del conocimiento, es decir, las pruebas pragmáticas son testificadas por la acción y no por el discurso. Sin embargo, "cuando esa acción puede ser descrita y explicada se está en un primer momento de una construcción cognitiva" (Balacheff, 1987, p. 160), esto es, se está dando un paso importante hacia la elaboración de una prueba intelectual. Para construir pruebas intelectuales el lenguaje de la familiaridad es insuficiente, se requiere cada vez más de un leguaje funcional descontextualizado, despersonalizado y atemporal en el que se incluya la introducción de símbolos.

El polo que nos interesa resaltar en este momento, es el de los tipos de racionalidad que sostiene a las pruebas producidas, es decir, el polo de la validación. En el nivel más bajo, Balacheff ubica a las *reglas de acción* que no son propiamente producto de una situación de validación; el sujeto no está inmerso en una situación que demanda la producción de una prueba y por lo tanto "no se asegura de que su acción es legítima ni de que su resultado será el que él desea." (Ibíd. p. 164). En este caso, el funcionamiento de las operaciones mentales realizadas por el sujeto al producir un resultado pone en relieve esencialmente el modo estímulo-respuesta. Cuando se plantea y se asume el establecimiento de las condiciones de validez del resultado propuesto o de su adecuación, se está dando paso a la génesis de un *teorema en acto*. Este concepto (según Vergnaud) designa:

> las propiedades de las relaciones aprehendidas y utilizadas por el sujeto en situación de resolución de problemas, en el entendido de que eso no significa por lo tanto que él sea capaz de explicarlas o de justificarlas. (Citado en Balacheff, 1997, p. 163)

En la transición de las pruebas pragmáticas a las pruebas intelectuales, Balacheff distingue varios tipos:

- *Empirismo ingenuo.* Consiste en extraer de la observación de un reducido número de casos la certidumbre acerca de la verdad de una aserción.
- *Experiencia crucial.* Es un procedimiento de validación de una aserción en el que el sujeto plantea explícitamente el problema de la generalización, el sujeto busca o piensa deliberadamente en un caso que pueda valer para muchos otros.
- *Ejemplo genérico.* Consiste en la explicitación de las razones de la validez de una aserción por la realización de las operaciones y de las transformaciones sobre un objeto presente no por sí mismo, sino en tanto que representante característico de una clase de objetos. La formulación (el discurso utilizado) pone en relieve las propiedades características y las estructuras de la familia que el objeto representa, pero en referencia directa al caso particular en el que se apoya la argumentación.
- *Experiencia mental.* Se concentra en la acción, interiorizándola o separándola de su ejecución sobre una representación específica. Queda marcada por la temporalidad anecdótica pero las operaciones y las relaciones fundacionales de la prueba no están designadas por el resultado de su ejecución sino que el sujeto es capaz de avanzar argumentos referidos directamente a las propiedades y las relaciones generales implicadas en los objetos bajo estudio. Es decir, a diferencia del ejemplo genérico, ahora el discurso utilizado y las inferencias obtenidas se refieren a una clase de objetos.

Balacheff (1987) discute esta caracterización mediante los resultados de su investigación con estudiantes entre 13 y 14 años, involucrados en la tarea de probar sus afirmaciones al indagar acerca del número de diagonales que posee un polígono. A su juicio, es entre el ejemplo genérico y la experiencia mental que opera la transición de las pruebas pragmáticas a las pruebas intelectuales; un sello de esa transición es la evolución de los medios lingüísticos puestos en juego.

Entre la experiencia mental y la demostración matemática como tal, deben existir diferentes tipos de pruebas intelectuales, distinguibles por sus niveles de descontextualización, despersonalización y atemporalización evocados, así como por la parte respectiva del lenguaje utilizado, una tipología aún por hacer.

Balacheff concluye que es necesario que el significado y la actividad sobre la prueba se atiendan de manera sistemática, particularmente en la educación secundaria, para que, desde el punto de vista de los estudiantes, el estatus de la prueba cambie del que corresponde a la eficacia al que corresponde al rigor, o para que la posición de los estudiantes cambie de pragmática a teórica, dada la construcción cognitiva a largo plazo que esto requiere. Este autor también reconoce que lo que llega a valer como una prueba en el salón de clases de matemáticas tiene, en buena medida, carácter convencional, sin embargo, es sobre todo el profesor quien debe garantizar que los fundamentos sobre los que cierto nivel de prueba se establece, sean aceptables o socialmente compartidos.

De los planteamientos que Balacheff presenta en su trabajo de 1987, podemos subrayar entonces lo siguiente:

Por un lado, los procesos de validación constituyen la elaboración de pruebas en todos los órdenes o en todos los niveles. Existen varias formas y varios niveles de validación cuya movilización y ejecución son provocadas, en principio, por las exigencias de la situación en la que el sujeto se encuentra. Particularmente una situación de validación contiene orgánicamente la "exigencia" de poner en marcha procesos de prueba. Por otro lado, para que una prueba adquiera el carácter de prueba intelectual se requiere que, al nivel del ejemplo genérico, se considere a un objeto como representante característico de una clase y que la prueba opere mediante la explicación de las razones de validez de operaciones o transformaciones sobre ese objeto o caso de estudio particular. O bien, en el nivel de la experiencia mental, se requiere de un procedimiento de validación que no apele a la evidencia empírica, sino que recurra al conocimiento en juego como objeto de reflexión, de discurso e inclusive de debate. También una prueba intelectual requiere de un lenguaje que no se limite al lenguaje familiar sino que recurra a elementos de un lenguaje funcional. Además, el tipo de racionalidad que caracteriza las pruebas intelectuales es un tipo de racionalidad teórica, en la que las relaciones y las propiedades matemáticas a las que se recurre en la justificación poseen, en el contexto interno del sujeto, un carácter genérico y fundamentado.

- Discusión

Desde la perspectiva de nuestro proyecto de investigación se ha considerado que la posibilidad de que los estudiantes tengan acceso a la experimentación respecto a cierta afirmación o cierto hecho matemático abre una vía hacia la búsqueda o a la elaboración de pruebas intelectuales, aunque tal proceso esté sustentado, en principio, por formas de razonamiento pragmáticas. Es pertinente entonces preguntarse bajo qué condiciones es esto factible.

El software de geometría dinámica Cabri y las Máquinas Matemáticas Articuladas[4] pueden considerarse como herramientas instruccionales con las que es posible promover la estructuración de hechos geométricos referidos a las transformaciones geométricas en el plano. Estas herramientas o medios instruccionales se conciben, en el nivel más elemental, como cajas negras, es decir, lo que el usuario percibe, en principio, es un estado inicial o de entrada y un estado final o de salida. Las herramientas permiten observar el resultado de un proceso, facilitando, quizá, la elaboración de formas de razonamiento pragmáticas. Sin embargo, será la indagación de lo que la herramienta produce, de la forma en que lo produce y de los invariantes que operan en cada caso, lo que plausiblemente permitirá avanzar en la interpretación matemática de la fenomenología que la manipulación de las herramientas genera y en la

[4] Se denomina de esta manera, a una numerosa colección de artefactos y mecanismos que operan bajo principios matemáticos. El sitio Web de la Universidad de Modena (http://www.museo.unimo.it.theatrum/) muestra esta colección.

elaboración de una estructura teórica correspondiente. Aquí nos parece importante agregar que no sólo se trata del "papel crucial que juega la enunciación matemática de las propiedades del trazado (Laborde, 1993) en el aprendizaje del tema" (citado en Hoyos, 2002, p. 150), sino que esta enunciación o reconocimiento explícito del proceso constructivo implicado, puede constituirse en un elemento pertinente dentro del proceso de elaboración de argumentos para satisfacer una demanda de justificación matemática. Balacheff (1987) mismo señala que un paso importante hacia la construcción de pruebas intelectuales se da en el momento en el que las acciones que testifican una prueba pragmática pueden ser descritas y explicadas.

2.1.2. La aproximación a los teoremas geométricos en contextos

Un grupo de investigadores que ha dirigido su trabajo hacia las condiciones y los procesos que permiten una aproximación constructiva de los estudiantes a teoremas geométricos, es el constituido por Mariotti, Bartolini, Boero, Ferri y Garuti, entre otros, (Boero et al., 1996; Mariotti et al., 1997); estos investigadores comparten los siguientes enfoques:

- la función de los diferentes contextos en la aproximación a los teoremas geométricos;
- el papel del maestro en la interacción en el aula de matemáticas;
- los teoremas como unidades de afirmación (o enunciado), prueba y teoría de referencia
- y, en términos de lo anterior, el análisis de la función de la exploración dinámica para la aproximación a los teoremas geométricos en diferentes contextos y niveles escolares. (Mariotti et al., 1997, p. 1)

Esta aproximación a los teoremas de la geometría se ha llevada a cabo en tres campos de experiencia: la representación del espacio visible por medio de la perspectiva, las sombras de luz y las construcciones geométricas en ambiente Cabri. El objetivo específico de sus estudios ha sido identificar las condiciones bajo las cuales los estudiantes pueden aproximarse a los teoremas de geometría y estudiar los procesos mentales involucrados en tales aproximaciones. Dados los diferentes niveles escolares en los que se ha intervenido, se han puesto en marcha aproximaciones muy diferentes. Para los estudiantes más jóvenes esa aproximación representa un paso fundamental en el proceso que lleva a la geometría a ser un campo de experiencia, así como un corpus de conocimiento matemático. En los estudiantes de 8° y 10° grados, el problema ha sido el de "cómo manejar la delicada relación entre sus antecedentes de geometría y la nueva aproximación a este conocimiento desde un punto de vista deductivo." (Ibíd. p. 5). Son dos los referentes teóricos esenciales con los que se estructuran las investigaciones de este grupo: *el campo de experiencia*, y la *discusión matemática*.

- El campo de experiencia

De acuerdo con Boero:

> La noción de campo de experiencia concierne a la relación compleja que se desarrolla en la escuela entre el contexto interno del alumno (i.e., la experiencia, las formas de pensar y de actuar relativas a un campo dado de experiencia humana), el contexto interno del maestro y el contexto externo (i.e. signos, objetos, confinamientos objetivos específicos de un campo dado). (Citado en Bartolini y Boero, 1998, p. 53).

Se trata de un sistema en evolución, formado por estos tres componentes, que permite crear en el ámbito escolar un contexto de aprendizaje y de discusión, sustentado en "…un sector de la cultura humana que los estudiantes y el maestro puedan reconocer como unitario y homogéneo." (Mariotti et al., 1997, p. 2). De manera específica este grupo de investigadores ha señalado una serie de rasgos que caracterizan un campo de experiencia en el que se trata de promover una aproximación situada a teoremas de geometría. Entre esos rasgos sobresalen (desde nuestro punto de vista) los siguientes:

- la presencia de referentes ‘concretos’ y semánticamente preñados (un contexto externo) para desarrollar acciones concretas que permitan la internalización del campo visual donde los experimentos mentales dinámicos se llevan a cabo;
- la presencia de *instrumentos de mediación semiótica*[5] (incluyendo citas de fuentes históricas, documentos, expresiones lingüísticas significativas), seleccionados desde la herencia cultural por el profesor con el objetivo de introducir la idea matemática de teorema;
- la construcción por el estudiante de un contexto interno en evolución, enraizado en la exploración dinámica, donde diferentes procesos tales como conjeturar, argumentar, probar y sistematizar pruebas como una deducción formal, adquiere significado y valor. (Mariotti et al., 1997, p. 2)

Un campo de experiencia matemática emerge, en principio, de las correspondencias que los sujetos llegan a establecer entre la actividad desarrollada a partir de ciertos artefactos o herramientas (y de sus reglas de utilización) y un sistema teórico que funciona como contraparte de tal actividad (Mariotti, 2000). Desde nuestro punto de vista, se trata de racionalizar la experiencia: se trata, por una parte, de hacer crecer un sistema teórico de referencia, y se trata, también, de potenciar el desempeño de los estudiantes en sus propios procesos de validación. En esto tienen un papel esencial los signos o símbolos que los sujetos pueden crear o reconocer, y que median entre la manipulación o la utilización directa de los artefactos y la elaboración de explicaciones y argumentos para satisfacer demandas surgidas en los procesos interpersonales de comunicación acerca de lo que dicha utilización genera.

- La discusión matemática

Este grupo de investigadores se refiere a la definición metafórica dada por Bartolini Bussi con respecto a la discusión matemática como “una polifonía de

[5] Entendidos como herramientas del pensamiento, es decir, signos o símbolos, externos o interiorizados, poseedores de significado.

voces articuladas sobre un objeto matemático, el cual es uno de los motivos de la actividad de enseñanza-aprendizaje.” (Mariotti et al., p. 2) Se trata, en su caso, de la discusión centrada en teoremas específicos de geometría, junto con la idea misma de teorema, como motivos de la actividad. La discusión matemática también constituye un medio que permite observar la complejidad de conjeturar, argumentar, probar y sistematizar las pruebas, en relación a una situación-problema específica para facilitar su análisis (Mariotti et al., 1997). Para este grupo de investigadores, la discusión matemática está esencialmente relacionada con dos aspectos que se enlazan de manera compleja y que son fundamentales para la apropiación por los estudiantes de la noción de teorema y para una aproximación constructiva al proceso de prueba:

- El problema de la motivación para la prueba, que puede expresarse en diferentes niveles: el de la veracidad, ¿Es un hecho cierto?; el del proceso de fundamentación (validación), ¿Por qué es un hecho cierto? y un tercer nivel, no considerado en sus investigaciones, que concierne a la separación de los teoremas de la búsqueda de la certeza, es decir, el aspecto que se refiere a la construcción de pruebas formales y su separación de la semántica (Ibíd., p. 3)
- Y la distinción entre argumentación y prueba matemática.

En el contexto de su investigación, y como uno de los resultados relevantes que ésta arroja, Mariotti et al. señalan la importancia del recurso a la discusión matemática orquestada por el profesor para definir una cultura del salón de clase, en la que es posible “cambiar la actitud espontánea de los estudiantes hacia la validación teórica” (Ibíd., p. 15). Otros resultados que este grupo de investigación reporta, y que también consideramos relevantes para nuestro propio trabajo, son los siguientes:

La actividad argumentativa generada en la discusión matemática permite establecer una vía hacia la elaboración de pruebas matemáticas por los estudiantes, en esto parece jugar un papel esencial la exploración dinámica de las situaciones geométricas involucradas:

> …los textos de los estudiantes claramente revelan que la exploración dinámica de la situación particularizada por la hipótesis satisface una condición importante en la promoción de la conexión lógica entre la propiedad aceptada como cierta… y la propiedad a ser confirmada… abriendo la posibilidad a razonar de forma transitiva. (Ibíd., p. 11).

La utilización por los estudiantes de imágenes mentales, elaboradas a partir de modelos concretos, en el proceso de construir conjeturas y pruebas fue otra característica observable de su desempeño en los tres campos de experiencia explorados. Éste es un rasgo que se considera propio de la actividad matemática en el sentido académico, lo cual permite a estos investigadores señalar la pertinencia didáctica y cultural de las aproximaciones realizadas: “Cada contexto permitió y alentó a los estudiantes a desarrollar procesos específicos de exploración dinámica y promovió el trabajo con metáforas espaciales, que son esenciales en la producción de teoremas de geometría.” (Ibíd., p 16)

Finalmente, con respecto a la posible contraposición entre argumentación y prueba, estos investigadores señalan que:

> Nuestros experimentos muestran que la contradicción resaltada por Duval entre la argumentación cotidiana y el razonamiento deductivo, entre el conocimiento empírico y el conocimiento geométrico, puede ser manejada en términos dialécticos dentro de la evolución de la cultura en el aula. (Ibíd.)

Este manejo dialéctico consiste, principalmente, en distinguir entre la naturaleza del proceso productivo [el proceso de elaborar una conjetura y construir una prueba] y las características formales del producto final [el texto de la prueba producida]; así como hacer explícita la diferencia entre el carácter “concreto” de los referentes en el proceso productivo y el carácter convencional y abstracto de los objetos geométricos por el otro. Cabe señalar que en esto tiene un papel fundamental el profesor.

En los dos apartados siguientes se presenta una argumentación dirigida a establecer nuestra posición con respecto a lo que significa y representa dentro de nuestro trabajo de investigación ambos constructos; el campo de experiencia y la discusión matemática.

2.1.2.1. Las transformaciones geométricas como un potencial campo de experiencia

La noción de campo de experiencia hace énfasis en el aprendizaje como una forma de participación social y cultural, en la que los sujetos desarrollan capacidades y formas de comportamiento ante tareas que les son significativas en la medida en que ellos han podido involucrarse productivamente en el campo de experiencia mismo. Cabe entonces plantearse la siguiente pregunta: *¿De qué manera podría constituirse un campo de experiencia en torno a las transformaciones geométricas?*, esta pregunta pudiera responderse, por el momento, desde una perspectiva hipotética:

Una aproximación a las transformaciones geométricas mediada por la utilización de artefactos culturales ofrece la posibilidad de generar un dominio de conocimiento teórico sustentado en la apropiación de conceptos y de procedimientos geométricos intrínsecos a los artefactos mismos. Los artefactos utilizados para llevar a cabo la parte empírica de este proyecto de tesis se consideran como “referentes concretos y semánticamente preñados” (Mariotti et al., 1997, p. 2), que permiten llevar a cabo tareas de exploración dinámica de las transformaciones geométricas en el plano euclidiano. Se trata de explotar las características estructurales y funcionales que estos artefactos poseen de manera que constituyan la parte esencial del contexto externo de un campo de experiencia matemática, en el que estudiantes y profesor elaboren y compartan significados, con la finalidad de participar productivamente en procesos de comunicación cuyo motivo radica en los objetos y los procesos geométricos subyacentes.

Mariotti et al. (1997), señalan que cada campo de experiencia tiene que ser analizado en términos de límites y potencialidades para fomentar la *unidad cognitiva de un teorema* (Boero et al., 1996) y una aproximación sistemática a los teoremas de la geometría euclidiana. Esto los ha llevado a establecer criterios para la selección de campos de experiencia y actividades particulares dentro del mismo, específicamente:

> La necesidad de referentes concretos y semánticamente preñados que promuevan procesos dinámicos, y la disponibilidad de tareas significativas al campo de experiencia, que fomenten la unidad cognitiva. (Mariotti et al., 1997 p. 4)

Para este grupo de investigadores, lo que caracteriza un *teorema matemático* es el sistema de afirmación, prueba, y teoría, asumiendo que el proceso de construcción de lo que significa un teorema, aunque enraizado en el campo de experiencia, requiere mediación cultural y cognitiva. En realidad, es el maestro el responsable de introducir a los alumnos a una perspectiva teórica, necesaria para una visión sistémica de los teoremas matemáticos. En sus experimentos de enseñanza se persigue la construcción de una teoría en la forma de principios aceptados propios al campo de experiencia, o a las herramientas de mediación semiótica.

A nuestro juicio, las transformaciones geométricas constituyen un campo de conocimiento de la geometría euclidiana propicio para el involucramiento de los estudiantes en la unidad cognitiva de teoremas, en particular, teoremas referidos a la composición de transformaciones. Explicamos esto a continuación.

El conjunto de las isometrías (la reflexión, la rotación y la traslación) o “transformaciones congruentes del plano” (Coxeter, 1988, p. 54) forman un grupo, puesto que este conjunto “…contiene a la inversa de cada una y al producto de dos cualesquiera (incluso el producto de una consigo misma o con su inversa)” (Ibíd. p. 57). Este grupo principal (Coxeter, 1988, p. 95) de transformaciones constituye un dominio que podríamos considerar como “autosuficiente” en términos de la operación de composición de isometrías. Es decir, al componer dos cualesquiera de estas transformaciones, el producto de la composición es nuevamente algún elemento del grupo.

La composición de transformaciones puede ser ensayada y explorada en Cabri, así como en algunas máquinas matemáticas diseñadas ex profeso. Esto puede llegar a constituir una pequeña red local de teoremas integrados dentro de una teoría básica. Podemos suponer, entonces, que la exploración y el estudio del campo de las transformaciones geométricas, por medio de Cabri y las máquinas articuladas, permitirá generar un contexto en el cual involucrar a los estudiantes en situaciones y procesos de validación referidos, particularmente, a la composición de transformaciones. Coincidimos con Bartolini (1998), para quien la actividad compartida en el salón de clase de matemáticas referida a campos de experiencia específicos, promueve:

> Que los estudiantes se enfrenten con una red completa de conceptos… Sin embargo, la trayectoria en la red no está determinada por la estructura de las matemáticas como una disciplina científica (como en una aproximación axiomática) sino por la necesidad de resolver problemas más y más complejos generados por la exploración del campo mismo… (Bartolini, 1998, p. 41)

2.1.2.2. Nuestra conceptualización respecto a la discusión matemática

La discusión se considera como una parte esencial de una cultura del salón de clases de matemáticas, la cual promueva, a su vez, una cultura matemática en el sentido más amplio. Esto tiene sustento, principalmente, en los planteamientos teóricos de Vygotsky respecto a la tesis de que los procesos psicológicos tienen su origen en los procesos sociales y, quizá más específicamente, en el concepto de zona de desarrollo próximo[6].

En un análisis minucioso de lo que significa la discusión matemática, Bartolini (1998) señala que las conceptualizaciones constructivistas (e.g. Pirie y Schwarzenberger, 1988; Richards, 1991) acerca de este concepto, si bien se separan de cierta clase de intercambios frecuentemente observados en el aula y hacen énfasis en la necesidad de construir dominios consensuales; no responden a una visión más amplia de lo que representa una construcción social (y cultural) de conocimiento en el salón de clase de matemáticas. Desde una perspectiva histórico-cultural (Bartolini, 1998), la discusión matemática representa la oportunidad de llevar el proceso de enseñanza-aprendizaje a la zona de desarrollo próximo y de introducir en la discusión un punto de vista cultural, particularmente el de las personas matemáticamente letradas o, inclusive, el de la comunidad matemática. Así, desde la perspectiva de Bartolini, la discusión matemática contiene elementos adicionales, específicamente:

> El valor positivo dado a la imitación; la presencia necesaria de diferentes voces, entre las cuales la *voz*[7] del maestro actúa como representativa de una cultura; y la referencia a los motivos de la actividad de enseñanza – aprendizaje que demanda, por un lado, procesos colectivos de largo plazo, y por otro lado, objetos materiales o ideales que determinan la dirección de la actividad. (Bartolini, 1998, pp. 17-18)

Es evidente el papel primordial del profesor en esta perspectiva de la discusión matemática, pero también lo es la presencia de medios que provoquen la reflexión y la discusión.

---

[6] Vygotsky pudo plantear la importancia de la instrucción que se anticipa al desarrollo intelectual de cada sujeto, al asumir la existencia de una “región dinámica de la sensibilidad en la que puede realizarse la transición desde el funcionamiento interpsicológico al intrapsicológico” (Wertsch, 1995, p. 84).
[7] Bartolini (1998, p. 17), siguiendo a Bakhtin, utiliza este término para significar una forma de hablar y pensar que representa una perspectiva individual y la pertenencia a una comunidad cultural y social particular.

Otro investigador, que coincide en lo fundamental con esta visión alternativa referida por Bartolini, es McNair (2000). Este autor asume que la discusión es primordial en la construcción social de conocimiento matemático:

> Enfocarse en lo individual es una forma de minimizar el énfasis sobre la naturaleza social de la construcción del conocimiento. Esto refleja la visión de que los individuos construyen conocimiento en las discusiones en el aula, en lugar de ver que las discusiones en el aula son una forma de conocimiento socialmente construido. (McNair, 2000, p. 197)

Para McNair, este cambio de perspectiva implica que si los estudiantes no logran el nivel esperado esto es debido al contenido de las discusiones y no a insuficiencias atribuibles a ellos. Este autor adopta la visión de las matemáticas como "un sistema de razonamiento desarrollado a través de intentos de organizar y estructurar objetos, eventos y procesos en nuestro medio ambiente" (p. 201). Desde su perspectiva, la discusión matemática constituye un tipo de discusión que tiene el objetivo de hacer crecer una estructura de razonamiento matemático:

> Añadir estructura a un sistema matemático de organización [de la experiencia individual y colectiva] involucra una búsqueda de patrones y consistencia, esfuerzos para generalizar y formalizar procedimientos, esfuerzos para hacer conexiones dentro del sistema, y para desarrollar argumentos lógicos que puedan ser usados para probar y compartir los resultados de estos esfuerzos. (Ibíd.)

Uno de los aspectos susceptibles de mejorar para aumentar la calidad de las discusiones matemáticas en el aula lo constituye el *texto* de la discusión, esto es, las ideas y los pensamientos que son comunicados y compartidos en una discusión por los participantes; el texto se refina a medida que crece la participación y los estudiantes pueden reconocer y desarrollar otros conceptos matemáticos que puedan ser integrados a sus discusiones.

Estas características de una actividad discursiva en el aula permiten conformar un verdadero marco referencial matemático para la discusión. McNair señala, con respecto a sus propias observaciones, que no es suficiente que los estudiantes logren resolver correctamente una situación-problema para hablar de una discusión matemática en el sentido de una forma de conocimiento socialmente construido, sino que, para que esto sea posible, en el centro de la actividad discursiva de los estudiantes debe estar en juego el entendimiento profundo del contenido matemático que es el motivo de la actividad, trátese de relaciones, conceptos o procesos.

Es importante, entonces, reafirmar que existe un reconocimiento explícito del rol del maestro como organizador de las actividades y de las discusiones entre los estudiantes. Esto también se refleja en el señalamiento de una serie de cualidades o habilidades que pueden definir estrategias para el desarrollo de discusiones matemáticas en el salón de clases. Siguiendo a Wood (1999), son los rasgos específicos de la actuación y las cualidades del maestro en la conducción de la clase, lo que lleva a establecer normas de interacción social que de manera cotidiana definen las actitudes y los roles que los estudiantes asumen, y que les permiten contribuir efectivamente a la discusión y al aprendizaje compartido. Un aspecto inicial es el de establecer clara diferencia entre lo que constituye una crítica personal y una crítica acerca de las ideas matemáticas, ayudando a los estudiantes a aprender a estar en desacuerdo con otros. Otros pronunciamientos en este sentido son los siguientes:

- El maestro solicita a los estudiantes clarificar los contenidos de sus afirmaciones; acepta y construye sobre las respuestas que ofrecen y reformula las afirmaciones que ellos hacen introduciendo un lenguaje más preciso. (Moschkovich, 1999)
- El maestro debe ser capaz de llevar las preguntas y las ideas de los estudiantes a un contexto matemático más amplio. (Richards, 1996)

Así, en nuestra investigación, la discusión matemática se concibe como una parte primordial de la interacción social. La discusión matemática deberá estar orientada hacia la fundamentación de los hechos geométricos que las actividades de exploración permiten evidenciar. El papel del profesor es el de un conductor de dichas actividades, con el objetivo específico de maximizar el potencial de entendimiento y de comunicación matemática de los estudiantes. La discusión matemática representa la oportunidad de ampliar o consolidar aprendizajes situados y representa, también, una alternativa viable para el involucramiento de los estudiantes en la elaboración de pruebas, al permitirles compartir entendimientos y significados matemáticos mediante su explicitación y el sometimiento al escrutinio público.

2.1.3. El aprendizaje de las transformaciones geométricas mediado por Cabri y por las Máquinas Matemáticas

La utilización de Cabri y de las máquinas matemáticas articuladas en actividades dirigidas al estudio de las transformaciones geométricas elementales ha producido resultados alentadores, tanto en lo que se refiere a la apropiación por los estudiantes de las nociones y de los procedimientos constructivos relacionados, como en lo que se refiere a su involucramiento en procesos de comunicación y de justificación matemática de las afirmaciones que la actividad les permite generar. Se presenta a continuación la revisión de tres reportes de investigación en los que la utilización de dichas herramientas o dispositivos instruccionales[8] juega un papel central en esto.

2.1.3.1. La utilización de máquinas matemáticas como recurso para aproximar a los estudiantes a la elaboración de pruebas

Las máquinas matemáticas articuladas constituyen un recurso valioso no sólo para el involucramiento de los estudiantes en el estudio de áreas específicas de la

[8] Meira (1998) llama así a artefactos utilizados en el ambiente escolar con fines didácticos, pero que son también dispositivos simbólicos con un significado cultural.

geometría, como las transformaciones en el plano, el estudio de las cónicas o el de la perspectiva, sino también para el desarrollo de una cultura de la argumentación en el salón de clases de matemáticas y, eventualmente, para el involucramiento de los estudiantes en procesos de validación. Las máquinas matemáticas o pantógrafos, son consideradas como un ejemplo de la relación entre la tecnología y la ciencia, puesto que estos mecanismos dan cuenta de una relación recíproca entre teoría y práctica. En algunas ocasiones la teoría permite concebir mecanismos con una función específica, en otras la práctica ha llevado a la construcción de mecanismos que impulsan por sí mismos su descripción teórica (Pergola, 1998). Particularmente las máquinas matemáticas se sitúan en la intersección entre el campo de la experiencia mecánica y el campo de la experiencia geométrica:

> Las máquinas se basan tanto en principios físicos como geométricos: los primeros conciernen a los materiales, las fuentes de energía, la distribución y regulación de las fuerzas actuantes y otros; mientras que los segundos conciernen al movimiento relativo de cada parte, la trayectoria de cada punto en movimiento, etc. (Bartolini, 1993, p. 97).

Sin embargo, como también lo señala Bartolini (1993), la geometría que subyace en el mecanismo no es transparente de manera inmediata para el estudiante ni el funcionamiento mecánico del pantógrafo puede ser explicado desde la geometría sin que se lleve a cabo una actividad adecuada o, como lo destaca Pergola (1998), “la transformación [geométrica] (en cuanto correspondencia) no tiene en sí un vínculo simple con el movimiento que la genera [en la máquina articulada]...”; es esta posibilidad de “transparentar” las máquinas articuladas, desde la geometría, lo que les confiere su cualidad potencial de herramientas de mediación de los aprendizajes: “…los artefactos llegan a ser eficientes, relevantes y transparentes a través de su utilización en actividades específicas y en relación a las transformaciones que experimentan en manos de los usuarios.” (Meira, 1998, p. 125).

Uno de los primeros estudios publicados en los que se da cuenta del desempeño de los estudiantes en la elaboración de una demostración, teniendo como motivo la indagación de la transformación geométrica asociada a un pantógrafo en particular, es el reportado por Bartolini (1993). En ese estudio participaron estudiantes de 11° grado en la tarea de resolver un cuestionario referido a una actividad con un modelo físico del pantógrafo de Sylvester, el cual produce una rotación. Para Bartolini, la actividad de los estudiantes debe ser entendida en el sentido de la apropiación de una artefacto cultural, i.e. "…el proceso que tiene como resultado final la reproducción por el individuo de propiedades, capacidades y modos de comportamiento humano formados históricamente" (Bartolini, 1993, p. 99). En el caso de las máquinas matemáticas, tal apropiación, constituye una actividad adecuada para la modelización geométrica de éstas.

El estudio llevado a cabo por Bartolini se diseñó a partir de la toma de decisiones respecto a tres aspectos fundamentalmente:

- la pertinencia de utilizar un modelo físico del pantógrafo para concretar uno de los polos del par objeto físico – objeto ideal;
- la estructuración del trabajo de los estudiantes en pequeños grupos mediante una secuencia consistente de ocho preguntas, con los objetivos de transformar el mecanismo articulado específico en un objeto ideal, y al mismo tiempo estructurar el escenario teórico en el cual describir su papel y función general;
- y un tercer aspecto consistente en las fases de actividad compartida entre maestro y estudiantes, fundamentada en términos de la zona de desarrollo próximo y de la necesidad de que los estudiantes se apropien de un legado cultural.

La discusión de los resultados obtenidos se remite, entonces, al funcionamiento en la práctica de estos tres aspectos. Bartolini señala que el cuestionario permitió estructurar el proceso en el aula como un agente externo, y pudiera considerarse como un medio propicio al proceso de internalización en el estudio metódico por parte de los estudiantes de esta clase de mecanismos articulados. Las intervenciones del maestro fueron determinantes para la evolución de la actividad, como sucedió para la visualización de ángulos en la estructura del pantógrafo, y en la aceptación de la conjetura conveniente, ayudando a descartar enunciados irrelevantes para la identificación de la propiedad invariante en esa máquina matemática.

En lo que se refiera a la relación dialéctica entre el objeto físico y el objeto ideal, esta investigadora refiere que en ocasiones el enlace entre ambos no es fácil de manejar:

> Aún cuando los estudiantes determinaron correctamente propiedades geométricas del pantógrafo, esto no significó que las utilizaran con eficacia para probar la propiedad geométrica invariante característica; sin embargo, si fueron observadas ciertas formas primarias (embriones) de la transición desde lo general a lo específico, necesarias para completar el movimiento dialéctico entre ellos. (Ibíd. p. 102)

Aunque el movimiento de lo general a lo específico, en un sentido y en otro, no siempre fue interiorizado por los estudiantes, algunas veces el maestro intervino para sugerir el cambio: "…ensaya y verifica en el pantógrafo una afirmación obtenida por medio de deducción lógica; ensaya y prueba una afirmación obtenida por medio de la experimentación. (Ibíd.)

De esta manera, las máquinas matemáticas articuladas, o mejor dicho, el tipo de actividades que las mismas permiten llevar a cabo con los estudiantes, hacen que puedan ser consideradas como objetos culturales y como herramientas con las cuales es posible establecer puentes hacia la construcción de nociones e ideas matemáticas. La exploración y la indagación de sus propiedades y de los invariantes geométricos que operan en ellas, puede promover el desarrollo de un campo de experiencia de la geometría de transformaciones en el que los estudiantes tengan oportunidad de relacionar el conocimiento empírico con el conocimiento teórico. Desde la perspectiva de nuestra investigación, las máquinas matemáticas se consideran un medio propicio para que los estudiantes lleguen a involucrarse en una actividad intelectual, ante el requerimiento de elaborar argumentos matemáticos en relación con las propiedades subyacentes al mecanismo en cuestión, o bien, en relación con las propiedades de los objetos geométricos que cada mecanismo genera.

2.1.3.2. La conveniencia de una máquina simulada para involucrar a los estudiantes en la elaboración de pruebas

Otro estudio en el que se da cuenta de las posibilidades que ofrece la mediación a través de instrumentos concretos y virtuales para llevar a los estudiantes a producir conjeturas, argumentar y elaborar pruebas, es el reportado por Vincent y colaboradores (Vincent et al., 2002). Ellos llevaron a cabo una investigación con estudiantes de 8° grado, quienes previamente habían realizado tareas referidas a demostraciones geométricas básicas, como la suma de ángulos de un triángulo o demostraciones de propiedades de los paralelogramos. El enfoque de los investigadores se centró en "…una comparación del uso dado por las estudiantes de un modelo físico y de un modelo Cabri de una articulación, examinando particularmente como las estudiantes explotaban las características de Cabri como ayuda en la producción de conjeturas relevantes." (Vincent et al., 2002, p. 314). La necesidad para la elaboración de una prueba en el contexto de la utilización de máquinas matemáticas fue manejada por estos investigadores presentando previamente un eslabonamiento de Tchebycheff. Éste es un eslabonamiento que, en apariencia, produce un movimiento rectilíneo, sólo un estudio más detallado del mismo permite percatarse de que tal movimiento no es completamente rectilíneo.

Las estudiantes fueron capaces de construir demostraciones acerca de la transformación particular realizada por el pantógrafo de Sylvester. En esto fue determinante la utilización de un modelo físico del pantógrafo, el cual fue construido por las estudiantes mismas y de un pantógrafo simulado en Cabri. Se observó que las estudiantes alternaban esta actividad (la elaboración de una prueba) con el empleo del modelo mecánico del pantógrafo, como medio para confirmar lo que habían obtenido con el modelo simulado en Cabri. “Una vez seguras de sus conjeturas, las estudiantes tendían a trabajar diagramas con papel y lápiz durante la construcción de la prueba.” (Ibíd. p. 319)

A decir de las propias estudiantes, la utilización del modelo simulado hizo las propiedades geométricas más obvias y les permitió encontrar con mayor facilidad razones para explicar el funcionamiento del pantógrafo. Para Vincent et al., el modelo Cabri proporciona una figura geométrica ya hecha, lo que permite a los estudiantes enfocarse de manera más inmediata en las relaciones funcionales presentes en la máquina articulada, más que en sus propiedades estructurales básicas. Además, las características propias del software como la *Traza* al efectuar el arrastre de objetos en la pantalla, las herramientas de medición o la construcción de líneas auxiliares, fueron aspectos importantes de la utilización del modelo Cabri para el éxito en la elaboración de conjeturas y la construcción de pruebas:

> En lugar de eliminar la necesidad de una prueba, la evidencia convincente y las aportaciones singulares para la exploración y el descubrimiento proporcionadas por el software dio a las estudiantes la confianza y el deseo de seguir adelante y probar sus conjeturas. (Ibíd. p. 320)

Sin embargo, estos investigadores señalan también que no es conveniente subvalorar el papel de los pantógrafos materiales, dadas las posibilidades de descubrimiento geométrico que su utilización aporta y dada la motivación que la experiencia táctil y la satisfacción de trabajar con eslabonamientos físicos reales representa.

2.1.3.3. El carácter complementario que se establece entre ambas herramientas de mediación

Otras investigaciones en las que se ha utilizado conjuntamente el software de geometría dinámica y las máquinas matemáticas articuladas, como herramientas de mediación propicias para el establecimiento de la comunicación matemática en el aula y el desarrollo de la argumentación y el pensamiento matemático en el contexto de las transformaciones geométricas elementales, son las llevados a cabo por Hoyos (2001; 2002; 2003-a; 2003-b). Trabajando con estudiantes entre 14 y 15 años de edad, Hoyos (2003-a) hace un primer señalamiento referido a la conformación, empíricamente confirmada, de una base didáctica eficaz, por medio de la cual es posible avanzar en dichos aspectos. Esta base es la siguiente:

> (a) iniciar con la emergencia de intuiciones por medio de actividades a partir del software dinámico;
> (b) pasar a la reflexión de las propiedades geométricas en juego por medio de la actividad con las máquinas articuladas y
> (c) comunicar, basados en el soporte que proporciona la utilización del software y las nuevas tecnologías de comunicación (como el uso de Internet y de un proyector de imágenes digitales) estrategias personales o soluciones propias a los problemas propuestos, problemas complejos o de dificultad estándar, usuales en el nivel educativo en cuestión. (Hoyos, 2003-a, pp. 145-146)

A su vez, esta base didáctica está inserta en una "Triada Básica para la Comunicación Matemática en el Aula" (Ibíd. p. 131) formada por uno o más dominios matemáticos complejos, una serie de actividades dirigidas o guiones de actividad y el uso de artefactos culturales concretos y virtuales.

Otro aspecto a destacar en estos estudios es el papel crucial que la formulación matemática de las propiedades geométricas inherentes en el proceso de trazado simultáneo de figuras antecedentes y sus imágenes tiene para la comprensión y el aprendizaje de las transformaciones, es decir, se parte de la hipótesis de que el reconocimiento y la enunciación de las relaciones geométricas características de cada transformación, y que subyacen en los objetos trazados, es un paso indispensable para la apropiación de las nociones o los procedimientos geométricos involucrados. Este proceso de hacer explícitos los invariantes geométricos de cada transformación está apoyado en relaciones aritméticas entre mediciones hechas sobre los dibujos, o en la expresión textual de las propiedades generales percibidas al interactuar con las herramientas de mediación.

También en estos estudios, se ha mostrado la importancia que tienen los guiones de actividad, así como el comando *Ayuda* del software, para que los estudiantes tengan acceso "…a una percepción inicial de los objetos y las relaciones involucradas en las transformaciones geométricas, a una configuración visual de las propiedades y las relaciones entre ellos." (Hoyos, 2002). Entre los resultados reportados se observan ciertos patrones de comportamiento cuando los estudiantes comienzan a explorar las transformaciones geométricas en el ambiente de Cabri. Generalmente, las primeras respuestas que dan los estudiantes, ante el requerimiento de establecer relaciones características entre los objetos geométricos y sus imágenes, consisten en señalamientos del tipo: "un punto se mueve con el otro", sin embargo, "…esa respuesta no caracteriza a alguna de las transformaciones, puesto que es válida para todas ellas." (Hoyos, 2002). La fase siguiente de actividad, estructurada alrededor de la utilización de los pantógrafos, trata de promover una caracterización más precisa de cada transformación. Así, a medida que los estudiantes avanzan en la exploración de las transformaciones, utilizando el software y los pantógrafos, ellos pueden aprovechar mejor los recursos de que disponen para establecer de manera más sólida sus propias afirmaciones, llegando, en ocasiones, a abstraer y a hacer objetiva la propiedad invariante de la transformación geométrica en juego (Hoyos, 2003-b). La intervención pertinente del maestro o de quien conduce la actividad, representa también un factor que puede contribuir al proceso de llevar al plano racional las propiedades o las relaciones inicialmente intuidas y confirmadas mediante la experimentación con las herramientas. Es importante también señalar que estos escenarios de aprendizaje o de actividad en el aula, promueven la participación de las y los estudiantes en igualdad de términos.

Finalmente, Hoyos (2003-b) señala que el orden inverso en que se estructuró la actividad es lo que en buena medida generó la complementariedad entre las herramientas utilizadas en cada caso:

> En el primer escenario, el soporte proporcionado por el software Cabri permite la activación inicial de las propiedades geométricas invariantes involucradas en la transformación geométrica seleccionada, mediante el acceso al menú de transformaciones geométricas. Por otro lado, en la manipulación de los pantógrafos [el segundo escenario], el primer paso necesario fue crear un dibujo y establecer una comparación con el dibujo obtenido simultáneamente del trazador de la máquina articulada. (Hoyos, 2003-b)

Esto sugiere que el trabajo con los pantógrafos promueve la explicitación de las propiedades geométricas invariantes características de las transformaciones correspondientes y, en esta medida, la apropiación en un nivel racional de tales invariantes. Esto sucede una vez que se ha iniciado un proceso de reconocimiento de esas mismas propiedades y de apropiación de los símbolos lingüísticos con los cuales pueden ser referidos convenientemente, para lo cual, el ambiente de Cabri resulta muy adecuado.

2.1.4. Cierre

Las investigaciones aquí revisadas permiten asumir que el ambiente de geometría dinámica de Cabri y las máquinas matemáticas articuladas constituyen medios eficaces para llevar a cabo actividades en las que los estudiantes se introduzcan en el estudio de las transformaciones geométricas, actividades que den lugar a la generación de procesos de comunicación matemática, al surgimiento de situaciones de validación que puedan ser asumidas por los estudiantes y para promover, en esa medida, la emergencia de formas de racionalidad matemática que puedan ser convenientemente exteriorizadas.

Con el afán de hacer de las transformaciones geométricas un campo de experiencia matemática y de involucrar a los estudiantes en la unidad cognitiva de teoremas, se considera pertinente dirigir la actividad de los estudiantes a la indagación en torno a la composición de isometrías, tanto en el ambiente de Cabri, como por medio de las máquinas articuladas, con el fin de que los estudiantes elaboren conjeturas y produzcan argumentos dirigidos a validarlas. Si la hipótesis de una complementariedad entre ambas herramientas en el aprendizaje de las transformaciones geométricas es válida, entonces es pertinente indagar en la forma en que tal complementariedad se produce y en la forma en que ésta promueve el desarrollo de formas de racionalidad teórica y el avance de los estudiantes en sus propios procesos de validación.

La información que proporcionan las investigaciones hasta aquí revisadas sugiere avanzar en ese sentido. Así, las preguntas de investigación que surjan de esta revisión, tendrán que dirigirse también en el sentido del tipo de mediación que los artefactos proporcionan, especialmente en el esclarecimiento de los “mecanismos” de mediación semiótica que estos esquemas de actividad promueven; así como en el tipo de actividad que estimula en los estudiantes su involucramiento en la construcción de pruebas matemáticas y en las formas en que ellos estructuran sus experiencias para avanzar en sus procesos de validación.

También asumimos, como ya lo han señalado diferentes investigadores (e.g. De Villiers, 1998; Hanna y Jahnke, 1996), que el desarrollo de la prueba en la clase de matemáticas puede constituirse en una herramienta poderosa para la comprensión, incluyendo la importante tarea que representa el desenvolvimiento de las capacidades argumentativas de los estudiantes y la transformación en cuanto a la relación personal que se tiene con la matemática. Suponemos también que el trabajo colectivo en torno al desarrollo de un campo de experiencia promueve la generación de “objetos matemáticos experiencialmente reales” (Yackel y Cobb, 1996), mismos que permitirán sustentar explicaciones y argumentaciones referidas a las nociones y los procedimientos geométricos subyacentes. Dicho en otras palabras, la utilización coordinada de un ambiente de geometría dinámica y máquinas matemáticas articuladas puede promover la construcción de conceptos matemáticos en el sentido de “abstracciones concretas” (Mariotti, 2002), que reflejen y reconstruyan la naturaleza sistemática e interconectada de los objetos reales. El punto clave es la distinción entre el uso de un artefacto en una orientación externa y el uso de un artefacto en una orientación interna, junto con el proceso de la transición desde una orientación externa a una interna.

2.2. La aproximación sociocultural a la formación matemática escolar

Una visión sociocultural del aprendizaje considera los procesos sociales como una parte esencial de la construcción de conocimiento. Seeger et al. (1998) plantean que la “cultura del aula” señala un cambio de perspectiva sobre los procesos del salón de clases, que “se refleja en el intento de capturar su complejidad y su carácter holístico como procesos fundamentalmente sociales de construcción de sentido y de significado.” (Seeger et al., 1998, p. 1). Se asume que si bien cierto conocimiento matemático puede ser enseñando, la construcción de significado o el hacer sentido es un proceso que sólo puede ser nutrido, poniendo en relieve una visión de la formación matemática escolar consistente en “procesos de cultivo” (en el sentido de producir embriones y procurar su crecimiento), referida al desarrollo de conceptos, procedimientos, actitudes y habilidades de tipo matemático sobre la base de procesos indirectos de enseñanza-aprendizaje. Emerge de esta manera, el papel que tiene en la formación de los estudiantes participar en una cultura del salón de clase de matemáticas, puesto que es por medio de la articulación entre los diferentes entendimientos y las aportaciones que los participantes (incluido el maestro o instructor) exteriorizan al llevar a cabo actividades adecuadas, que el grupo puede llegar a construir y a validar significados compartidos.

Esta visión sociocultural del aprendizaje representa un conjunto de aproximaciones a la investigación, mismas que comparten enfoques y creencias con la finalidad de encontrar rasgos de una cultura del salón de clases de matemáticas, la cual, con sus contenidos de enseñanza y al nutrir la construcción de sentido, permita a los estudiantes compartir una cultura matemática y la cultura humana en el amplio sentido. Se asume entonces que el contexto influye en los procesos de construcción de significados, que el aprendizaje matemático se organiza en situaciones sociales y depende de la dinámica de los procesos sociales de los participantes y se asume también la necesidad de hacer explícitos o desarrollar los conceptos teóricos con los que el investigador da cuenta de la complejidad que la realidad bajo estudio representa.

2.2.1. El conocimiento matemático socialmente construido y el compromiso entre éste y las restricciones epistemológicas específicas

Cuando la actividad de aprendizaje se enfoca hacia la construcción colectiva de significados es indispensable atender la coherencia o la compatibilidad entre el conocimiento matemático así construido y el conocimiento matemático institucionalizado. Esta problemática es discutida por Ernest (1998) y por Steinbring (1998) entre otros.

Para llevar a cabo una reflexión acerca de la perspectiva sociocultural de la enseñanza y el aprendizaje de matemáticas. Ernest (1998) plantea, entre otras, las siguientes preguntas: *¿Cuál es la relación entre conocimiento personal y conocimiento público de matemáticas?; ¿Cuál es la relación entre “necesidades estructurales” y “convenciones sociales” de conocimiento matemático en la interacción educativa?* Para discutir esas cuestiones Ernest se enfoca en varios aspectos presentes en la cultura de la matemática como disciplina científica y la cultura de la matemática como asignatura escolar. A su juicio, es en el proceso de justificación o de dar garantía del conocimiento elaborado, que las similitudes entre ambas formas de cultura matemática son más notables. Ernest argumenta que la aceptación de una prueba es un acto fundamentalmente social: “Desde esa perspectiva [una visión social de la prueba] la estructura de una prueba matemática es un medio para su fin epistemológico de proporcionar una justificación persuasiva, una garantía para una afirmación matemática.” (Ibíd. p. 253).

La propuesta de llevar al salón de clases la cultura de la investigación matemática representa, aparentemente, cierta contradicción, puesto que al acercar los contextos de la génesis del conocimiento en la escuela y en la investigación matemática, los contextos de la justificación del conocimiento se separan. “El alejamiento de la retórica de un código impersonal estándar, hacia un dar cuenta de, más personal, de los resultados de una investigación matemática, es un cambio que se aleja de la retórica de la matemática profesional.” (Ibíd. pp. 258-259). Sin embargo es importante, también, reconocer que “los contextos de la génesis y de la justificación en la investigación matemática difieren ampliamente.” (Ibíd. p. 259). Esto indica que es necesario flexibilizar la postura en relación con las formas en que se desarrolla la justificación o la prueba dentro de la matemática escolar. Quienes aprenden desarrollan conocimiento personal de lenguaje, matemáticas y lógica a través de la participación prolongada en conversaciones socialmente situadas de diferentes tipos. Una participación sostenida bidireccional en tales conversaciones es también necesaria para generar, examinar, corregir y validar el conocimiento matemático personal o representaciones subjetivas de éste. Tal conocimiento tiene características idiosincrásicas, pero su articulación con el de otros se lleva a cabo por interacción personal y participación en formas de vida, esas interacciones son las que permiten que un conocimiento matemático personal sea considerado como interiorización de conocimiento objetivo.

Por su parte, Steinbring (1998) enfoca el entendimiento matemático desde la perspectiva del desciframiento de signos y símbolos de dos tipos: convencionales y epistemológicos (matemáticos). Tanto quien aprende como quien promueve el aprendizaje se enfrentan a la tarea de tratar de descifrar signos sociales (sugerencias veladas, énfasis, confirmaciones, rechazos, etc.) y signos matemáticos (cifras, letras, variables, gráficas, etc.) comunicados por otras personas, "es la amplitud de las referencias intencionales de signos y símbolos epistemológicos y sociales en procesos matemáticos interactivos, lo que constituye el núcleo de los problemas respecto al entendimiento de matemáticas" (Steinbring, 1998, p. 347). Ambos tipos de signos y símbolos son intencionales, son referentes a alguna otra cosa, y lo referido puede cambiar durante el discurso o sufrir un cambio decisivo de significado.

Desde su punto de vista, los signos no sólo se refieren a elementos fijos en redes de representación, sino esencialmente a relaciones por construir en los campos de referencia, es en esto que radica el entendimiento. Al tratar de descifrar signos matemáticos, el sujeto tiene que construir una relación entre aquellos signos que ya han sido construidos (y la red de representaciones asociadas a él) y los nuevos signos que aún tienen que ser entendidos. Para Steinbring, esto da origen a las siguientes preguntas: *¿Qué clase de relación es ésta?, ¿es una reducción, un equilibrio o una dependencia? y ¿qué clase de restricciones epistemológicas y convenciones sociales están involucradas en esta relación?* (Ibíd. p. 349).

Se trata de que los estudiantes reconozcan o se apropien de algún medio epistemológico de justificación, sin que sea únicamente el aspecto social/convencional de la interacción (que en ocasiones convierte la interacción entre maestro y estudiantes en un juego de adivinación vacío de significado matemático) lo que imponga la validez del conocimiento matemático. Para esto es necesario que los patrones convencionales de argumentación y de entendimiento dependan del carácter epistemológico de los contenidos matemáticos.

> …el entendimiento de conocimiento matemático es una relación recíproca de entender el nuevo conocimiento matemático en su propio derecho (integrar la estructura ya existente en la nueva estructura…) y, simultáneamente, de organizar y formular este entendimiento en el marco de los patrones convencionalizados, legitimizados y aceptados de justificación social del conocimiento (o de demostrar la necesidad de modificar el marco social, convencional). (Steinbring, 1998, p. 364)

Al romper con la pretensión de que los estudiantes interioricen los esquemas a priori previamente elaborados por el profesor, como modelo de aprendizaje directo, y, por el contrario, estimular la construcción de significado o el logro de un entendimiento que responda coherentemente a la epistemología del contenido matemático, emerge una amplia gama de posibilidades que no necesariamente han sido previstas, algunas de éstas pudieran representar alternativas adecuadas a esa intención. Se trata de llevar a cabo un verdadero esfuerzo de entendimiento tanto en el plano intersubjetivo como en el plano intrasubjetivo, lo cual representa para el maestro mantener una alerta permanente en relación a las aportaciones de sus estudiantes. Steinbring llama la atención en esto al hacer énfasis en "…la interrelación entre las restricciones sociales, convencionales y epistemológicas que tienen que ser desarrolladas y relacionadas a fin de producir auténtico entendimiento, esto es, capturar activamente el nuevo significado." (Ibíd. p. 367)

2.2.2. Discusión

De la revisión anterior, podemos suponer que, desde un enfoque sociocultural, la validez del conocimiento elaborado se encuentra en el centro de la discusión. ¿Cuáles son los medios o las condiciones que permiten alcanzar la validez del conocimiento matemático? o ¿Cómo se promueve el desarrollo de formas de racionalidad que permitan a los participantes validar matemáticamente el conocimiento construido?

Una posible respuesta está en una cita que hace Voigt (1996): “Desde el punto de vista epistemológico, la estabilidad de un tema corresponde a la auto-referencia de conocimiento matemático.” (Steinbring, 1991, citado en Voigt, 1996, p. 35). Él mismo señala también que:

> Si el maestro no dirige y evalúa a los estudiantes rígidamente… y si no se establece un diálogo en el viejo sentido normativo, el tema puede ser descrito como un río que produce su propio cauce. (Voigt, 1996, p. 35)

Resulta entonces fundamental que la estructura de conocimiento matemático involucrada en el tema de estudio crezca y se apoye cada vez más en referentes matemáticos validados. Consideramos que la introducción en el ambiente de aprendizaje de artefactos culturales, en los que subyacen nociones, relaciones y procesos matemáticos, como origen o sustento material de las actividades en el aula, constituye una alternativa coherente con las hipótesis que la perspectiva sociocultural plantea, en otras palabras, suponemos que la presencia de tales artefactos estimula la comunicación y la reflexión en torno a los contenidos matemáticos que emergen en la actividad misma, dando oportunidad a los participantes de hacer explícitos sus entendimientos y de negociar los significados atribuidos a los referentes puestos en juego.

De cualquier manera, es importante también considerar que no es sólo esta presencia y la interacción que mediante ésta se genere lo que permite a los participantes apropiarse de significados y construir conocimientos. Aunque se asume la existencia de una relación positiva entre la participación activa en los procesos sociales en el aula y el desarrollo matemático conceptual (Krummheuer, 1995), la relación entre interacción social y construcción de conocimiento se considera como una relación indirecta:

> … la interacción social no es un vehículo que transforme conocimiento ‘objetivo’ en conocimiento subjetivo. Pero la interacción social hace posible que las ideas subjetivas lleguen a ser compatibles con la cultura y con el conocimiento intersubjetivo como las matemáticas. (Voigt, 1996, p. 30)

2.3. Los objetos matemáticos

La posibilidad de experimentar objetos, nociones o procesos matemáticos mediante la utilización de artefactos culturales, trátese, e.g., de medios informáticos o de objetos concretos, da lugar a la elaboración y apropiación de modelos físicos y cognitivos, representaciones externas e internas asociadas a las ideas matemáticas en juego. La transformación y manipulación de tales modelos hace surgir la posibilidad de estructurar procesos de pensamiento. Ésta es quizá una de las premisas básicas de la aproximación mediante el uso de herramientas instruccionales al aprendizaje de matemáticas. Mariotti (2002) cita a Noss y Hoyles (1996), para señalar que es necesario considerar los objetos matemáticos “abstractos” desde una perspectiva en la que éstos poseen una conexión fundamental con objetos tangibles o sensoriales, de manera que un objeto matemático tiene también cierta calidad de concreto que no es una propiedad en sí del objeto, sino más bien una propiedad de una relación de la persona con el objeto a través de sus modelos o de sus representaciones: “La abstracción debe ser considerada no tanto como un paso hacia arriba, sino más bien como un entretejido de teorías, experiencias, y fragmentos de conocimiento previamente desconectados incluyendo conocimientos matemáticos.” (Citado en Mariotti, 2002, p. 698).

> En este sentido los conceptos matemáticos son “abstracciones concretas” porque reflejan y reconstruyen la naturaleza sistemática e interconectada de los objetos reales… De hecho el interjuego entre abstracto y concreto es una fuente de significado en una redefinición continua en la que actividades abstractas y concretas son mutuamente constitutivas. (Mariotti, 2002, p. 699).

Esta perspectiva promueve el proceso de abstracción matemática a partir del soporte de experiencias sensoriales o, citando nuevamente a Noss y Hoyles, “desde esta perspectiva fluye el corolario educativo de que sería posible diseñar ambientes educativos en los cuales los procesos de abstracción lleguen a ser parte de la experiencia vivida en la cultura.” (Citado en Mariotti, 2002, p. 699).

A continuación se presentan dos esquemas teóricos, en el primero Sfard (1991) plantea la dualidad de los conceptos matemáticos como procesos y como objetos, proponiendo que en la formación cognitiva de éstos la concepción operacional es previa a la estructural. En el segundo esquema Sangaré (1999) presenta una caracterización de los diferentes niveles en los que se podría ubicar una conceptualización de las transformaciones geométricas. Consideramos ambos esquemas útiles para discutir acerca de las formas en que los participantes en nuestro estudio empírico conciben las transformaciones geométricas, incluyendo en esto al tipo de actividades de aprendizaje realizadas.

2.3.1. El desarrollo de las concepciones personales de los objetos matemáticos

Para Sfard (1991), las nociones matemáticas abstractas pueden ser concebidas en dos formas fundamentalmente diferentes: estructuralmente, como objetos, y operacionalmente, como procesos. Ambas aproximaciones son complementarias. Sfard se apoya en la revisión histórica del desarrollo de algunas nociones matemáticas y en el desarrollo de *esquemas cognitivos*, para proponer un esquema de aprendizaje de los conceptos matemáticos, asumiendo que, para la mayoría de la gente, la concepción operacional representa el primer paso en la adquisición de una nueva noción matemática.

La palabra *concepto* (o noción) se refiere a una idea matemática en su forma oficial, “como un constructo teórico, dentro del ‘universo formal del conocimiento matemático’” (Sfard, 1991, p. 3); mientras que el grupo completo de representaciones internas y asociaciones evocadas por el concepto, su contraparte en el “universo interno, subjetivo del conocimiento humano” (ídem.) es referida como una *concepción*. Las concepciones que las personas desarrollan de los objetos matemáticos poseen una naturaleza dual: se conciben estructuralmente, como objetos, y se conciben también operacionalmente, como procesos. El desarrollo histórico de la noción de número muestra un estrecho vínculo entre ambas formas de concebir diferentes clases (o subclases) de números a partir del proceso “natural” de conteo; la simetría puede ser concebida como una propiedad estática de una forma geométrica, pero también como una clase de transformación o mapeo; de manera semejante, el concepto de función posee un carácter operacional en el sentido de procesos computacionales, o en el sentido de un método que permite transitar de un sistema a otro, y también posee un carácter estructural en el sentido de un conjunto de pares ordenados. Sfard señala que, de acuerdo con lo que ya se sabe de la codificación interna, los conceptos matemáticos algunas veces son representados internamente mediante la ayuda de “imágenes mentales”, mientras que en otras ocasiones las mismas ideas son manejadas a través de representaciones verbales. Las imágenes mentales, siendo compactas e integradoras, parecen apoyar la concepción estructural. La visualización, por lo tanto, hace las ideas abstractas más tangibles y promueve su tratamiento casi como si fuesen entidades materiales.

Sfard desarrolla su propuesta asumiendo que la concepción operacional precede, en términos generales, a la concepción estructural:

> Si la conjetura sobre los orígenes operacionales de los objetos matemáticos es cierta, entonces primero debe haber un proceso desarrollado sobre los objetos ya familiares, después debe surgir la idea de convertir estos procesos en una entidad autónoma, y finalmente debe adquirirse la habilidad de ver esta nueva entidad como un todo integrado, tal como un objeto. (Ibíd. p. 18)

Estas tres fases se denominan interiorización, condensación y reificación, respectivamente. Sin embargo, surge una dificultad metodológica que consiste en poder determinar o diagnosticar los diferentes estados en el desarrollo conceptual de un estudiante:

> Parece que no tenemos más opción que describir cada fase de la formación de los objetos abstractos en términos de características externas tales como *comportamientos, actitudes y habilidades* de los estudiantes. Es probable que la especificación resultante sea suficientemente clara como para diagnosticar, y quizá aún medir, la habilidad de un estudiante para pensar estructuralmente acerca de un concepto. (Ídem.)

Sfard describe cada una de esas fases de la manera siguiente:

Interiorización:

> En la fase de interiorización un aprendiz adquiere conocimiento de los procesos que eventualmente darán origen a un nuevo concepto… Estos procesos son operaciones desarrolladas sobre objetos matemáticos de bajo nivel. Gradualmente el aprendiz llega a ser suficientemente hábil para llevar a cabo esos procesos. El término interiorización se usa aquí en el sentido que le dio Piaget (1970, p. 14): diremos que un proceso ha sido interiorizado si “puede ser llevado a cabo a través de representaciones [mentales]”, de manera que ya no es indispensable realizarlo concretamente para que sea considerado, analizado y comparado. (Ibíd. p. 18)

Condensación:

> La fase de condensación es un periodo de integración de largas secuencias de operaciones en unidades más manejables. En esta fase una persona llega a ser cada vez más capaz de pensar acerca de un proceso dado como un todo, sin sentir urgencia para entrar en detalles… desde ese momento el aprendiz se referirá al proceso en términos de relaciones entrada-salida más que por la indicación de operaciones cualesquiera… Cualquier dificultad para indicar el resultado de un proceso subyacente (como el caso de sustraer un número de otro más pequeño, cuando sólo se conocen los números sin signo) servirá como un detonador adicional para la idea de una nueva entidad matemática. Gracias a la condensación llega a ser mucho más fácil combinar el proceso con otros procesos, hacer comparaciones, y

generalizar. Un progreso en la condensación se manifestará también en la facilidad creciente para alternar entre diferentes representaciones del concepto… En el caso del concepto de función, mientras más capaz sea la persona de jugar con un mapeo como un todo, sin examinar realmente sus valores específicos, se considerará a la persona más avanzada en el proceso de condensación. Eventualmente, el aprendiz puede investigar funciones, dibujar sus gráficas, combinar parejas de funciones (e.g. por composición), aún encontrar la inversa de una función dada. (Ibíd., p.19)

Reificación:

La fase de condensación dura tanto como la nueva entidad permanece estrechamente conectada a cierto proceso. Sólo cuando una persona llega a ser capaz de concebir la noción como un objeto totalmente encarnado, diremos que el concepto ha sido reificado. La reificación, por lo tanto, se define como un cambio ontológico – una repentina habilidad de ver algo familiar bajo una luz totalmente nueva. Así, mientras la interiorización y la condensación son cambios graduales, cuantitativos más que cualitativos, la reificación es un salto cuántico instantáneo, un proceso solidificado en un objeto, en una estructura abstracta. Varias representaciones del concepto llegan a estar semánticamente unificadas por este constructo abstracto puramente imaginario. La nueva identidad es pronto separada del proceso que la produce y comienza a extraer su significado del hecho de constituirse en un miembro de una cierta categoría. En cierto punto, esta categoría, más que cualquier clase de construcción concreta, llega a ser la base última para afirmar la existencia del nuevo objeto. Una persona puede investigar propiedades generales de tal categoría y varias relaciones entre sus representaciones. Esa persona puede resolver problemas que involucran hallar todos los casos que satisfacen una condición dada. A partir del concepto reificado pueden construirse nuevos objetos matemáticos… La fase de reificación es el punto donde comienza la interiorización de conceptos de nivel superior (aquellos que se originan en procesos desarrollados sobre el objeto en cuestión)… En el caso de las funciones, la

> reificación puede ser evidenciada por la competencia en la resolución de ecuaciones en las que las “incógnitas” son funciones (ecuaciones diferenciales y funcionales, ecuaciones con parámetros), por la habilidad de hablar acerca de propiedades generales de diferentes procesos desarrollados sobre funciones (tales como la composición o inversión) y por el reconocimiento último de que ‘la posibilidad de numerar sus elementos’ (computability) no es una característica necesaria de los conjuntos de pares ordenados que son considerados como funciones. (Ibíd. p. 20)

El carácter jerárquico del modelo está implícito en la naturaleza de cada una de las fases, sin embargo, Sfard señala también que pueden existir rutas alternas a la que el esquema propone, como la tendencia a identificar una noción dada con alguna de sus representaciones. El modelo se concibe también como un modelo recursivo, es decir, una vez alcanzado cierto nivel de reificación, el objeto producido pudiera promover un nuevo proceso a ser interiorizado. Para Sfard un aspecto sumamente importante, ligado a éste esquema, radica en el papel potencial de los nombres, los símbolos, las gráficas y otras representaciones para alcanzar las fases de condensación y reificación, aspecto que si bien ya ha sido estudiado (y que desde la perspectiva histórica puede quedar suficientemente justificado), requiere mayor investigación empírica. Por último, Sfard señala que la mayoría de sus afirmaciones respecto a su propuesta, son analíticas más que sintéticas, de manera general:

> El modelo de adquisición de conceptos presentado ha sido deducido desde una conjetura básica – de la tesis de los orígenes operacionales de los objetos matemáticos. Como tantas otras ideas aportadas por quienes aún creen en un marco teórico para la investigación cognitiva, nuestro esquema trifásico tiene un carácter altamente especulativo. (Ibíd. p. 21)

2.3.2. Los diferentes niveles de aprehensión de las transformaciones geométricas

Sangaré (1999) lleva a cabo un estudio en el cual utiliza la clasificación inicialmente propuesta por Grenier y Laborde (1988) y complementada con la aportación de Jahn (1998), para determinar el nivel de aprehensión o la conceptualización que los estudiantes de secundaria pueden desarrollar en relación a las transformaciones geométricas. Estos niveles de aprehensión son los siguientes:

- Nivel 1. La transformación es considerada "como una relación entre dos configuraciones geométricas o una relación entre dos partes de una misma configuración" (Sangaré, 1999, p. 29). El carácter funcional está ausente.
- Nivel 2. La transformación es considerada como una aplicación puntual del plano sobre sí mismo (se trata de la transformación como objeto funcional).
- Nivel 3. La transformación es considerada como una herramienta funcional con la finalidad de poner en evidencia invariantes o con la finalidad de resolver problemas.
- Nivel 4. La transformación es considerada como el elemento de un grupo (las transformaciones se componen y se comparan, ellas forman grupos de transformaciones). Este cuarto nivel es propuesto por Jahn y, desde el punto de vista de Sangaré, está asociado con un estado transfigural y caracterizado por la estructura de conjunto.

Esta jerarquía sugiere que los niveles evolucionan desde un dominio espacio-gráfico de la aprehensión de las transformaciones referido directamente a los elementos geométricos euclidianos involucrados en la transformación, hacia una aprehensión funcional (correspondencias biunívocas entre puntos del plano) y hacia una aprehensión conceptual (o dominio teórico) de la transformación que permite utilizarla como objeto y herramienta matemática en situaciones que se reconocen como un caso de la transformación en juego. En el cuarto nivel la aprehensión de las transformaciones geométricas adquiere un carácter estructural, desde un punto de vista matemático.

La expresión “elemento característico” de una transformación es una expresión de uso corriente en los manuales y en las prácticas de clase para designar el, o los objetos geométricos que caracterizan una transformación plana. Se trata por ejemplo:

- para una proyección paralela, de la *dirección* y de la *recta de proyección*;
- para una simetría central, del *centro de simetría*;
- para una homotecia, del *centro de homotecia* y de la *razón de homotecia*.

Sangaré se interesa particularmente en estos objetos porque están en el centro de la enseñanza y el aprendizaje de las transformaciones de, es decir, en el nivel donde éstas se consideran como “relación entre dos partes de una configuración o relaciones entre dos configuraciones distintas.” (Ídem.) Para este investigador, es posible distinguir el papel de estos elementos característicos en las actividades de aprendizaje que comúnmente se proponen en el estudio de las transformaciones:

> En los problemas de construcción de transformados de puntos o de figuras, ellos juegan el papel de *primitivos* en los algoritmos de construcción. En los problemas de reconocimiento o de caracterización de las transformaciones de figuras, ellos son constitutivos de estructuras de control en razón de su carácter de invariantes en el paso de la figura objeto a la figura imagen. (Sangaré, 1999, p. 30)

Sangaré divide los elementos característicos en dos categorías:

- Elementos característicos de posición: punto (llamando generalmente centro) y recta (llamada generalmente eje). Se trata de un objeto geométrico del plano en el que la aprehensión en el dominio espacio-gráfico se hace respecto a la unicidad de su representante y a la unicidad de su posición.
- Elementos característicos de relación: dirección de rectas, vector, razón, ángulo. Se trata de un objeto geométrico del plano en el que la aprehensión

en el dominio espacio-gráfico se hace respecto a la pluralidad de su representante y a la variabilidad de su posición.

La formulación de estas definiciones en referencia al dominio espacio-gráfico se debe al interés de la investigación de Sangaré, en la que las transformaciones son descubiertas a través de su acción sobre las figuras. Cabe señalar que en nuestro caso, los guiones de actividades con los que han trabajado los estudiantes están orientados en este sentido, es decir, también se trata de que ellos descubran las transformaciones a través de su acción sobre las figuras, tal acción está mediada por las herramientas utilizadas, Cabri y las máquinas matemáticas, y es por medio de la exploración tanto de las herramientas en sí mismas, como de lo que éstas producen, que se procura la generación de un campo de experiencia de las transformaciones geométricas.

Sin embargo, en nuestro proyecto de investigación es de interés indagar en la evolución de las conceptualizaciones que tienen los estudiantes respecto a las transformaciones geométricas en relación con las actividades y las herramientas instruccionales puestas en juego. Nos interesa también determinar si el escenario de enseñanza-aprendizaje puesto en marcha es adecuado para que los estudiantes lleguen a construir una "organización local de un campo"[9], referida a las transformaciones geométricas del plano, y mediante la cual puedan establecer conjeturas plausibles y avanzar en procesos de validación.

2.3.3. Discusión

Un cuestionamiento que surge de esta exposición es el siguiente: *¿Existe alguna relación entre el esquema de Sfard y los niveles jerarquizados de aprehensión de las transformaciones geométricas que propone Sangaré?*

[9] Freudenthal (1973) se refiere con este término al hecho, observado en el ámbito escolar, que consiste en que los estudiantes analizan los conceptos y las relaciones geométricas a partir de una base empíricamente elaborada o, dicho de otra manera, apoyada en hechos geométricos suficientemente conocidos. Lo cual no se opone a que los estudiantes deban reconocer, con posterioridad, la necesidad de establecer una base esencial, desde la cual sea posible validar un conjunto más amplio de proposiciones.

Ambos esquemas se refieren a un proceso evolutivo de conceptos matemáticos, nos parece que ambos parten de la realización concreta de procesos o de procedimientos en los que subyace un concepto o una noción matemática, es decir, en ambos se propone a la experiencia como el primer peldaño en la construcción de un concepto, es la ejecución de ciertas operaciones lo que permitirá avanzar hacia la abstracción del concepto implicado. Puesto que el esquema de Sfard es un esquema general, podemos suponer también, que éste podría explicar los niveles que Sangaré describe, sin embargo, lo que nos parece más útil, desde nuestra punto de vista, es que la conjunción de ambos esquemas nos da la posibilidad de hablar de la evolución de las conceptualizaciones respecto a las transformaciones geométricas, tanto desde la perspectiva del cambio en la forma en que se concibe una cierta transformación geométrica, como desde la perspectiva del efecto de la mediación ejercida por el ambiente de aprendizaje en esa evolución. Consideramos que la propuesta de Sfard proporciona una visión que puede enriquecer nuestro entendimiento de la forma en que operan esos cambios en las conceptualizaciones.

En conclusión, el esquema que propone Sfard para la apropiación de nociones o conceptos matemáticos se considera adecuado para analizar el trabajo de los estudiantes dentro del campo de experiencia de las transformaciones geométricas. El modelo presenta una alternativa interesante para estudiar con más detalle el proceso de internalización[10] de objetos y procesos geométricos a partir de la utilización de las herramientas o artefactos culturales por los estudiantes. Suponemos que este proceso genera, en el contexto interno de cada participante, signos o instrumentos de mediación semiótica, dándoles la oportunidad de avanzar en sus propios procesos de validación matemática. Suponemos también que el desarrollo de un campo de experiencia de las transformaciones geométricas facilitará, en el desempeño de los estudiantes, el desarrollo de procesos de conjetura, argumentación y prueba, en los que los elementos y los

[10] Respecto al posible conflicto del esquema de Sfard, apoyado en la noción piagetiana de interiorización, con la noción de internalización que corresponde propiamente al marco de la psicología vyvotskyana, y que hemos adoptado también en este trabajo, presentamos una discusión en el apartado 2.5.5.

invariantes característicos de cada transformación puedan ayudarles a formular argumentos o justificaciones relativas a sus propias afirmaciones.

2.4. Racionalidad matemática

Esta discusión se circunscribe dentro del contexto amplio que representa la investigación en torno a los aspectos didácticos y epistemológicos de la prueba o la justificación matemática, dado que al hablar en este documento de racionalidad matemática se está haciendo referencia al desarrollo de capacidades intelectuales para establecer y para comunicar la certeza o la validez de una proposición matemática.

Un aspecto que da cuenta de un aprendizaje significativo de matemáticas es el que se refiere a la justificación de los conocimientos y de las afirmaciones que van conformando ese proceso, la justificación confiere certidumbre y validez a tales conocimientos. Académicamente, la justificación se establece de manera plena mediante la demostración, y si bien nunca ha existido un conjunto único de criterios universalmente aceptados para establecer la validez de una demostración (Hanna y Jahnke, 1996), las comunidades matemáticas profesionales llegan a acordar criterios que les permiten definir lo que constituye una prueba matemática válida (Díaz Godino y Recio, 1997).

Si bien en el ámbito escolar, dependiendo del nivel y de los objetivos curriculares, se recurre en mayor o menor grado a la prueba deductiva, la justificación parece responder frecuentemente a criterios de autoridad, esencialmente la del maestro (Ernest, 1998), o bien a un tipo de plausibilidad empírica (Voigt, 1994), otorgando poca atención a otras alternativas que podrían dirigirse a la comprensión profunda y a la certidumbre de la validez matemática de una afirmación o de un resultado, y que podrían estimular de manera importante el desarrollo de una racionalidad matemática que pueda ser comunicada y compartida, ejemplos de estas posibles alternativas son: el *razonamiento transformacional*, como una forma de razonamiento que no se ajusta completamente a las formas de razonamiento matemático “típicas”, en Simon (1996); los “momentos mágicos” o de comprensión profunda, cuando la actividad en el salón de clases lleva a los estudiantes a integrase en una comunidad de investigación, en Barnes (2000); o los hallazgos de Cobo y Fortuny (2000) en relación a la influencia de la interacción entre estudiantes en su desarrollo cognitivo al resolver problemas de comparación de áreas. Para Voigt (1994) una parte esencial de la formación matemática escolar deberá atender el desarrollo de los estudiantes en la transición de un tipo de racionalidad empírica, sustentada en la constatación ostensiva de alguna propiedad, alguna afirmación o algún hecho matemático, a una racionalidad matemática, es decir, un tipo de racionalidad teórica:

> Aunque la plausibilidad empírica puede representar razones matemáticas intrínsecas, los estudiantes deben llegar a familiarizarse con la racionalidad matemática. Por lo tanto el maestro debe asegurar que los estudiantes no restrinjan su pensamiento a la evidencia empírica que es obvia para ellos. A través de los procesos de negociación de lo que cuenta como una razón, el maestro puede estimular a los estudiantes a desarrollar un significado del razonamiento teórico aún si las razones empíricas son convincentes y parecen ser suficientes. (Voigt, 1994, p. 280).

La justificación matemática en el salón de clases es motivo de investigación desde diversos enfoques, algunos de éstos serán revisados en los siguientes apartados.

2.4.1. El nivel de comprensión-conceptualización de lo que significa una explicación y una justificación matemática aceptable

Visto como un acto comunicativo, la explicación tiene como su propósito clarificar aspectos del propio pensamiento que podrían no ser claros para otros. Consecuentemente lo que se ofrece como una explicación es relativo a lo que se percibe como las expectativas de los otros. Yackel y Cobb (1996) distinguen tres diferentes niveles en el entendimiento de los estudiantes de lo que es una explicación aceptable relativa a un resultado o a una afirmación matemática:

- *Un fundamento matemático para las explicaciones.* En el primer nivel, las explicaciones pueden tener un fundamento social más que matemático. Los estudiantes acostumbrados a confiar en razones basadas en la autoridad, al iniciar su experiencia en un tipo de instrucción basada en la indagación, tienen pocos fundamentos para saber que tipos de razones pueden ser aceptables, este problema no es trivial y frecuentemente un estudiante puede recurrir a algún tipo de estatus (social, convencional o de otro tipo) para justificar su respuesta.

- *Las explicaciones como descripciones de acciones sobre objetos matemáticos experiencialmente reales.* En el segundo nivel, los estudiantes son capaces de transformar explicaciones de naturaleza procedimental, surgidas en la interacción en la clase, en explicaciones conceptuales sobre objetos matemáticos percibidos significativamente y no sólo como meros símbolos. Estas transformaciones inician como desafíos a las explicaciones dadas por los otros y dan pie a la negociación de lo que es aceptable como una explicación matemática. Una norma socio-matemática importante que surge en la actividad en el aula en un ambiente de indagación es que las explicaciones deben describir acciones sobre los objetos matemáticos. Este tipo de acuerdos evolucionan en el transcurso del periodo escolar.

- *Las explicaciones como objetos de reflexión.* Cuando los estudiantes comienzan a considerar que tan adecuada es una explicación para los otros miembros de la comunidad, más que para sí mismos, la explicación llega a ser en sí misma el objeto del discurso. En la misma forma en que ser capaces de ver una entidad matemática como objeto y como proceso indica un entendimiento más profundo de ella, tomar una explicación como objeto de reflexión indica un entendimiento más profundo de lo que constituye la explicación.

Para Yackel y Cobb (1996), un aspecto esencial de la evolución de las explicaciones y de las justificaciones que los estudiantes pueden producir y aceptar está en las normas socio-matemáticas que se constituyen como aspectos intrínsecos de la micro-cultura del salón de clases de matemáticas y que tratan con las cualidades matemáticas de las soluciones: similitudes, diferencias, sofisticación y eficiencia, además de las formas de juicio que dan cuenta de la pertinencia de un explicación matemática. Lo que llega a ser matemáticamente normativo en el salón de clases está constreñido por las metas, creencias, suposiciones y asunciones de los participantes. Al mismo tiempo estas metas y entendimientos ampliamente implícitos están influenciados por lo que se ha legitimizado como una actividad matemática aceptable. Las normas sociales y socio-matemáticas que se relacionan a la explicación y la justificación incluyen que los estudiantes expliquen y justifiquen su pensamiento, que ellos escuchen e intenten dar sentido a las explicaciones de los otros, y que las explicaciones describan acciones sobre objetos que sean experiencialmente reales para ellos.

Estos entendimientos normativos son continuamente regenerados y modificados por estudiantes y maestro a través de sus interacciones continuas. El desarrollo de ésta base común para la comunicación matemática, estimula el desarrollo de procesos de argumentación de nivel superior. De manera recíproca, el enriquecimiento de los procesos argumentativos amplía y estructura la base común para la comunicación. Metodológicamente, tanto las normas sociales en general como las normas socio-matemáticas se infieren al identificar regularidades en los patrones de interacción social.

2.4.2. La prueba en la clase de matemáticas

Siguiendo la propuesta de Balacheff (1987), una explicación es un discurso con el que el sujeto trata de hacer entendible el carácter de verdad de una proposición o de un resultado. Una prueba es una explicación aceptada por una comunidad dada en un momento dado. Mientras que una demostración es un tipo de prueba aceptada en el seno de la comunidad matemática. La palabra *razonamiento* designa "…la actividad intelectual, la mayor parte del tiempo no explícita, que consiste en la manipulación de informaciones para producir, a partir de datos, nuevas informaciones." (Balacheff, 1987, p. 148). Existen, entonces, diferentes tipos de racionalidad (véase el apartado 2.1.1. de este documento) que los propios estudiantes ponen en juego para validar afirmaciones matemáticas, estos diferentes tipos de racionalidad muestran formas de entendimiento de las relaciones matemáticas involucradas y niveles de desarrollo de sus capacidades para enfrentar situaciones de validación.

Herbst (2000) propone considerar el salón de clase de matemáticas como un sitio cognitivo: "Una clase de ecosistema que produce sus propios objetos de conocimiento y, uno esperaría, sus propios códigos de comunicación, formas sustanciales de argumentación, teorías nativas, y dispositivos de inscripción y memoria." (p. 2). Así, las pruebas matemáticas puestas en marcha en la clase están condicionadas tanto por la cognición de los sujetos involucrados, como por la estructura del conocimiento a ser enseñado, pero son irreducibles a cualquiera de esos factores. Desde esta perspectiva, la prueba puede constituirse en:

> Una herramienta prospectiva y retrospectiva para el control público de la producción de conocimiento: Lo que cuenta como prueba depende de lo que está siendo (y es) hecho y conocido en varios niveles de actividad cognitiva (problemas, proposiciones, modelos y teorías)... El reconocimiento de las condiciones bajo las cuales una afirmación es formulada y de la validez de su "prueba" depende de las concepciones que se estén manejando y de las que se mantengan al margen. (Ibíd. p. 4)

La relación entre validación y prueba se plantea entonces en términos de una dinámica de desarrollo del conocimiento matemático, en la que existe una concepción "situacional" de la prueba de manera que tal concepción está en función de las posibilidades y las capacidades de los estudiantes[11]. La prueba como medio de validación tendrá un sentido convencional y cultural referido

[11] Freudenthal (1973) había ya considerado la existencia de diferentes niveles de rigor en las pruebas, tanto en el desarrollo histórico de las matemáticas, como en el desarrollo individual de los estudiantes de matemáticas.

específicamente a la comunidad de aprendizaje en la que surge. Sin embargo, el significado del conocimiento matemático elaborado necesariamente debe estar coordinado con el significado institucionalizado, la prueba constituye un medio por el cual esta coordinación entre significados avanza.

Esta postura ante el significado de la prueba tiene sustento también en el quehacer matemático profesional, como lo indica la aseveración de Polya:

> El resultado del trabajo creativo del matemático es el razonamiento demostrativo, una prueba, pero la prueba es descubierta por razonamiento plausible, por conjetura o suposición... si el aprendizaje de matemáticas tiene algo que ver con el descubrimiento de matemáticas, al estudiante se le debe dar la oportunidad de hacer problemas en los cuales primero conjeture y después pruebe algún hecho matemático en un nivel apropiado." (Citado en Schoenfeld, 1992, p. 339).

Aquí también es patente la importancia de considerar diferentes niveles o estados de prueba, en términos de los recursos cognitivos, lingüísticos y experienciales, de que disponen los estudiantes en una situación específica. Citando nuevamente a Balacheff (1987), podríamos hablar de manera general de procesos de validación, como "…la elaboración de pruebas en todos los ordenes." (p. 151).

Se trata entonces de enfocar nuestra investigación hacia el desempeño de los estudiantes en el nivel de validación que se centra en la fundamentación de los hechos matemáticos, es decir, un nivel de validación en el que se busca dar respuestas matemáticas o teóricas a la pregunta *¿Por qué es un hecho cierto?*, el cual se distingue, según Mariotti et al. (1997), de un primer nivel en el que se busca sólo constatar la certeza de un hecho matemático, y de un tercer nivel referido al de la construcción de pruebas formales, separadas de la semántica de la proposición matemática en juego. Así, antes que pretender que los estudiantes elaboren pruebas matemáticas formales, se considera necesario que ellos se involucren en una actividad matemática de indagación y de elaboración de conjeturas y que generen argumentos que correspondan con una racionalidad matemática, argumentos que prefiguren un razonamiento teórico, con la cual sea posible justificar la validez de una solución o de una aseveración matemática dentro de una teoría de referencia.

2.4.3. Racionalidad matemática en ambientes de aprendizaje enriquecidos

Una forma plausible de alentar el desarrollo de una racionalidad matemática es la de enriquecer la experiencia matemática de los estudiantes (Hershkowitz y Schwarz, 1999; Balacheff y Kaput, 1996). La característica esencial de un ambiente de aprendizaje enriquecido es la disponibilidad de recursos que proveen de diversas representaciones matemáticas referidas a un mismo concepto, o bien a una clase de conceptos, y que estimulan su propia integración semiótica. Otro aspecto destacable de la utilización de artefactos culturales y herramientas computacionales es que "…éstos permiten el establecimiento de prácticas y bases compartidas para la comunicación matemática en las explicaciones y las justificaciones" (Hershkowitz y Schwarz, 1999, p. 151). Esta idea también tiene relación con la didáctica de las ciencias experimentales, en la que se recurre a introducir a los estudiantes en las etapas fundamentales del método científico (observar, experimentar, inferir o hipotetizar, verificar y validar) como una parte sustancial del aprendizaje. Si bien no se pretende proponer que la matemática como ciencia funcione de idéntica manera que las ciencias experimentales, sí se trata de hacer énfasis en el carácter experimental que la matemática puede tener, sobre todo cuando se dispone de recursos o medios para el aprendizaje que permiten explorar nociones, relaciones y propiedades. Esta intención de explotar experimentalmente las matemáticas tiene por objetivo que los estudiantes descubran patrones o invariantes, algo que se considera parte esencial de lo que significa hacer matemáticas (Souviney, 1989; Schoenfeld, 1992), con la finalidad (en nuestro caso) de que se involucren en situaciones de validación. Desde esta perspectiva, el proceso de avanzar en la elaboración de una prueba tiene el papel principal de profundizar la comprensión de las nociones y las propiedades matemáticas en juego, así como la de fundamentar los resultados y las afirmaciones producidas. Se trata de aprovechar la contribución más significativa de la prueba a la formación matemática de los estudiantes, que es la comunicación del entendimiento matemático (Hanna y Jahnke, 1996; De Villiers, 1998).

En particular, los recursos utilizados en nuestro proyecto de investigación consisten en *artefactos culturales* (Hoyos, 2003-b; Mariotti, 2002) considerados como herramientas de aprendizaje o *herramientas instruccionales* (Meira, 1998) por medio de las cuales es posible indagar las propiedades matemáticas que definen a las transformaciones geométricas elementales. El software de geometría dinámica Cabri permite construir las transformaciones geométricas de diversos objetos y asociar a los elementos geométricos involucrados una terminología funcional. A su vez, las máquinas matemáticas articuladas o pantógrafos para las transformaciones geométricas funcionan bajo los principios teóricos de éstas, proporcionando un medio material en el que es posible indagar acerca de esos principios o relacionarlos con las propiedades métricas y mecánicas de las máquinas mismas.

2.4.4. Unidad cognitiva de un teorema

En investigaciones enfocadas a determinar los límites y los alcances de la enseñanza y el aprendizaje de la prueba se ha hecho patente la importancia del involucramiento de los estudiantes en dos etapas de un solo proceso, que en el tratamiento tradicional de este aspecto del currículo comúnmente quedan aislados (o bien el proceso mismo queda incompleto): la producción de una conjetura y la construcción de una prueba. Existen investigaciones (Mariotti et al., 1997, Garuti et al., 1998) que muestran la importancia del establecimiento intencional y conciente de vínculos entre los argumentos con los que se trata de dar plausibilidad a una conjetura matemática, obtenida mediante exploración y experimentación dinámica de la situación bajo estudio, y los argumentos o las justificaciones que conducen a fundamentar mediante un tipo de razonamiento teórico la validez o la certeza de esa conjetura, convertida así en una afirmación matemática. Este proceso requiere además, como las investigaciones mismas lo enfatizan, de una teoría matemática de referencia que sustente las argumentaciones externadas.

La noción de *unidad cognitiva de un teorema* fue propuesta inicialmente por Boero et al. (1996) como una hipótesis de trabajo que permitiera esclarecer aspectos didácticos referidos a la posible continuidad cognitiva entre el proceso de producción de la afirmación y el proceso de prueba: “Un rasgo característico de la producción de teoremas es la amalgama entre el enfoque progresivo de la afirmación y la actividad argumentativa dirigida a justificar su plausibilidad.” (Boero et al., 1996, p. 114). Esto no sólo es observable entre los matemáticos profesionales y a través del desarrollo histórico de las matemáticas, sino también entre los estudiantes.

> La producción de una hipótesis o una conjetura consiste de una selección argumentada (instada por un cuestionamiento hecho por el estudiante mismo o por otros) entre posibles alternativas con un margen de incertidumbre, así como de su validez, que puede ser resuelta a través de un razonamiento sistemáticamente organizado o de un contraejemplo (verificación de la hipótesis). (Ídem.)

Para este grupo de investigadores ha sido posible constatar que los estudiantes recurren a los argumentos presentados para convencer de la plausibilidad de un resultado o de una conjetura con la finalidad de elaborar una prueba matemática de esa conjetura en una fase posterior. Para fines de investigación, La unidad cognitiva de un teorema ha sido formulada de la siguiente manera:

> Durante la producción de la conjetura, el (la) estudiante progresivamente resuelve su aseveración a través de una actividad argumentativa intensa funcionalmente entremezclada con la justificación de la plausibilidad de la alternativa seleccionada. Durante la etapa subsecuente de prueba de la afirmación, el (la) estudiante se involucra en este proceso de manera

> coherente, organizando algunos de los argumentos previamente producidos de acuerdo con una cadena lógica. (Garuti et al., 1998, p. 1)

Uno de los resultados relevantes de estas investigaciones es que en efecto es posible constatar la existencia de una unidad cognitiva en el proceso de elaborar pruebas matemáticas, algo que está confirmado en el caso en el que a los estudiantes se les da la instrucción de probar una afirmación sin que hayan tenido oportunidad de construirla por ellos mismos, sino que se les presenta como una afirmación acabada. En esta situación:

> La unidad solamente puede ser reconstruida por la re-apropiación de la afirmación a través de un nuevo proceso de exploración, es decir, la reconstrucción del ciclo total: explorar, producir una conjetura, regresar a la exploración, reorganizarla dentro de una prueba. (Ídem.)

Se tiene entonces que un condición necesaria para que los estudiantes se involucren en la construcción de pruebas matemáticas es la de fomentar y mantener esa unidad cognitiva entre las dos etapas que con más claridad se podrían diferenciar en el proceso, la de generar conjeturas y la de elaborar pruebas.

Es importante destacar dos aspectos dentro de la perspectiva de la prueba matemática que la unidad cognitiva genera. Por una parte, para que esta actividad argumentativa genere resultados significativos, se requiere el desarrollo de un *campo de experiencia* (apartados 2.1.2. y 2.1.2.1. de esta tesis) común a quienes argumentan, es decir, quienes participan necesitan disponer de vínculos y de recursos cognitivos y de comunicación apropiados. Es seguramente por esto que los estudios realizados en esta línea se enfocan a explotar la unidad cognitiva de teoremas dentro de campos de experiencia matemática definidos, tales como la representación del espacio visible por medio de la perspectiva geométrica, las sombras, la antropometría y las construcciones geométricas en ambiente Cabri (Mariotti, et al., 1997). Por otra parte, es necesario también que quienes participan dispongan de una teoría matemática de referencia. Es plausible que la coordinación entre la experiencia matemática compartida y la teoría matemática disponible posibiliten un desempeño favorable de los estudiantes involucrados en situaciones de validación. Estas consideraciones nos llevan a plantear preguntas como las siguientes:

- ¿Otros dominios de la geometría euclidiana, como el de las transformaciones geométricas, pueden constituir un campo de experiencia adecuado para el involucramiento de los estudiantes en la unidad cognitiva de teoremas?, y si es así: ¿Cómo emplean los estudiantes las herramientas de que disponen (el contexto externo del campo de experiencia) para construir un teorema y una teoría de referencia para avanzar en sus procesos de prueba?

La noción de unidad cognitiva de un teorema ha evolucionado desde una hipótesis de trabajo, en el sentido de las condiciones necesarias (aunque no por ello suficientes) para que los estudiantes se ocupen legítimamente de elaborar argumentaciones y justificaciones de resultados matemáticos por ellos obtenidos, hacia una herramienta de investigación con la cual es posible predecir e interpretar las dificultades que los estudiantes enfrentan en el proceso de construir una prueba matemática. El mismo equipo de investigadores (Garuti, et al., 1998) señala que de esta manera es posible estimar la distancia entre los argumentos que los estudiantes producen y los argumentos necesarios para construir una prueba:

> Definimos como la separación entre la exploración de la afirmación y el proceso de prueba a la distancia entre los argumentos para dar plausibilidad a la conjetura, producidos durante la exploración de ésta, y los argumentos los cuales pueden ser explotados durante el proceso de prueba.” (p. 3)

Este grupo de investigadores trabaja con la hipótesis de que tal separación puede ser reducida mediante transformaciones adecuadas de la afirmación producida, de la forma en que se explora la situación o de la teoría de referencia. En este sentido, Bartolini (2000) propone tres condiciones necesarias para poder afirmar que los estudiantes estén inmersos en una actividad acorde con la unidad cognitiva de un teorema:

> - A los estudiantes se les pide producir una conjetura (no se les da una ya elaborada);
> - A los estudiantes se les pide argumentar a favor de su conjetura apoyándose en lo que ellos saben;
> - Se espera que la distancia entre los argumentos producidos por los estudiantes y la demostración rigurosa dentro de una teoría de referencia sea corta. (Bartolini, 2000, p. 2)

En relación al tercer aspecto señalado, esta autora considera que la teoría de referencia establece lo que se postula en el salón de clases y cuales son las reglas de razonamiento, sin embargo, llevar el conjunto de argumentos a una cadena lógica es un asunto de construcción social bajo la guía cultural del maestro, por medio de guiones de prueba introducidos en el aula.

Puede decirse, entonces, que la unidad cognitiva de teoremas ha sido empleada con la intención de aproximar a los estudiantes a la prueba matemática de manera holística, esto es, que los estudiantes generen conjeturas mediante la exploración y la experimentación dinámica de situaciones potencialmente productoras de teoremas o de resultados matemáticos, que argumenten a favor de esas conjeturas y que se establezca la plausibilidad de las conjeturas confrontando y discutiendo los argumentos presentados; de tal manera que ellos estén en condiciones de participar en la elaboración de pruebas.

2.4.5. Cierre

Parece cada vez más importante para la formación matemática reconocer que el razonamiento matemático no se limita a los razonamientos inductivo y deductivo. Por el contrario, resulta pertinente asumir otras formas de tratamiento o de aproximación a las proposiciones matemáticas para desarrollar en los estudiantes medios autónomos de descubrimiento y de prueba. La prueba, como una forma primordial de racionalidad matemática, debe ser considerada de manera dinámica, desde esta visión se espera que el significado y el contenido mismo de la prueba cambien en función de las nuevas capacidades y los nuevos entendimientos matemáticos obtenidos. Una alternativa viable a esta aproximación la constituye el desarrollo de campos de experiencia, con la finalidad de promover la evolución de los contextos internos de los estudiantes en la medida en que ellos se involucran en el campo y pueden establecer relaciones teóricas entre los hechos matemáticos propios de éste; hechos matemáticos que son reconocidos y confirmados por medio de exploración dinámica. La unidad cognitiva de un teorema llama la atención hacia el importante hecho de que los propios estudiantes construyan la proposición a ser demostrada; es necesario que los estudiantes participen en los procesos de formular conjeturas y elaborar argumentos para hacerlas plausibles, como un paso previo a la elaboración de una justificación matemática.

En este proyecto de investigación se ha considerado pertinente llevar a los estudiantes a escenarios en los que este tipo de actividad matemática pueda ser llevada a cabo de manera eficiente, en otras palabras, se asume que la indagación guiada de las propiedades matemáticas que los artefactos culturales poseen o de las que su utilización hace sensibles, constituye una forma adecuada para promover el involucramiento de los estudiantes en la unidad cognitiva de teoremas.

2.5. Mediación semiótica

De acuerdo con Mariotti (2002), el análisis histórico y epistemológico confirma que el desarrollo del conocimiento matemático está basado en una dialéctica productiva entre teoría y práctica de manera que una y otra se impulsan mutuamente; un elemento clave de esta relación dialéctica está representado por los artefactos. Los artefactos concebidos para ser usados con el objetivo de lograr una meta específica (referidos usualmente como artefactos técnicos) incorporan un conocimiento teórico para asegurar su correcto funcionamiento (p. 705). Un ejemplo de esto lo encontramos en el trabajo de Kempe (1877) con el cual fundamenta el funcionamiento del Inversor de Peaucellier, un eslabonamiento mecánico originalmente creado para transformar movimiento circular en movimiento rectilíneo y viceversa.

Cuando una discusión se enfoca en una herramienta técnica o tecnológica, es importante considerar la relación entre cómo fue concebida y construida y cómo fue utilizada, entre el conocimiento incorporado en ella y los esquemas de utilización del usuario. Una perspectiva educativa también requiere que se considere la relación entre los significados que emergen del uso de la herramienta y los significados que son culturalmente reconocibles como matemáticos. Mariotti señala dos niveles esenciales en cuanto a la función cognitiva de las herramientas: El sujeto desarrolla esquemas de utilización potenciales, y entonces la herramienta se transforma en un instrumento que puede apoyar la construcción de significados relativos a esos esquemas de utilización; por otro lado la herramienta, actuando como un mediador entre aprendices y maestro, puede ser usada por éste para explotar estrategias de comunicación dirigidas a guiar la evolución de significados dentro de la comunidad de la clase. Esto es, la herramienta funciona como un *mediador semiótico* (Mariotti, 2002). Ambas funciones pueden estar entrelazadas en la actividad en el aula, sobre todo si tal actividad se concibe con ese fin.

2.5.1. Noción de mediación semiótica

La noción de mediación semiótica adquiere importancia en la investigación educativa puesto que permite enfocar los procesos de construcción de significados, o de hacer sentido, a partir del análisis de la interacción con herramientas o artefactos y de la interacción social y la comunicación como promotores de la aprehensión de objetos abstractos. Este enfoque está sintetizado en la siguiente cita:

> El aprendizaje no se basa en una relación individual inmediata a la realidad sino más bien en la mediación (Vygotsky 1978) entre individuos y objetos, llevada a cabo por medio de los artefactos –sean herramientas o sistemas simbólicos– creados por los seres humanos a lo largo de su desarrollo. (Bartolini, 1993, p. 99)

Para Wertsch (1995, p. 32), el núcleo del enfoque teórico de Vygotsky está constituido por tres temas:

1) la creencia en el método genético o evolutivo [entendiendo el término con relación a los procesos de desarrollo, tanto individual como social];

2) la tesis de que los procesos psicológicos superiores tienen su origen en procesos sociales, y

3) la tesis de que los procesos psicológicos pueden entenderse solamente mediante la comprensión de los instrumentos y signos que actúan de mediadores.

Wertsch sostiene que la noción de mediación de signos e instrumentos es analíticamente superior a los otros dos aspectos, dado que "…los argumentos de Vygotsky sobre la mediación pueden entenderse por sí mismos, mientras que muchos aspectos importantes de los otros dos temas solamente pueden entenderse a través del concepto de mediación." (p. 33). Wertsch también se refiere a la evolución en el pensamiento de Vygotsky con respecto a la mediación; en ésta, el concepto pavloviano de "estímulo-medio" es reemplazado por el concepto de *signo*, utilizado en el sentido de poseedor de significado. Así, la mediación es semiótica o está semióticamente orientada, en la medida en que favorece la construcción de significados.

Influenciado por los planteamientos de Engels y de Marx respecto al papel de la actividad laboral para el desarrollo de la conciencia desde la perspectiva histórico-social, Vygotsky puso especial interés en el papel que los instrumentos tienen en ese proceso, distinguiendo entre la mediación ejercida por las herramientas físicas que sirven como conductores de la influencia humana sobre el objeto de su actividad y la mediación ejercida por las herramientas psicológicas, constituidas por signos que sirven para influir psicológicamente en la conducta, tanto si se trata de la conducta de otros como de la propia. A medida que enfatizaba la naturaleza significativa y comunicativa de los signos, Vygotsky llegó a afirmar que:

> Lo siguiente puede servir como ejemplo de herramientas psicológicas y de sus sistemas complejos: el lenguaje; varios sistemas para contar; técnicas mnemónicas; sistemas de símbolos algebraicos; trabajos sobre arte; escritos; esquemas, diagramas, mapas y dibujos mecánicos; todo tipo de signos convencionales, etc. (citado en Wertsch, 1995, p. 94).

Desde esta perspectiva, las herramientas psicológicas poseen dos características primordiales:

1. "…por el hecho de estar incluidas en el proceso de conducta, alteran por completo el flujo y la estructura de las funciones psicológicas. Esto se debe a que determinan la estructura de un nuevo acto instrumental, del mismo modo que una herramienta técnica altera el proceso de una adaptación natural al determinar la forma de las operaciones de trabajo" (ídem.) Las herramientas psicológicas no son medios auxiliares que simplemente faciliten una función psicológica existente dejándola cualitativamente inalterada, al contrario se resalta su capacidad para alterar el funcionamiento mental.

2. "Por su naturaleza son sociales, no orgánicas o individuales" (citado en Wertsch, 1995, p. 96), en el sentido en que son el producto de la evolución sociocultural, los individuos tiene acceso a las herramientas psicológicas por el hecho de formar parte de un medio sociocultural, y también en el sentido del "…fenómeno social más "localizado" de la comunicación frente a frente y la interacción social" (Wertsch, 1995, p. 96); lo cual muestra con mayor claridad el significado que los signos tenían para Vygotsky: "un signo es siempre, originalmente, un instrumento usado para fines sociales, un instrumento para

influir en los demás, y sólo más tarde se convierte en un instrumento para influir en uno mismo” (citado en Wertsch, 1995, p. 96)

Es importante también señalar que el desarrollo era considerado por Vygotsky “en términos de transformaciones cualitativas fundamentales o <<revoluciones>> asociadas a cambios en las herramientas psicológicas” (citado en Wertsch, 1995, p. 94), es decir, las formas de mediación (los signos y los significados atribuidos a éstos) definen niveles de desarrollo, algo también asumido actualmente por otras teorías del desarrollo cognitivo. Desde la perspectiva educativa, particularmente en lo que se refiere al aprendizaje de matemáticas, se ha planteado entonces una importante cuestión que podría sintetizarse de la siguiente manera:

¿Cómo actúa la utilización de herramientas físicas o artefactos culturales en la apropiación o la construcción de herramientas psicológicas?

Esta pregunta sugiere tratar de identificar o de proponer algún mecanismo específico de mediación semiótica. En el siguiente apartado se presentan argumentos para avanzar en una posible respuesta a esta cuestión o en un acotamiento de la misma.

2.5.2. La emergencia de instrumentos de mediación semiótica a partir del empleo de artefactos culturales. El proceso de internalización

Las teorías socioculturales localizan el origen del desarrollo conceptual en los procesos sociales y ven las herramientas culturales y los sistemas de signos como constitutivos del desarrollo. Siguiendo a Vygotsky, las herramientas culturales y los sistemas de signos no llevan su significado a los sujetos, sino que las herramientas culturales derivan su significado de la actividad constructiva que la persona (o el grupo social) lleva a cabo con ellas; el desarrollo es por lo tanto visto como un proceso ampliamente artificial en el que la adquisición de instrumentos juega un papel principal. Mariotti (2002) se refiere a la evolución de nuestro sistema de notación numérica a partir del ábaco, como un artefacto que preserva rasgos del proceso de conteo:

> La evolución de los esquemas de utilización [relativos al ábaco] transforma la relación entre el objeto (artefacto) y el usuario, y un proceso de instrumentación tiene lugar. Subsecuentemente ocurre un cambio desde un medio gestual en el cual ciertos movimientos físicos [en el artefacto-ábaco] están relacionados con un [nuevo] aparato externo, un medio gráfico, es decir, el sistema de notación… Aunque ciertos aspectos del origen externo se conservan, los nuevos signos se convierten en parte de un sistema con reglas independientes. El medio gráfico gana entonces autonomía; sin referencia alguna al ábaco… (p. 707)

Este medio permite construir nuevos significados, abordar nuevos problemas, construir nuevas teorías. También para Verillon y Rabardel (1995) es importante enfatizar la diferencia entre el artefacto como un medio material hecho por el hombre y el instrumento como un constructo psicológico. El artefacto llega a ser un instrumento cuando el sujeto ha sido capaz de apropiárselo por sí mismo -ha sido capaz de subordinarlo como un medio para sus fines- y lo ha integrado a su actividad. Por lo tanto, un instrumento resulta del establecimiento, por el sujeto, de una relación instrumental con un artefacto, ya sea material o no, ya sea producido por otros o por él mismo. A su vez, el desarrollo está condicionado cualitativamente por el tipo de procesos que el sujeto realiza con los instrumentos de los que se apropia:

> No es tanto el instrumento como tal el que determina la evolución, sino la reorganización funcional y la redistribución que su adquisición y uso impone sobre el mecanismo innato en diferentes niveles: sensorio-motriz, perceptivo-mnemónico, representacional, etc.” (Verillon y Rabardel, 1995, p.82).

En diversos trabajos de investigación se ha explorado la posibilidad de generar, en el contexto interno de los sujetos, herramientas psicológicas a partir de la utilización de herramientas materiales en el contexto definido por una temática y por una actividad específica a ésta y previamente diseñada. Por una parte, las herramientas físicas están orientadas externamente, dirigidas a lograr una acción, por otra parte, están orientadas también internamente, dirigidas a controlar la acción. El término herramienta psicológica también enlaza la herramienta específica y su uso orientado externamente a su contraparte interna. Para Mariotti (2002): “El proceso de internalización tal como es descrito por Vygotsky, puede transformar herramientas en signos cuando una herramienta orientada internamente llega a ser una herramienta psicológica y define nuevos significados.” (p. 706). Esta investigadora considera que la *internalización* es un proceso complejo en el que se integran varios aspectos uno de los cuales consiste en la *génesis instrumental*, esto es, la coordinación que logra hacer el usuario de diferentes esquemas de utilización referidos a una herramienta en particular.

Por su parte, Bartolini (2000) señala que una herramienta pasa de ser una herramienta técnica a ser una herramienta psicológica, es decir, un instrumento de mediación semiótica, cuando su utilización tiene un carácter teórico. Esta investigadora ha observado situaciones en las que los estudiantes transitan de un uso práctico de una herramienta técnica (específicamente un compás de geometría) hacia un uso teórico de ésta, en el cual la herramienta “…llega a ser un instrumento de mediación semiótica (Vygotski, 1978), que puede controlar –desde el exterior– el proceso de solución de un problema por un alumno…” (p. 5). El alumno genera una estrategia que puede ser usada en cualquier situación, puede producir y justificar las condiciones de posibilidad en el caso general y puede ser defendida mediante argumentaciones en referencia a la teoría aceptada, constituyéndose, así, en una verdadera herramienta del pensamiento. La aprehensión de un significado poderoso (quizá el significado de circunferencia como lugar geométrico, en el caso de estudio de Bartolini) atribuido a la herramienta física, lleva a los estudiantes a “tomar distancia de los hechos empíricos, transformando la evidencia empírica del dibujo que representa una solución... en la representación externa de un proceso mental.” (ídem.). También Crawford (1996), se refiere a esta clase de proceso cognitivo al señalar que la internalización genera una imagen subjetiva que, a partir de ese momento, conduce la actividad intelectual con preeminencia sobre el objeto concreto.

Para Davydov (citado en Crawford, 1996), la dinámica de la internalización opera en dos etapas.

> Primero, en el proceso de internalización no sólo hay una transición desde el plano externo al plano interno, sino también una transición desde la actividad colectiva a la actividad individual, la actividad colectiva tiene lugar como actividad práctica conjunta y en la forma de comunicación y lenguaje. Segundo, la internalización no consiste en un cambio de la actividad externa al plano interno de conciencia… sino en la verdadera formación de ese plano. (p.137).

Otro de los psicólogos de la escuela rusa que ha profundizado en el estudio de la internalización es Galperin (citado en Wertsch, 1995, p. 82), quien define tres estadios implicados en el proceso:

1) convertir una acción externa en lo más explícita posible;

2) transferir su representación a discurso audible, primero en el plano interpsicológico y luego en el intrapsicológico;

3) transferirlo al discurso interno.

A juicio de Wertsch (1995, p. 83), la concepción de Vygotsky con respecto a la internalización se fundamenta en cuatro puntos básicos:

1) la internalización no es un proceso de copia de la realidad externa en un plano interior ya existente; es más, es un proceso en cuyo seno se desarrolla un plano interno de la conciencia;

2) la realidad externa es de naturaleza social-transaccional;

3) el mecanismo específico de funcionamiento es el dominio de las formas semióticas externas;

4) el plano interno de la conciencia, debido a sus orígenes, es de naturaleza <<cuasi-social>>.

Estas precisiones con respecto al proceso de internalización permiten acotar más la pregunta presentada en la parte final del apartado anterior:

¿Cómo se logra el dominio de las formas semióticas externas? o ¿Es posible distinguir un proceso referido a esta apropiación?

Es importante señalar que consideramos en nuestro trabajo como formas semióticas externas a lo que forma parte del contexto externo de un campo de experiencia.

De los anteriores señalamientos acerca de la internalización, consideramos adecuado destacar lo siguiente:

a) Es fundamental que tenga lugar una práctica común en la que se genere una actividad colectiva.
b) La conversión de acciones en discurso, la explicitación de las formas en que se emplea la herramienta, es otra condición necesaria para la internalización.
c) El dominio de las formas semióticas externas, o “el control voluntario sobre los signos en el plano intrapsicológico” (Wertsch, 1995, p. 81), constituye el mecanismo esencial del proceso.
d) La internalización genera una imagen subjetiva que, a partir de ese momento, conduce la actividad intelectual con preeminencia sobre el objeto concreto.

Estas condiciones, relativas a la internalización, se consideran parte importante de lo que constituyen elementos teóricos y metodológicos para el desarrollo de la parte empírica de nuestra tesis y para el análisis y la discusión de los datos obtenidos.

- Dos enfoques de la internalización

Según Wertsch (1995, pp. 78-79), Vygotsky, como Piaget, concebía la internalización como un proceso donde ciertos aspectos de la estructura de la actividad que se ha realizado en un plano externo pasan a ejecutarse en un plano interno. Sin embargo, sus intereses personales llevaron a estos investigadores a enfatizar aspectos distintos del mismo proceso. Mientras que para Vygotsky la actividad externa estaba definida en términos de procesos sociales mediatizados semióticamente y argumentaba que las propiedades de esos procesos proporcionan la clave para entender el funcionamiento interno; el énfasis de Piaget en la interacción del niño pequeño con la realidad física lo llevó a examinar los sistemas de representación necesarios para la manipulación de objetos, así, Piaget concebía la internalización básicamente en términos de esquemas que reflejan las regularidades de la acción física de los individuos.

También Waschescio (1998) hace una discusión interesante acerca de la internalización como parte sustancial de la forma en que se explica el desarrollo conceptual, tanto desde el punto de vista de la teoría de Piaget, como de la de Vygotsky. Para Waschescio, la teoría de Piaget es dialéctica por naturaleza: "las estructuras internas individuales se desarrollan como resultado de una interacción entre el sujeto cognoscente y el mundo objetivo externo." (p. 236). De acuerdo con Vygotsky, el significado se origina en la construcción individual o en herramientas y sistemas de signos culturalmente desarrollados. Por medio de la internalización los sujetos se apropian de los significados que esas herramientas y sistemas de signos conllevan, la base del desarrollo conceptual "es la interacción social y la interacción entre el sujeto y las herramientas culturales y los sistemas de signos que son internalizados –mediante construcción activa–…" (Waschescio, 1998. p. 238). Así, para ambas teorías la interacción juega un papel central, en ambas, ciertos aspectos de esta interacción son internalizados y en ambas "la internalización es la condición *sine qua non* de la reorganización conceptual y el desarrollo." (Ibíd.)

Dadas las condiciones bajo las que se lleva a cabo nuestra investigación, consideramos que ambos enfoques son útiles e inclusive necesarios. Por una parte no podemos ignorar el hecho de que nuestra propuesta se apoya fuertemente en la actividad psicomotriz que los estudiantes realizan al manipular los artefactos puestos en escena, esta actividad permite una primera aproximación a las transformaciones geométricas, sobre todo en términos de configuraciones entre objetos en el plano (trátese de la hoja para dibujar representada en la pantalla de Cabri o de las hojas sobre las que el usuario arrastra los trazadores en las máquinas articuladas) y quizá por esto prioritariamente visual, además de impulsar el desarrollo de ciertos esquemas de utilización referidos a cada artefacto. Por otra parte, la actividad argumentativa de los estudiantes, inducida por los guiones de trabajo y las intervenciones del conductor, tiene la finalidad de transformar estas formas abstractas primarias en objetos de reflexión o en objetos del discurso interpersonal e intrapersonal. Nuestro problema está, en todo caso, en encontrar explicaciones suficientemente convincentes que articulen, en el escenario de actividad constituido para la investigación, ambas formas de entender la internalización.

2.5.3. El dominio fenomenológico y el dominio racional de la experiencia matemática

La mediación a través de herramientas físicas y de signos provoca una diferenciación fundamental respecto a la forma en que la construcción de conocimiento, o de significados relativos a hechos conocidos, es alcanzada. Por un lado, la utilización de las herramientas (el software de geometría dinámica y las máquinas matemáticas articuladas) permite desarrollar un nivel inicial de experiencia matemática centrada en la constatación, identificación, o caracterización de un hecho geométrico, y aún, eventualmente, en el establecimiento de las condiciones necesarias y suficientes para que tal hecho suceda. Por otro lado, las actividades diseñadas y puestas en marcha (en las cuales la utilización de las herramientas es una parte sustancial), tienen la finalidad de llevar el nivel de la experiencia matemática previa, a un segundo nivel en el que el motivo esencial de la actividad es el de fundamentar (validar) el hecho matemático previamente establecido o confirmado. Se trata, entonces, de transitar del nivel de la veracidad de un hecho geométrico: ¿Es un hecho cierto?, ¿En qué condiciones lo es?; al nivel de la fundamentación: ¿Por qué es cierto?, ¿Cómo se conecta con otros hechos matemáticos ciertos? Mariotti (2002) propone una hipótesis que permite vislumbrar un proceso a favor de esa transición:

> Los significados están enraizados en la experiencia fenomenológica (las acciones del usuario y la retroalimentación del ambiente, del cual el artefacto es un componente) pero su evolución es alcanzada por medio de la construcción social en el salón de clases bajo la orientación del maestro. (Mariotti, 2002, p. 708).

A continuación se presenta una discusión más detallada del potencial de mediación semiótica que poseen Cabri y las máquinas matemáticas.

2.5.3.1. Fenomenología de los objetos y construcciones geométricas dinámicas

Como lo señalan Balacheff y Kaput (1996), las computadoras proporcionan nuevas formas de hacer y de experimentar matemáticas que se fundamentan en la experiencia de manipulación directa de objetos y relaciones matemáticas, este tipo de experiencia parece ser fuente de cambios profundos a largo plazo en el entendimiento y en las concepciones matemáticas de los sujetos. Particularmente los micromundos matemáticos proporcionan una semántica dinámica para un sistema formal permitiendo, a quien se introduce en ellos, explorar simultáneamente la estructura de los objetos accesibles, sus relaciones y las representaciones que los hacen accesibles. Para estos investigadores un micromundo matemático consiste de:

a) Un sistema formal; un conjunto de objetos primitivos, operaciones elementales sobre esos objetos, y reglas que expresan las formas en que las operaciones pueden ser desarrolladas y asociadas.
b) Un dominio de fenomenología que relaciona objetos y acciones sobre los objetos subyacentes al fenómeno en la pantalla. Este dominio de fenomenología determina el tipo de retroalimentación que el micromundo

> produce como consecuencia de las acciones y decisiones del usuario. (Balacheff y Kaput,1996, p. 471)

Es importante destacar dos aspectos del ambiente Cabri: Por una parte este software ofrece un acceso a la manipulación directa de objetos geométricos, haciendo posible una concepción de la geometría como el estudio de las propiedades invariantes de esos objetos, transformados en construcciones geométricas genéricas una vez que el proceso de su construcción satisface la *prueba de arrastre* (Mariotti, 2000) de los objetos base de la construcción y permite el examen de "un continuo" de casos particulares de una proposición general. Por otra parte, esta clase de software tiene un impacto epistemológico en el tipo de experiencia geométrica que los estudiantes obtienen basada en una *reificación* (Balacheff y Kaput, 1996) de los objetos y relaciones geométricas que ellos pueden utilizar para actuar de manera conciente (o reflexiva) sobre esos mismos objetos y relaciones, es decir, esta experiencia da paso a una transformación cognitiva de objetos abstractos en "realidades concretas" (las representaciones computacionales de los objetos geométricos), pero de manera que el proceso no termina ahí, sino que da la posibilidad al sujeto de ampliar su dominio de experiencia (operando a través de esas realidades concretas) para enriquecer su concepción del objeto geométrico (abstracto) en juego. Desde la perspectiva del desarrollo de una racionalidad matemática, estas características del software pueden constituirse en medios apropiados para la elaboración de argumentos con los cuales sustentar la plausibilidad de una conjetura y avanzar en la construcción de una prueba.

2.5.3.2. Experiencia mecánica y experiencia geométrica. El análisis empírico y el análisis teórico de las máquinas articuladas

Las Máquinas Matemáticas Articuladas satisfacen la caracterización que hace Szendrei (1996) de los materiales educativos, dado que la estructura de las máquinas matemáticas articuladas contiene o reproduce la estructura del conocimiento matemático involucrado. Bartolini (1993) señala que la historia de los pantógrafos representa la génesis del conocimiento científico-teórico contemporáneo basada en la relación entre lo específico y lo general, entre lo concreto y lo abstracto.

> Si el punto de partida de la construcción de un concepto es la abstracción substancial desde lo concreto (realizada por medio del análisis de la función de una cierta relación de cosas dentro de un sistema estructurado), su resultado es una teoría desarrollada, donde las manifestaciones específicas están deducidas y explicadas desde sus fundamentos generales (Davydov, 1972-79 ch. 7) (citado en Bartolini, 1993, p. 98)

En particular, las diferentes máquinas matemáticas consideradas en este proyecto de investigación operan bajo los principios teóricos de las transformaciones geométricas elementales, es decir, las características métricas y mecánicas que las máquinas poseen controlan las articulaciones que las constituyen para realizar correspondencias biunívocas específicas entre pares de puntos en el plano, de manera que los trazadores de que están provistas generan representaciones gráficas de alguna transformación geométrica en particular.

Es importante señalar nuevamente que, en principio, para el usuario la experiencia mecánica y la experiencia geométrica referidas a estas máquinas están separadas, la máquina no es transparente desde el punto de vista geométrico, ni las propiedades geométricas subyacentes son inmediatas desde el punto de vista mecánico (Bartolini, 1993). Hace falta llevar a cabo una actividad organizada para que los estudiantes lleguen a construir una interpretación o una modelación geométrica de las máquinas, dicha actividad no sólo deberá consistir en manipular la máquina matemática, sino que será necesario interpretar su funcionamiento dentro de una teoría matemática. La transformación geométrica generada es identificable por medio del reconocimiento de la relación o relaciones entre los objetos obtenidos al manipular el pantógrafo (el objeto antecedente y el objeto imagen en la transformación correspondiente), o bien, al reconocer el invariante geométrico inherente a los objetos dibujados. Simultáneamente, la máquina articulada posee características estructurales propias o de diseño (métricas y mecánicas) por las cuales ésta reproduce las relaciones o los invariantes geométricos característicos de la transformación en juego, además, en general, siempre es posible visualizar, en la estructura de la máquina articulada, el invariante característico de la transformación. Desde nuestro punto de vista, ambos aspectos, intrínsecamente ligados, pueden ser referidos como argumentos destinados a justificar lo que cada máquina genera. Al unir el análisis empírico con el teórico, relativos a una máquina articulada, se tiene la posibilidad de iniciar un proceso de discusión y de argumentación matemática dirigido a validar o a fundamentar lo que la máquina misma produce.

En este contexto, el papel de la geometría dinámica de Cabri se centra en el despliegue visual inicial de las representaciones gráficas de cada una de las transformaciones bajo estudio, en la identificación de los *elementos característicos* (Sangaré, 1999) de cada una de ellas, en el reconocimiento de los invariantes geométricos que las definen y en la introducción, utilización y apropiación de los referentes nominativos adecuados (Hoyos, 2002). Las máquinas matemáticas, a su vez, pueden constituirse en detonadores de formas de razonamiento de los tipos que Balacheff (1987) caracteriza como experiencia crucial o como ejemplo genérico, puesto que dichas máquinas representan casos particulares de alguna transformación geométrica o de alguna composición de transformaciones.

De esta manera, ambas herramientas tienen el potencial de promover la transición del nivel de la veracidad de un hecho geométrico al nivel de su fundamentación, es decir, representan medios adecuados para involucrar a los estudiantes en procesos de validación de resultados o afirmaciones matemáticas obtenidas a través de la utilización de las herramientas mismas, puesto que contienen, estructuralmente, las relaciones y las propiedades matemáticas que rigen los objetos y los procesos geométricos que dicha utilización hace ostensibles. Por supuesto, no basta la sola presencia de las herramientas para que esto suceda, nuevamente la importancia de concebir la actividad como un todo sistémico salta a la vista. Resulta entonces tan importante como la disponibilidad de las herramientas físicas, contar con otros instrumentos que coordinen la *actividad*, en el sentido de "…cadenas de acciones (prácticas e intelectuales)" (Meira, 1998, p.122), que los estudiantes llevarán a cabo con las herramientas y que guíen sus razonamientos y entendimientos de manera que estos evolucionen hacia un dominio racional de lo que están experimentando, de aquí la importancia que tienen las hojas de trabajo o guiones para coordinar y dirigir la actividad de los estudiantes. Así mismo, las interacciones entre pares y de los estudiantes con el profesor se consideran igualmente importantes para alcanzar significados compartidos y coherentes con los significados matemáticos institucionalizados.

2.5.4. Naturaleza dual de las herramientas

La revisión documental llevada a cabo sugiere tratar de sintetizar los diversos planteamientos en relación a las funciones que ejercen los artefactos culturales utilizados como herramientas de mediación de los aprendizajes. Meira (1998), propone distinguir entre la naturaleza procedimental de los artefactos (en referencia a la interpretación de instrucciones para su empleo eficaz) y la naturaleza cultural de estos (los artefactos son también dispositivos simbólicos con un significado cultural). Bajo el primer enfoque el uso del artefacto tiene un carácter eminentemente práctico, la actividad con la herramienta estaría caracterizada por el descubrimiento y el dominio, por parte del usuario, de los mecanismos que permiten obtener resultados previstos o resultados requeridos. En el caso de Cabri la interpretación procedimental de esta herramienta está dirigida a establecer las maneras de interactuar con la herramienta para lograr ciertos resultados, seleccionar los comandos y utilizarlos en una secuencia adecuada para hacer determinadas construcciones, manipular eficazmente el ratón para concretar esas construcciones, utilizar el arrastre de los objetos en la pantalla para observar o constatar invariantes. En el caso de las máquinas matemáticas la interpretación procedimental de la actividad estaría orientada por acciones dirigidas a aprender a manipular los eslabonamientos, es decir, a aplicar ciertas fuerzas en determinados objetos y en determinadas direcciones para hacer que la máquina produzca ciertos resultados, descubrir los elementos directores del arrastre, los elementos trazadores, adquirir destreza para dibujar objetos y sus imágenes.

En lo que se refiere a la naturaleza simbólica de las herramientas, su utilización debiera adquirir o mostrar una intención teórica en el sentido de las explicaciones que se pueden dar de su funcionamiento, de las relaciones que se pueden establecer entre los elementos que las constituyen, de las relaciones que se pudieran establecer entre los objetos producidos o explicaciones en cuanto a las formas en que las herramientas son utilizadas para producir resultados ante una tarea específica, o bien en relación a la forma en que el empleo de una o varias herramientas contribuye al desarrollo de estrategias para resolver problemas, o, inclusive, con respecto a la búsqueda y a la elaboración de formas de justificar los resultados y las afirmaciones matemáticas que los usuarios obtienen apoyados en la utilización que hacen de las herramientas mismas. Es decir, una utilización simbólica o semántica de la herramienta en cuestión consistiría en la realización de actividades que ya no están limitadas a la herramienta misma, sino que la rebasan en tanto que ésta se ha transformado, en el contexto interno del usuario, en un medio de participación social y de producción intelectual. Estas cuestiones parecen ser válidas tanto para la geometría dinámica de Cabri, como para las máquinas matemáticas.

2.5.5. Cierre

Podemos señalar que el uso de artefactos culturales obedece esencialmente a la intención de mediar los aprendizajes en el sentido de crear oportunidades para que los estudiantes construyan significados matemáticos desde las actividades y de las acciones llevadas a cabo, teniendo como punto de partida la manipulación de dichos artefactos o herramientas. Se trata de aprovechar el carácter potencial de mediadores semióticos que las herramientas poseen, con el objetivo de transitar de la constatación de un hecho geométrico, a su validación matemática. Como ya se señaló, no basta la sola disponibilidad de las herramientas, es necesario llevar a cabo actividades coordinadas y procesos de interacción social que estimulen el desarrollo de una racionalidad matemática como medio esencial de validación.

Cuando asumimos que el esquema propuesto por Sfard (1991) (apartado 2.3.1. de este documento) es conveniente para proponer un mecanismo específico de mediación semiótica en el contexto de nuestro trabajo empírico, tenemos en consideración ciertos señalamientos que esta investigadora hace al plantear tal esquema. Para esta investigadora es plausible considerar la formación de una concepción operacional como una condición previa[12] a la formación de una concepción estructural de un objeto matemático. También, desde su punto de vista, es improductivo suponer que el aprendizaje matemático, especialmente en los niveles más avanzados, tenga lugar sin la intervención externa (de un maestro, o de un libro de texto), sino que, por el contrario, esto indicaría que dicho aprendizaje puede ser altamente dependiente de la clase de estímulos (de los métodos de enseñanza) utilizados. Nos parece que esta posición respecto a la génesis de los conceptos matemáticos en los seres humanos no es contradictoria con la teoría sociocultural apoyada en los trabajos de Vygotsky. A continuación argumentamos acerca de esto.

Para Piaget "la abstracción [matemática] no es extraída del objeto sobre el que se actúa, sino de la acción misma" (citado en Sfard, 1991, p. 17). Para Vygotsky, el mecanismo específico de funcionamiento de la internalización es el dominio de las formas semióticas externas (citado en Wertsch, 1995, p. 83). En esto, hay una coincidencia esencial entre ambos esquemas: es la acción de los sujetos, en términos de los medios sobre los que actúan, lo que permite generar una actividad intelectual y la significación (en el sentido de dar sentido o construir significado) de

[12] Un invariante, en el sentido que le otorgó Piaget: "en el proceso de aprendizaje - ¡cualquier clase de aprendizaje! – ciertas características constantes pueden ser identificadas las cuales parecen ser bastante inmunes a cambios en los estímulos externos." (Sfard, 1991, p. 17)

la actividad realizada. Dicho de otra manera, ni los objetos materiales ni las representaciones (externas) que arbitrariamente de ellos se disponga, son suficientes para provocar una internalización o una reelaboración de los mismos como herramientas del pensamiento o como constructos abstractos significativos, sino que se requiere, necesariamente, de una serie de acciones o de una actividad organizada en torno a dichos objetos y representaciones para poner en marcha ese proceso.

Además de lo anterior, podemos considerar que el carácter interpsicológico o social-transaccional del proceso de internalización ha sido ya argumentado con suficiencia esencialmente desde la perspectiva de Vygotsky. Sabemos de la necesidad de que exista una práctica común en la que se genere una actividad colectiva y de la importancia de la conversión de acciones en discurso o la explicitación de las formas en que se emplea la herramienta para que el sujeto esté en posibilidad de generar herramientas psicológicas o simbólicas. No obstante, el carácter intrapsicológico del proceso de internalización aún requiere de análisis más detallados a fin de elaborar modelos referenciales que quizá puedan llegar a constituir "esquemas operativos" con fines didácticos. Nos interesa particularmente abordar uno de los aspectos que a juicio de Wertsch (1995) conforman el proceso de internalización tal como lo concibió Vygotsky, *el mecanismo específico de funcionamiento es el dominio de las formas semióticas externas* (p. 82). La importancia de este aspecto ha sido ya reconocida en la literatura especializada, e.g., Verillon y Rabardel (1995) consideran que las hipótesis de Vygotsky proporciona directrices teóricas estimulantes para el estudio del impacto de los artefactos sobre la cognición, sin embargo, el nivel macroscópico general en el cual están formuladas deja abierta la pregunta en relación a los procesos microscópicos subyacentes involucrados. Con la misma orientación, Kirshner y Whitson (1997, p. viii) señalan la importancia de no descuidar las dimensiones intrapersonales del conocimiento y el aprendizaje para fortalecer perspectivas teóricas como la de la cognición situada que por esencia enfatizan las dimensiones social y cultural.

Nos proponemos, entonces, dar cuenta del proceso por el cual los estudiantes llegan a desarrollar el dominio de formas semióticas externas asociadas a un campo de experiencia de la geometría euclidiana. Esas formas externas están condicionadas por los artefactos culturales utilizados y también por las representaciones distintivas o situadas generadas por los propios participantes (o introducidas deliberadamente por el conductor) en la actividad. Con esta intención es que se ha considerado conveniente introducir el esquema que Sfard (1991) propone para explicar el desarrollo, al nivel del sujeto, de las nociones matemáticas.

2.6. Elementos específicos del proyecto de investigación

En este apartado se presentan los elementos teóricos y metodológicos específicos a nuestro trabajo. Se trata de los elementos con los que se construye la tesis misma, es decir, lo que permite dar forma y sustento a la afirmación principal que se pretende validar por medio del trabajo de investigación desarrollado. Además de las premisas, de la tesis y de las preguntas de investigación, se presentan también, en forma resumida, las unidades de análisis de la información obtenida, entendidas como los enfoques generales desde los que se revisan los datos y se generan los primeros análisis. Por último, se indican una serie de elementos más específicos con la intención de llevar a cabo un análisis y una discusión de los resultados de la investigación en un nivel más detallado.

2.6.1. Premisas de la investigación

Los reportes de investigación revisados (apartado 2.1.), así como los resultados obtenidos de nuestro estudio inicial, nos llevan a considerar condiciones factibles de ser establecidas en el trabajo con los estudiantes, condiciones que, a nuestro juicio, promueven el tipo de comportamientos y desempeños esperados en los participantes para avanzar en la obtención de resultados pertinentes a la tesis propuesta. Estas condiciones se indican a continuación:

Pr_1 Las herramientas instruccionales utilizadas y los guiones para llevar a cabo las actividades de aprendizaje, junto con las intervenciones pertinentes del conductor de las sesiones de trabajo, son medios que permiten establecer condiciones adecuadas para que los estudiantes construyan un campo de experiencia en torno a las transformaciones geométricas y se involucren en la unidad cognitiva de teoremas y en la resolución de problemas propios de ese campo.

Pr_2 A partir de la unidad cognitiva de los teoremas y el campo de experiencia de las transformaciones geométricas, es posible generar situaciones de validación matemática.

Pr_3 Ante situaciones de validación los estudiantes exteriorizan diversas formas de racionalidad para satisfacer la demanda de justificar o de probar sus propias afirmaciones o resultados.

2.6.2. Tesis de la investigación

La tesis del proyecto de investigación se ha elaborado con la intención de documentar los procesos de mediación semiótica y de emergencia de racionalidad matemática, así como argumentar acerca de las relaciones entre ambos desde la perspectiva de los cambios en el contexto interno de los participantes, es decir, desde la perspectiva de las transformaciones en su experiencia y en las formas de pensar y de actuar relativas al campo de experiencia particular. Se intuye a priori, una relación de reciprocidad entre ambos procesos: por una parte se considera que la mediación semiótica promueve la estructuración cognitiva de hechos matemáticos ubicados en un nivel fenomenológico y en un nivel racional, alentando, en el contexto interno de cada estudiante, la generación de signos o herramientas psicológicas mediante la internalización de las herramientas físicas y sus esquemas de utilización; esto permite a los participantes elaborar argumentos más sólidos para justificar aserciones o resultados relativos a esos hechos matemáticos. A su vez, la emergencia de formas de racionalidad matemática contribuye al refinamiento de esos instrumentos de mediación, es decir, los estudiantes se apropian de objetos matemáticos (como abstracciones concretas) mediante representaciones y significados enriquecidos. En el proceso, la interacción social se considera como un medio para establecer la comunicación entre pares y con el conductor de las sesiones de trabajo en el laboratorio de matemáticas; se asume también que es esta interacción la que posibilita el avance de los participantes, como grupo, en sus propios procesos de aprendizaje y de validación. Es así que la tesis ha quedado establecida de la siguiente manera:

TI. El involucramiento de los estudiantes en los procesos de conjetura, argumentación y prueba por la vía de las herramientas instruccionales utilizadas, da cuenta de una relación recíproca entre la mediación semiótica alcanzada y las formas de racionalidad matemática emergente, así como de un proceso de apropiación del conocimiento matemático como un conocimiento socialmente validado.

2.6.3. Preguntas de investigación

El proceso de investigación seguido, tanto en el aspecto documental como en lo que se refiere a los estudios empíricos llevados a cabo, ha permitido proponer diversas preguntas de investigación que si bien pudieran considerarse como plausibles, la intención de contestar todas y cada una de ellas de manera puntal constituiría una meta difícil de lograr. Así, se ha llevado a cabo un intento de síntesis y de precisión de cuestionamientos pertinentes a las premisas y a la tesis de esta investigación, que permita formular resultados objetivos. Se han definido, de esta manera, las siguientes preguntas de investigación como esenciales para el proyecto de tesis:

PI_1 ¿Qué evidencias es posible encontrar, en el desempeño de los estudiantes, de relación entre una racionalidad matemática emergente y la elaboración de instrumentos de mediación semiótica?

PI_2 ¿Cómo se construye esa relación en la situación particular de la interacción de los estudiantes con dos tipos de herramientas de mediación que se asumen, desde el punto de vista del investigador, como complementarias?
PI_3 ¿Qué argumentos se pueden dar, en términos de los elementos puestos en juego en esta investigación y de los resultados obtenidos, respecto a la interacción social y al deseo de certitud como motores para la elaboración de pruebas por parte de los estudiantes?

PI_4 ¿Cuál es el papel de las herramientas de mediación en el proceso de descontextualización requerido para la elaboración de pruebas intelectuales?

La primera pregunta se plantea con el propósito de esclarecer aspectos acerca de lo que se considera el tema fundamental de este proyecto de investigación, esto es, se busca con esta pregunta organizar una argumentación que de cuenta de la relación entre la racionalidad matemática que los estudiantes manifiestan y la mediación alcanzada a través del escenario de aprendizaje en su conjunto. La segunda pregunta se formula con la intención de documentar formas específicas en que esa relación se construye por los estudiantes dentro del escenario de aprendizaje en el que la investigación se ha llevado a cabo. Con la tercera pregunta se intenta contribuir a la discusión generada en el campo (Véase: Balacheff, 1987, 1991) en relación al papel de la interacción social y del deseo de certitud en el desarrollo de la prueba en el salón de clases de matemáticas. Por último, la cuarta pregunta pretende esclarecer la forma en que actúa la mediación en el proceso de descontextualización, particularmente sobre cuál o cuáles de los polos señalados por Balacheff (1987) para determinar un tipo específico de prueba matemática en la actividad de los estudiantes.

2.6.4. Unidades de análisis de los datos

La revisión de los videos, de los textos que los estudiantes han escrito en sus hojas de trabajo y de los archivos de Cabri que ellos han elaborado al llevar a cabo las actividades de aprendizaje, está orientada a identificar y a analizar los siguientes aspectos:

UA_1 El papel de la interacción en la formulación de conjeturas y en la construcción de argumentos o de pruebas para validar esas conjeturas. Aquí se consideren tres clases de interacción: la interacción entre estudiantes, la interacción entre estudiantes y herramientas de mediación, y la interacción entre estudiantes y conductor de las sesiones de trabajo.

UA_2 Las formas en que los estudiantes articulan sus experiencias de aprendizaje para avanzar en sus propios procesos de validación. Se trata de dar cuenta de procesos cognitivos en los que los estudiantes recurren a las nociones y a los significados matemáticos de los que se han apropiado y a las herramientas de que disponen, con el fin de justificar lo que ellos mismos suponen o afirman acerca de una nueva experiencia.

UA_3 La racionalidad matemática que los estudiantes desarrollan y exteriorizan ante situaciones de validación al llevar a cabo actividades de aprendizaje mediado. Desde nuestra perspectiva, la articulación de las experiencias de aprendizaje da pie a la emergencia de formas de racionalidad, dicho en otras palabras, una situación de validación promueve en los estudiantes la articulación de sus experiencias de aprendizaje para dar respuesta satisfactoria al requerimiento explícito de prueba.

2.6.5. Categorías de análisis específicas

Como categorías de análisis, o como elementos de discusión, se han considerado las siguientes caracterizaciones propuestas por algunos de los investigadores cuyos trabajos han sido revisados en el capítulo 3 de este documento. Estas caracterizaciones, dados los intereses específicos de nuestra investigación, se consideran convenientes para elaborar una visión detallada del desempeño de los estudiantes participantes ante las tareas y las demandas que se les plantean durante las experiencias de aprendizaje, constituyendo, así, elementos a distinguir en tal desempeño y, a la vez, elementos de argumentación de la tesis y de fundamentación de respuestas a las preguntas de investigación.

HA_1 La internalización de las herramientas, o la construcción (en el contexto interno de los estudiantes) de instrumentos de mediación semiótica a partir de la utilización de las herramientas instruccionales. Los rasgos de este proceso que se han considerado tanto como elementos a promover durante las experiencias de aprendizaje, como elementos a analizar en los datos recabados son los siguientes:

a) Es fundamental que tenga lugar una práctica común en la que se genere una actividad colectiva.
b) La conversión de acciones en discurso, la explicitación de las formas en que se emplea la herramienta, es otra condición necesaria para la internalización.
c) El dominio de las formas semióticas externas, o "el control voluntario sobre los signos en el plano intrapsicológico" (Wertsch, 1995, p. 81), constituye el mecanismo esencial del proceso.
d) La internalización genera una imagen subjetiva que, a partir de ese momento, conduce la actividad intelectual con preeminencia sobre el objeto concreto.

HA_2 Los tipos de racionalidad (la prueba) que los estudiantes manifiestan en situaciones de validación (Balacheff, 1987):

Tipo de Prueba	Tipo de conocimiento	Lenguaje	Descontextualización	Generalización
e) Empirismo Ingenuo	Experiencial, teoremas en acto, se reconocen ciertos mediante la práctica. No se considera alguna forma de análisis de las razones.	Cotidiano. Se recurre esencialmente a la ostensión, a una prueba por construcción.	La prueba está limitada al caso o a los casos que el sujeto puede reconocer como tales, en referencia a la proposición en juego.	No existe propia-mente; se dan "generalizaciones" de manera prematura o impulsiva.
f) Experiencia Crucial.	Involucra el recono-cimiento tanto de casos particulares como generales.	No formal, cotidiano.	Opera mediante la verificación, la justifi-cación o el recono-cimiento de un caso que el sujeto reconoce tan general como le es posible.	Se plantea explícita-mente y se resuelve sobre un caso que se reconoce tan poco particular como sea posible.
g) Ejemplo Genérico	Las operaciones y relaciones que inician la prueba están designadas por el resultado de su puesta en práctica. El procedimiento de prueba pretende extraer las razones de una aserción o una conjetura.	Pone al descubierto las propiedades características de una clase.	Se considera un objeto como representante característico de una clase. Opera mediante la explicación de las razones de validez de operaciones o transformaciones sobre ese objeto.	- La prueba es el ejemplo en si; se usa para ejecutar las operaciones que aseguran la validez de un enunciado (*p. pragmáticas.*) - Constituye un me-dio o argumento sobre el que se fundamenta la prueba (*p. intelec*.)
h) Experiencia Mental	Existe conocimiento teórico o conceptual y experiencial que permite prever el tipo de operaciones y relaciones necesarias para elaborar la prueba. Es compatible con el conocimiento público, institucionalizado.	Recurre a los términos formales y su significado de manera regular. Las propiedades de los objetos deben ser formuladas en su generalidad. Se forma mediante construcciones lingüísticas complejas.	Se caracteriza por la acción interiorizada separada de su ejecución sobre un representante particular. Es invocada en el discurso que hace explícitos los argumentos o las pruebas. Requiere la designación de la clase de objetos en juego y la formulación de las características operatorias sobre las que se formula esa experiencia mental.	Las explicaciones se basan en el análisis de las propiedades de los objetos en juego. La descontextualización es el proceso esencial de la generalización.
Cálculo Sobre Enunciados	Consiste en pruebas totalmente independientes de la experiencia.	Cálculo inferencial sobre enunciados.	Se fundamenta en definiciones o en propiedades características específicas (no necesariamente válidas o correctas.)	

HA_3 Los diferentes niveles de aprehensión de las transformaciones geométricas y la noción de *elemento característico* de una transformación (Sángare, 1999):

i) Nivel 1. La transformación es considerada "como una relación entre dos configuraciones geométricas o una relación entre dos partes de una misma configuración" (Sangaré, p. 29), el carácter funcional está ausente.
j) Nivel 2. La transformación es considerada como una aplicación puntual del plano sobre él mismo (se trata del objeto funcional).
k) Nivel 3. La transformación es considerada como una herramienta funcional con la finalidad de poner en evidencia invariantes o con la finalidad de resolver problemas.
l) Nivel 4. La transformación es considerada como el elemento de un grupo (las transformaciones se componen y se comparan, ellas forman grupos de transformaciones)

HA_4 Las fases cognitivas que Sfard (1991) propone para el desarrollo de las concepciones personales de los objetos matemáticos:

m) Interiorización. "…un proceso ha sido interiorizado si este puede ser llevado a cabo a través de representaciones (mentales)." (p. 18)
n) Condensación. El sujeto es capaz de pensar en el proceso como un todo, se refiere a este en términos de relaciones entrada-salida más que por la indicación de operaciones cualesquiera.
o) Reificación. La persona llega a ser capaz de concebir la noción matemática en cuestión como un objeto totalmente encarnado; la reificación es un salto cuántico instantáneo: un proceso solidificado en objeto, en una estructura estática. Varias representaciones del concepto llegan a ser semánticamente unificadas por este constructo abstracto.

2.6.6. Cierre

Con los elementos señalados en este apartado se pretende llevar a cabo la revisión, el análisis y la discusión de los datos empíricos obtenidos en esta investigación. Si bien la forma de utilizar cada uno de estos elementos no se ha planteado de manera concreta, se espera que la revisión y el análisis de los datos permita encontrar espacios y momentos adecuados para su utilización particular o para generar argumentaciones que sustenten de mejor manera a la tesis.

3. Metodología y condiciones particulares del proyecto de investigación

Se tiene la perspectiva de que los aspectos teóricos y los aspectos metodológicos de esta tesis se entremezclan y se condicionan mutuamente a medida que el proyecto de investigación se desarrolla. Por un lado, la racionalidad matemática puede ser estudiada cuando los estudiantes asumen situaciones de validación. Por otro lado, es posible observar procesos de mediación semiótica cuando se llevan a cabo actividades de aprendizaje centradas en la utilización de ciertos artefactos culturales. En el aspecto metodológico, nuestro trabajo ha consistido en hacer coincidir ambas formas de promover una actividad matemática, asumiendo que esos artefactos culturales constituyen referentes concretos a partir de los cuales los usuarios se apropian de instrumentos de mediación semiótica, y que éstos, a su vez, estimulan la participación productiva en procesos de validación referidos a los hechos o a los significados matemáticos que son el motivo de la actividad, y que son evidenciados mediante el empleo organizado de los artefactos mismos. En el segundo capítulo de este documento se ha presentado una revisión de los aspectos teóricos y metodológicos de las investigaciones que se consideran de mayor influencia en la forma en que nuestro propio estudio se ha llevado a cabo. Sin embargo, haremos aquí un breve resumen de las características que, desde la perspectiva de esta tesis, constituyen una metodología dirigida al estudio de posibles relaciones entre racionalidad matemática y mediación semiótica.

Una de tales características es la estructuración de las actividades de aprendizaje por medio de guiones de trabajo y de artefactos culturales en los que subyacen ideas o nociones matemáticas relevantes. Se ha buscado que ambos recursos funcionen como mediadores de los aprendizajes, en el sentido de impulsar la construcción de significados y de hacer crecer una estructura de conocimientos referidos a las transformaciones geométricas elementales. Dentro de este primer aspecto debemos señalar el carácter complementario que se ha hecho patente en otras investigaciones (Hoyos, 2003-b; Vincent, et al., 2002), atribuible a los artefactos utilizados en nuestro caso y que se ha tratado de explotar en la actividad con los estudiantes: el software de geometría dinámica de Cabri y las máquinas matemáticas articuladas se complementan eficazmente para generar un campo de experiencia relativo a las transformaciones geométricas, así como en la generación de representaciones correspondientes, tanto estáticas como dinámicas y tanto externas como internas.

También, en términos de los recursos utilizados, es posible afirmar que el ambiente de aprendizaje corresponde a lo que se ha denominado ambientes de aprendizaje enriquecidos (ver apartado 2.4.3 de este documento). De esta forma, los estudiantes, haciendo uso conveniente de las herramientas y de las representaciones que éstas producen, pueden llegan a apropiarse de representaciones externas e internas y a generar sus propios instrumentos de mediación semiótica.

Una característica más del desarrollo de esta investigación ha sido la de promover el involucramiento de los estudiantes en situaciones de validación (Balacheff, 1987. Se ha evidenciado en diferentes trabajos de investigación (Bartolini, 1993; Mariotti, et al., 1997; Vincent, et al., 2002) que es posible generar tales situaciones a través de la indagación que los estudiantes realizan por medio de los artefactos o las herramientas disponibles para llegar a proponer afirmaciones matemáticas e iniciar procesos de validación.

A continuación se hace una descripción más detallada del desarrollo que ha tenido este trabajo de investigación, así como de las condiciones en las que se ha llevado a cabo.

3.1. Laboratorio de matemáticas

la parte empírica de esta tesis se llevó a cabo en el laboratorio de matemáticas, ubicado dentro de la unidad Ajusco de la Universidad Pedagógica Nacional. Este laboratorio ha sido equipado mediante el financiamiento de CONACYT a los proyectos de investigación: *“Modelos Matemáticos del Movimiento: Conexiones entre Aritmética, Geometría y Álgebra Básicas”* y *“Comprensión, comunicación y tecnología educativa en la clase de matemáticas: articulación de la experiencia en dominios matemáticos complejos usando artefactos culturales”*, bajo la responsabilidad de la Dra. Verónica Hoyos Aguilar. En este laboratorio se cuenta con 11 computadoras Pentium III en las que se tiene instalado el software de geometría dinámica Cabri-Géomètre II (referido en este documento simplemente como Cabri), versión 1.2 para Windows, reservada a la colaboración pedagógica (Laborde, 2000). En el laboratorio también se cuenta con modelos originales de las máquinas matemáticas o pantógrafos diseñados en la Universidad de Modena para el estudio de las transformaciones geométricas elementales y de algunas de sus composiciones y se tienen también reproducciones de estos elaboradas en el Taller de Prototipos del Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico de la UNAM.

Los módulos de trabajo dentro del laboratorio están conformados con la intención de que los estudiantes desarrollen las actividades en parejas, disponiendo así de una computadora y una mesa en la cual pueden utilizar también un pantógrafo. Se dispone además de instrumentos de geometría convencionales como reglas, escuadras y transportadores. En estas condiciones el laboratorio tiene capacidad para un grupo de 22 estudiantes.

3.2. La parte empírica del proyecto de investigación

La parte empírica del proyecto de investigación en la que se sustenta esta tesis consistió de dos estudios realizados en el laboratorio de matemáticas ya referido, en dos distintos momentos y con un grupo distinto de estudiantes en cada caso. A continuación se describe la forma en que se llevó a cabo cada estudio.

3.2.1 El estudio inicial

Se llevó a cabo un estudio inicial durante el mes de junio de 2002 en el cual participaron 11 estudiantes con edades entre 16 y 17 años del cuarto semestre del Colegio de Ciencias y Humanidades plantel Sur. Se realizaron diez sesiones de trabajo en el laboratorio con carácter de extra clase, es decir, fuera del horario oficial de actividades académicas de los participantes, y con una duración aproximada de 2 horas cada una. La dinámica de trabajo en el laboratorio se estableció por medio de la entrega a cada participante de los guiones mediante los cuales se les indicaban las actividades que deberían llevar a cabo en cada sesión. Esta serie de sesiones estuvo orientada a ensayar las actividades dirigidas al estudio de las transformaciones geométricas elementales y a establecer con mayor precisión los elementos centrales de la tesis de investigación, es decir, las hipótesis, la afirmación principal, las preguntas de investigación y las unidades de análisis de los posibles datos a recolectar. El conductor de las sesiones procuraba interactuar frecuentemente con cada una de las parejas de estudiantes a fin de conocer el avance en el desarrollo de las actividades o con la intención de orientar los procesos de indagación al utilizar las herramientas y la discusión acerca de los hallazgos entre las parejas y entre los participantes en general.

Las sesiones se distribuyeron de la siguiente manera: Las dos primeras se ocuparon en la familiarización de los estudiantes con las herramientas de Cabri para trazar puntos, líneas y curvas, y para hacer construcciones geométricas básicas como la perpendicular a una recta, la paralela a una recta, el punto medio, o una mediatriz. Estas actividades (Apéndice 1) consistieron en la obtención de construcciones dinámicas válidas bajo el criterio del arrastre de los objetos base de la construcción, es decir, el arrastre de los objetos base le da validez a la figura y al proceso de construcción intrínseco, cuando las relaciones geométricas genéricas de la figura en cuestión han sido incluidas adecuadamente en el proceso mismo. Un ejemplo de las construcciones solicitadas es el siguiente:

1. Construye un triángulo rectángulo de tal manera que <u>al arrastrar cada uno de los tres vértices el triángulo continúe siendo rectángulo</u>. Después de terminar la construcción, describe por escrito el procedimiento realizado. Para arrastrar un objeto es necesario señalarlo con el puntero y oprimir el botón izquierdo del ratón, lo que equivale a asir ese objeto.

Las siguientes cinco sesiones se ocuparon en la exploración de cada una de las cuatro isometrías y de la homotecia en el ambiente de Cabri, las actividades (Apéndices II y III) consistieron esquemáticamente en: a) la construcción de un objeto y su imagen bajo la transformación en turno; b) la identificación de las relaciones de dependencia entre los objetos base (el objeto antecedente y los elementos característicos de la transformación) y los objetos construidos a partir de ellos (las imágenes correspondientes a los objetos antecedentes) y c) la caracterización (en palabras de los estudiantes) de las transformaciones geométricas exploradas. Además, también se incluyó una actividad que consistió en componer isometrías y tratar de establecer la transformación que produciría el mismo resultado. El siguiente es un ejemplo de las actividades realizadas en estas sesiones.

<u>**Rotación.**</u>

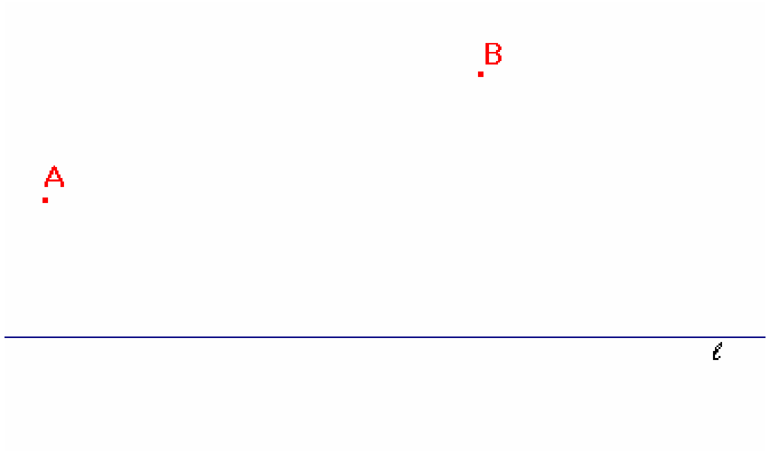
a) *Construye un segmento AB.*
b) *Construye el segmento A'B', imagen de AB con respecto a la rotación por el punto O, usando la herramienta* ***Rotación*** *de Cabri (abre el menú Ayuda con F1)*
c) *¿Cuáles objetos geométricos son necesarios para la construcción?*
d) *¿Cuáles objetos geométricos se pueden mover / variar y cuáles no? ¿Por qué?*

Las tres sesiones restantes se dedicaron al trabajo con los pantógrafos y a la resolución de problemas. El trabajo con los pantógrafos, esquemáticamente, consistió en: a) que los estudiantes identificaran la transformación geométrica en juego y que argumentaran a favor de su respuesta estableciendo relaciones entre los elementos de la máquina y la transformación; b) se les indicó que encontraran imágenes de puntos pertenecientes a objetos ya trazados pero prescindiendo del pantógrafo, que describieran y que justificaran su procedimiento de construcción. Finalmente, c) se les pidió que hicieran una descripción de la transformación de manera tal que quien la leyese pudiera construir la imagen correspondiente de un punto en el plano o bien de alguna figura u objeto geométrico. Ejemplos de los requerimientos indicados en los guiones de trabajo utilizados (Apéndice IV) son los siguientes:

1) Tú tienes una máquina matemática. Utilizando esta máquina dibuja la imagen de algunos objetos geométricos (puntos, segmentos de rectas, triángulos, etc.)
2) ¿De qué transformación se trata?
3) Dibuja dos esquemas de la máquina en dos diferentes configuraciones.
a) En el dibujo asigna letras a los puntos y a los segmentos que conforman la máquina.
b) <u>En la máquina articulada</u>, ¿cuáles son las relaciones o las propiedades geométricas que distingues entre sus diferentes componentes?

Para la resolución de problemas (Apéndice V) se pidió a los estudiantes seleccionar y utilizar alguna de las transformaciones estudiadas, también se les pidió que justificaran tanto su selección como la solución misma, en el caso de que obtuvieran una. A continuación se muestra un ejemplo de estos problemas:

1. En la siguiente figura se tienen dos puntos, A y B, de un mismo lado de la recta l. Se trata de encontrar el punto C sobre la recta l para el cual la trayectoria ACB: AC + CB, sea la más corta posible.



3.2.2. El estudio final

Para llevar a cabo el estudio final se recurrió a un grupo de estudiantes del tercer semestre del Colegio de Ciencias y Humanidades plantel Sur. Fue por intercesión de su profesor de matemáticas que el investigador se presentó ante el grupo haciendo una invitación para participar en el estudio, planteando las condiciones generales del trabajo en el laboratorio. Se comunicó a los estudiantes los objetivos, tanto en lo referente al proyecto de tesis, como en cuanto a lo que se esperaba lograr de su propio desempeño, los contenidos a tratar, el tipo de actividades a realizar y el tipo de herramientas a utilizar, el lugar, las fechas y los horarios previstos para las sesiones de trabajo y el requerimiento de un compromiso auténtico para la participación plena en las actividades, mismas que se plantearon como actividades extra clase. Para el estudio final se llevaron a cabo un total de 16 sesiones de trabajo en el laboratorio de matemáticas entre el 1° de octubre y el 9 de diciembre de 2002. Se procuró que las sesiones de trabajo no excedieran de una hora cincuenta minutos de duración, con el fin de mantener el convenio establecido con los estudiantes en cuanto al tiempo que la actividad les demandaría, esto se sostuvo regularmente en la práctica, aún cuando en ocasiones la actividad quedara inconclusa.

El investigador llevó a cabo las grabaciones en video de las sesiones de trabajo de los estudiantes. Éstas se efectuaron a partir de la séptima sesión, y para ello se contó con dos cámaras de video de las cuales una se mantuvo fija registrando el trabajo de alguna de las parejas, mientras que la segunda cámara se utilizó para registrar, parcialmente, las actividades realizadas por otras parejas de estudiantes en momentos en los que su desempeño mostraba aspectos de interés para la investigación. Accedieron a participar 7 alumnas y 6 alumnos con edades entre 15 y 16 años. A lo largo de las primeras seis sesiones fue posible identificar a los estudiantes que con mayor compromiso asumieron las actividades en el laboratorio, específicamente fueron cuatro los estudiantes que mostraron esta actitud y fue en ellos en quienes se concentró el registro de datos, particularmente la grabación en video de su trabajo.

En el periodo en que se llevó a cabo este estudio empírico, este grupo de estudiantes cursaba el tercer semestre de su programa de bachillerato, el cual no establece contenidos referidos de manera específica a las transformaciones geométricas, sólo se refiere a éstas de forma implícita como en el estudio de la semejanza en Geometría y del teorema de Tales y su recíproco, tal como se indica en la Unidad 4, del Programa de Estudio para la Asignatura Matemáticas II (CCH, 1996). Cabe señalar que en el Plan y Programas de Estudios de Matemáticas de la Escuela Secundaria (SEP, 1993) se prescribe el estudio de las transformaciones geométricas, específicamente las simetrías axial y central, orientado a la observación y la enunciación de sus propiedades. Además, se propone el desarrollo de actividades para observar el resultado de componer dos simetrías o reflexiones respecto a rectas. En dicho plan de estudios se propone también la aplicación de la semejanza al estudio de las homotecias y las aplicaciones de las homotecias al dibujo a escala. Por esta razón era probable que los estudiantes participantes tuviesen nociones previas acerca de esas transformaciones en particular. Respecto a la rotación y la traslación, también era probable que los estudiantes tuviesen alguna experiencia, puesto que éstas constituyen referentes utilizados en asignaturas como física o química.

Las actividades llevadas a cabo en este segundo estudio empírico fueron las mismas que en el estudio inicial, aunque en esta segunda oportunidad se hizo énfasis en las justificaciones y en los argumentos que los estudiantes dieron para apoyar sus afirmaciones y sus resultados. Sin embargo el aspecto más destacable de este segundo estudio radicó en que fue posible llevar a cabo una fase adicional de trabajo (las tres últimas sesiones) con pantógrafos para composición de isometrías, con la intención de involucrar a los estudiantes en la formulación, como proposiciones matemáticas, de las composiciones exploradas, es decir, para llegar a establecer con claridad un teorema (hipótesis y tesis), y trabajar en una prueba. En estas últimas sesiones de actividad en el laboratorio sólo participaron cuatro estudiantes, la razón de esto fue que ellos tuvieron la disposición para continuar asistiendo, además de su desempeño, que fue muy favorable con respecto a las perspectivas del investigador, y al nivel de aprehensión de las transformaciones geométricas logrado.

3.3. La secuencia de actividades

La forma en que las actividades en el laboratorio han sido secuenciadas ha mostrado ser conveniente para el involucramiento de los estudiantes en el estudio de las transformaciones geométricas (Hoyos, 2003-b), así como para posibilitar el desarrollo de formas de justificación matemática de lo que ellos mismos obtienen y descubren al llevar a cabo dichas actividades de aprendizaje. El planteamiento consiste en una primera aproximación a las transformaciones geométricas apoyada en la utilización del menú que proporciona Cabri para su estudio. Después de esto los estudiantes proceden a examinar y a manipular algunas de las máquinas matemáticas con la intención de proponer la transformación geométrica correspondiente a cada una de ellas y de argumentar a favor de esa conjetura. Este proceso favorece la aprehensión de los invariantes característicos de cada transformación, puesto que, al final, los estudiantes no sólo son capaces de referirse a la relación entre un objeto y su imagen (bajo una transformación dada) en los términos verbales o semánticos adecuados, sino también en términos numéricos, o en términos algebraicos, aunque esto depende, en general, del nivel escolar de los estudiantes (Hoyos, 2003-a). Como actividad final se proponen a los estudiantes problemas que pueden ser adecuadamente resueltos mediante la visualización de una transformación geométrica en particular y su aplicación a la situación planteada en el problema. En este estudio final, como ya se mencionó, se realizaron además actividades basadas en la composición de simetrías (Apéndice VI).

3.4. Los guiones de actividad

Al igual que disponibilidad de las herramientas técnicas o tecnológicas para el desarrollo de las actividades, se ha considerado muy importante la coordinación de esas actividades por medio de instrucciones impresas, en las que se incluye no sólo la secuencia de acciones a realizar con las herramientas, sino también una serie de preguntas dirigidas a la reflexión en torno a las acciones realizadas por los estudiantes y a la justificación de lo que ellos proponen o deciden en relación a las mismas actividades. Los guiones con los que se ha trabajado en ambas fases de estudio empírico de esta tesis, fueron originalmente elaborados y puestos en práctica por F. Olivero, B. Capponi y V. Hoyos al llevar a cabo una serie de experiencias de aprendizaje con estudiantes del quinto semestre de bachillerato durante el mes de octubre de 2000 en el laboratorio de matemáticas de la UPN. Para nuestra investigación se elaboraron guiones adicionales, específicamente para el estudio de la rotación, de la inversión y para el trabajo con las máquinas que generan composiciones de isometrías. También se modificaron los guiones en los que se plantean problemas cuya solución se puede obtener identificando y aplicando cierta transformación geométrica, con la intención de poner énfasis en las razones que los estudiantes pudieran tener para optar por una u otra transformación como posible vía de solución a la situación planteada. Los guiones utilizados constituyen de esta manera la parte esencial de la conducción y la coordinación de las actividades en el laboratorio de matemáticas; por medio de éstos, los estudiantes interactúan con las herramientas, entre ellos mismos y con el conductor de las sesiones. Por lo anterior, tales guiones de actividades se consideran también como herramientas de mediación en el sentido en que permiten orientar la actividad de los estudiantes hacia objetivos predeterminados por el investigador.

3.5. El papel del conductor en las sesiones de trabajo

Dado que la actividad en el laboratorio de matemáticas se concibe como la generación de situaciones propicias para que los estudiantes atribuyan significado matemático a las actividades que ellos realizan en ese espacio, el papel del conductor de las sesiones se centra en orientar en ciertos momentos la indagación o la exploración que los estudiantes realizan mediante las herramientas y los recursos puestos a su disposición. Sin embargo quizá la función primordial del conductor de las sesiones es la de orquestar la discusión en torno a las afirmaciones o a los resultados que los propios estudiantes generan en la actividad. Desde la perspectiva de la tesis de investigación se trataba esencialmente de promover la conexión entre la fase de elaboración de conjeturas y la fase de producción de pruebas (la unidad cognitiva de un teorema, según Boero, et al., 1996). El papel del conductor de las sesiones de trabajo se concibe, de esta manera, como el de un participante más en el proceso de aprendizaje puesto en marcha, aunque con la capacidad de llevar al escenario el punto de vista de la comunidad matemática (Bartolini, 1998), esencialmente en lo que a la validación de los resultados se refiere, es decir, tiene el papel de poner en primer plano la importancia de la justificación matemática de las afirmaciones o los resultados que se obtienen, recurriendo a la matemática misma; aunque no necesariamente siguiendo la demostración deductiva rigurosa, sino a través de la construcción de argumentaciones cada vez mejor sustentadas por medio de conexiones con lo que ya ha sido establecido. Se trata, en términos de lo que Herbst (2000) y Arzarello (1997) señalan, de manejar adecuadamente cierta ecología de la prueba en la clase de matemáticas: la prueba no es un procedimiento único y estático, sino que la prueba tiene un carácter situado en términos de los conocimientos, las habilidades y las concepciones presentes en el escenario de aprendizaje concreto. Podemos esperar, entonces, que las herramientas o los recursos didácticos introducidos también constituyan condicionantes del nivel de prueba o de argumentación matemática a lograr.

Cabe señalar que, en términos de lo ocurrido, sobre todo en la última parte del estudio empírico final, la participación del conductor-investigador fue determinante en el avance de los estudiantes con respecto a los procesos de validación puestos en marcha. En esas ocasiones, el conductor promovió la explicitación de las conjeturas que los estudiantes elaboraron, así como de las razones que ellos tenían para hacer tales conjeturas. También, ocasionalmente, el conductor aportó a la discusión algunas consideraciones teóricas (hechos válidos dentro de la geometría euclidiana) que permitieran avanzar en la justificación matemática de las conjeturas y de las afirmaciones generadas en la actividad.

3.6. Los datos recolectados y su análisis

Los datos recabados en ambas fases empíricas de este proyecto de tesis provienen de tres fuentes:

1) Las respuestas y anotaciones en general que los estudiantes han escrito en los guiones de actividad.
2) Los archivos de Cabri que los estudiantes han generado a lo largo de las diferentes actividades.
3) Las grabaciones en video que se obtuvieron de las actividades de los estudiantes en algunas de las sesiones de trabajo en el laboratorio.

Se concibe el análisis de los datos a partir de las conexiones entre estas tres fuentes, de manera que lo que se llega a afirmar en relación con los comportamientos y con los logros de los estudiantes pueda ser sustentado, idealmente, por más de una evidencia empírica. Un aspecto a destacar en relación a los archivos de Cabri generados por los estudiantes, es que estos archivos se generan mediante una función de registro o grabación secuencial de las acciones que el usuario lleva a cabo con el software. Esta función permite revisar paso a paso un procedimiento de construcción o bien la secuencia de operaciones ejecutada por el usuario, lo cual representa una característica del software muy conveniente desde el punto de vista del investigador.

La revisión y el análisis de los datos se han llevado a cabo a través del siguiente procedimiento. Inicialmente se revisa el video que corresponde a un episodio de interés, seleccionando las partes que potencialmente aportan a la discusión desde la perspectiva de la tesis de investigación. A continuación, el desempeño y las acciones de los estudiantes mostradas en el video son comparadas y revisadas nuevamente, ahora en relación con sus respuestas al guión de trabajo correspondiente y con las construcciones realizadas durante el episodio bajo estudio. Esto permite obtener un panorama amplio en relación al desenvolvimiento de los estudiantes, que, si bien se enfoca esencialmente en el episodio seleccionado, no se limita exclusivamente a ese momento, puesto que es posible hacer un seguimiento al revisar las respuestas a los guiones de actividad y las construcciones (tanto con los pantógrafos como con Cabri) a lo largo del trabajo realizado en las sesiones previas. De esta manera se tiene la oportunidad de elaborar una descripción más precisa del desarrollo de cada participante respecto a las nociones y los procesos matemáticos en juego, así como de la forma en que la interacción con sus pares y con el conductor de las sesiones provoca modificaciones en sus comportamientos.

3.7. Cierre

Los aspectos relativos a la metodología de la investigación realizada se centran esencialmente en la adopción de situaciones de aprendizaje en las que se privilegia el desarrollo de actividades de indagación y de interacción social, motivadas por el uso de herramientas técnicas y tecnológicas que por sus cualidades constituyen el contexto externo de un potencial campo de experiencia matemática. Un segundo foco de atención es el que se refiere a la intención de llevar a los estudiantes a situaciones de validación en las que puedan recurrir a dichas herramientas y a la discusión sustentada en los hechos empíricos y en la teoría que alrededor de estos se va construyendo. Esto apoya la idea que se tiene en cuanto a la estrecha relación que el marco teórico y el metodológico mantienen en este planteamiento de investigación, es decir, el hecho de asumir la mediación a través de artefactos culturales como parte esencial de los procesos de aprendizaje y de formación matemática, condiciona en gran medida los escenarios y las actividades a desarrollar, así como las expectativas que se pueden tener en cuanto a los resultados de la investigación.

4. Presentación y discusión de resultados

Este capítulo se compone de tres partes: una primera parte en la que se señalan algunos de los resultados obtenidos en la fase de trabajo inicial de los estudiantes con el software de geometría dinámica; una segunda parte en la que se muestran y se discuten resultados del estudio inicial, señalando también sus implicaciones para la continuación de la parte empírica del proyecto de tesis; por último se presentan y se discuten resultados de investigación obtenidos al llevar a cabo el estudio final.

4.1. Construcciones iniciales en Cabri

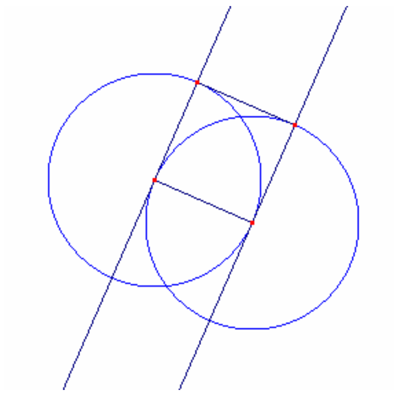
La primera actividad (Apéndice I) tuvo por objetivo que los estudiantes se familiarizaran con el software, que conocieran la manera general de trabajar con éste y que experimentaran algunas construcciones iniciales a fin de que se percataran de la diferencia entre llevar a cabo construcciones geométricas en las que las propiedades requeridas se establecen o se satisfacen de forma meramente visual y realizar construcciones recurriendo a herramientas del software que permiten atender las relaciones geométricas que definen a la figura por construir. Para esto la función de arrastre de los objetos geométricos base de la construcción es esencial puesto que permite observar directamente la conservación de las propiedades requeridas o, por el contrario, la descomposición de la figura. Esta toma de conciencia, o el asumir que los objetos geométricos pueden transformarse conservando sus propiedades características, no es inmediata, los estudiantes inicialmente procuran que sus construcciones presenten una configuración estándar o típica del objeto en cuestión, que “muestre” las propiedades características que lo definen. Tal construcción es obtenida, generalmente, ejerciendo un control esencialmente visual en la pantalla de la computadora, de los objetos involucrados en el procedimiento, es decir, no se ejerce un control teórico de la construcción geométrica. Las primeras reacciones de los estudiantes a la demanda de que sus construcciones conserven la propiedad solicitada, aún cuando los objetos base sean arrastrados, son de resistencia a modificar la configuración, o bien a tratar de ajustar nuevamente los objetos base de la construcción. Los estudiantes llegan a señalar que no se debe modificar en absoluto la figura a fin de que mantenga la configuración que parece satisfacer la condición requerida, o bien tratan de recomponer la figura una vez que se ha arrastrado alguno de los objetos base.

En estas primeras tareas, las intervenciones del conductor es se dirigieron a hacer notar la necesidad de utilizar herramientas o comandos del software que garantizaran que el procedimiento de construcción atendía a las propiedades geométricas características de los objetos requeridos. La ineficacia de las primeras construcciones, evidenciada mediante el arrastre de los objetos base de la construcción, obligó a los estudiantes a buscar otros procedimientos que les permitieran efectivamente satisfacer la condición establecida. Una vez que los estudiantes asumieron la necesidad de construir figuras que conservasen sus propiedades geométricas esenciales, entonces comenzaron a identificar las propiedades geométricas características del objeto involucrado y a buscar las herramientas del software con las cuales desarrollar un procedimiento de construcción en el que tales propiedades estuviesen inherentemente involucradas, lo cual representa ya un control teórico de tal procedimiento.

- Algunas de las respuestas de los estudiantes a los guiones de actividad

Rodrigo describe su construcción de un cuadrado a partir de dos puntos cualesquiera:

> *Primero se localizan dos puntos, ya localizados se hace una circunferencia desde uno de los dos puntos, en el punto que se intersecta la recta con la circunferencia se traza una perpendicular y obtenemos los dos puntos restantes.*



La descripción no es suficientemente específica; sin embargo, su construcción en Cabri (mostrada arriba) permite apreciar el procedimiento efectuado. Él construye circunferencias con centros en los extremos del segmento determinado por los puntos base de la construcción y cuyo radio es el segmento mismo, después construye perpendiculares al segmento por sus extremos, seleccionando intersecciones de las perpendiculares con las circunferencias del mismo lado del segmento para determinar los dos vértices restantes del cuadrado. Cuando se le indica que justifique o que haga explícitas las razones por las que su construcción satisface la condición requerida, es decir, las razones por las cuales conserva las propiedades características al arrastrar los objetos base de la construcción, Rodrigo escribe lo siguiente:

> *Esta figura geométrica tiene una medida de 90° en cada ángulo con lo que se forma un cuadrado [,] para que tuviera la misma medida en sus cuatro lados trazamos una circunferencia intersectando cada vértice y así se formaban los cuatro lados del cuadrado exactos y con las mismas proporciones.*

Por su respuesta, podemos suponer que Rodrigo está involucrado en el proceso de interiorizar una de las características esenciales de los objetos de geometría dinámica, las construcciones geométricas pueden transformarse, sin perder sus propiedades definitorias o invariantes, a condición de que el procedimiento de construcción incorpore las relaciones o los objetos geométricos pertinentes, mediante el empleo de las herramientas disponibles. Su propio procedimiento de construcción le permite hacer afirmaciones referentes a lo que él sabe acerca de un cuadrado, y que se hacen evidentes en la construcción misma.

Juan Carlos lleva a cabo un procedimiento semejante al de Rodrigo para construir un cuadrado a partir de dos puntos, él lo describe de la siguiente forma:

1- Marcar el punto A y B, hacer dos círculos alrededor de ellos

2- Unir A B

3- Marcar las paralelas

4- Unir los puntos de intersección

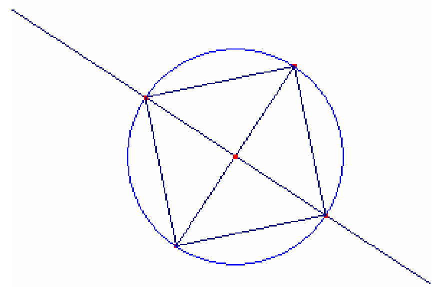
Después de esto, Juan Carlos presenta la siguiente justificación de su procedimiento de construcción:

> *Se justifica, porque el segmento trazado y sus puntos de intersección son los mismos con respecto al centro del círculo. Esto provoca que al arrastrar los vértices se agranden los círculos y perpendiculares de igual forma.*

Al trazar el círculo se garantiza que los segmentos del centro a cualquier punto de la circunferencia sean congruentes; Juan Carlos trata de justificar la validez de su procedimiento haciendo notar esa congruencia. Es notable también que él se esté refiriendo ya al efecto dinámico (y funcional) visible por medio del arrastre de los objetos base, y que se va constituyendo en un primer criterio de validación de sus procedimientos constructivos.

Por su parte, Trinidad ha desarrollado un procedimiento distinto al de Rodrigo y de Juan Carlos para construir un cuadrado. Ella hace la siguiente descripción de su procedimiento:

> *Se traza un segmento y se cruza por una mediatriz, se forma una circunferencia y dentro de ésta se forma un cuadrado.*



La construcción que ha hecho Trinidad (mostrada arriba) parte de considerar el segmento formado por los dos puntos base de la construcción como una de las diagonales del cuadrado. Ella utiliza la mediatriz del segmento y una circunferencia con centro en el punto medio del segmento para determinar la segunda diagonal. Trinidad recurre a nociones geométricas que aplica eficazmente en su construcción. Cuando se le pide que justifique o que haga explícitas las razones por las que su construcción satisface la condición requerida, ella escribe lo siguiente:

> *Esta figura geométrica tiene ángulos de 90° con cuatro lados iguales con lo que formamos un cuadrado al cual lo pusimos dentro de un círculo de esta forma se comprueba que tiene sus cuatro lados iguales.*

Como en el caso de Rodrigo, lo que Trinidad escribe parece ser más una confirmación de que su construcción satisface los requerimientos establecidos, sustentada en la observación o en la posibilidad de hacer ostensibles, mediante la función de arrastre, las propiedades características del objeto geométrico obtenido.

Una dificultad que a menudo enfrentan los estudiantes en sus primeras construcciones consiste en cierta imposibilidad para definir, desde la secuencia de la construcción, de manera explícita las relaciones entre los objetos involucrados, esto provoca casos como el siguiente: Al arrastrar uno de los extremos de un segmento, el círculo que se había construido teniendo, supuestamente, como diámetro ese segmento, permanece estático, cuando lo que se esperaba era que mostrase una relación funcional con el segmento base de la construcción. Los estudiantes necesitan tomar conciencia de que para establecer estas relaciones funcionales ellos deben aprender a interactuar convenientemente con el software, aprender a interpretar los mensajes que el software les presenta durante una secuencia constructiva, o aprender a señalar con el puntero de manera precisa los objetos iniciales y finales de una construcción, aún las más elementales.

Podemos observar en estas primeras actividades el inicio de un proceso en el que la función de arrastre de los objetos base de las construcciones además de ser una herramienta de control externo basado en lo que el usuario percibe para verificar la pertinencia de la construcción, llega a ser el signo externo de un control teórico (interno) de la construcción geométrica realizada y del procedimiento de construcción desarrollado; es decir, las actividades y la disponibilidad de la herramienta, con sus características intrínsecas, estimulan en los estudiantes la búsqueda, la utilización y la explicitación de las propiedades geométricas características de los objetos cuya construcción llevan a cabo. Se esperaría que este proceso condujera a una referencia sistemática de las propiedades geométricas en juego como formas de garantizar la validez de una construcción y como formas de explicar o de justificar resultados o afirmaciones obtenidas en las actividades mismas. Esta transformación de una herramienta de control externo a un signo externo de un control teórico, ya ha sido señalada por Mariotti (2002) al referirse a *la función de arrastre* como uno de los objetos concretos que ofrece el contexto externo de un campo de experiencia de las construcciones geométricas en Cabri: "la función de arrastre […] comienza como una herramienta de control perceptual para verificar la corrección de la construcción y después llega a ser el signo externo del control teórico." (p. 7…). La función de arrastre se convertirá en parte de un *esquema de utilización* (Verillon y Rabardel, 1995, p. 86) que llega a ser habitual en los estudiantes cuando llevan a cabo construcciones y exploraciones geométricas en el ambiente de Cabri. Esto se mostrará más adelante en esta presentación de resultados.

4.2. Estudio inicial

A fin de llevar a cabo un estudio empírico que permitiera orientar de mejor manera la investigación, se formuló una hipótesis de trabajo sustentada en resultados de otras investigaciones (Bartolini, 1993; Vincent et al., 2002) que indican el papel que puede tener la manipulación de materiales concretos, particularmente las máquinas matemáticas articuladas, en la génesis del conocimiento científico-teórico contemporáneo basada en la relación entre lo específico y lo general, entre lo concreto y lo abstracto (Bartolini, 1993, p. 98), y también en el descubrimiento de relaciones y propiedades geométricas de los objetos representados mediante esta clase de materiales concretos. También se consideró la utilización de geometría dinámica como un complemento (Hoyos, 2002) a la actividad con las máquinas articuladas. Se esperaba generar, de esta manera, un *campo de experiencia* (Bartolini y Boero, 1998, p. 53) referido a las transformaciones geométricas elementales. Se consideró también, desde la perspectiva del marco referencial de la tesis, la *unidad cognitiva de un teorema* (Boero, et al., 1996), noción que hace énfasis en la "continuidad" entre los argumentos presentados para hacer plausible una conjetura y los argumentos empleados para construir una prueba. La hipótesis de trabajo planteada para este estudio fue la siguiente:

Las herramientas y las actividades utilizadas permiten generar un campo de experiencia relativo a las transformaciones geométricas, y permiten que los estudiantes se involucren en situaciones de validación referidas a dicho campo.

Se asume que el contenido geométrico en el software y en las máquinas articuladas no es trivial o inmediato para los estudiantes, es decir, se requiere llevar a cabo una actividad adecuada y un esfuerzo personal y colectivo para reconocer y hacer explícitas las propiedades que definen las transformaciones geométricas "concretizadas" en tales medios. Es decir, no basta con manipular adecuadamente las herramientas y observar los resultados que esto produce, es necesario desarrollar una actividad sistemática de indagación con respecto a esos resultados y promover la reflexión interpersonal e intrapersonal para llegar a estructurar los hechos geométricos inherentes; establecer relaciones, comparar configuraciones, descubrir invariantes, etc.

Se recurrió también a la clasificación de los niveles de apropiación de las transformaciones geométricas que emplea Sangaré (1999) inicialmente propuesta por Grenier y Laborde (1988), y complementada con las aportaciones de Jahn (1998), con la finalidad de tener más elementos con los cuales discutir acerca de los posibles cambios en el contexto interno de los estudiantes, referido a un potencial campo de experiencia de las transformaciones geométricas.

Estas consideraciones, junto con la revisión bibliográfica que se tenía en ese momento (ver apartado 2.1.2), permitieron proponer preguntas en referencia a la hipótesis de trabajo ya señalada, tales preguntas son las siguientes:

- *¿El software de geometría dinámica y las máquinas matemáticas son herramientas adecuadas para generar un campo de experiencia en torno a las transformaciones geométricas?*, si es así,
- *¿Qué cambios se observan en las conceptualizaciones de los estudiantes respecto de las transformaciones geométricas?,*
- *¿Cuál es el papel de los guiones de actividad y de la interacción social en ello?*,
- *¿Cómo abordan los estudiantes situaciones de validación en este escenario?*

A continuación se hace una revisión y un análisis de cuatro episodios en los que se presenta el desempeño de los estudiantes durante este primer estudio empírico. Con esto se trata de proponer cierto nivel de respuesta a esas preguntas.

4.2.1. Los cambios en el contexto interno de los estudiantes con respecto al campo de experiencia de las transformaciones geométricas

En este estudio ha sido posible observar cambios en la manera en que los estudiantes utilizan y se refieren a las transformaciones geométricas al llevar a cabo las actividades en los dos escenarios de aprendizaje, Cabri y los pantógrafos, así como en la resolución de problemas. Esto nos lleva a tratar de identificar alguna evolución en cuanto al nivel de aprehensión que los estudiantes tienen de algunas de estas transformaciones y a argumentar en torno al desarrollo de un campo de experiencia geométrica.

- El caso de David y Sergio estudiando la simetría central

Las diferentes secuencias de actividades permiten observar cambios en el contexto interno de los estudiantes. Se presentan a continuación las respuestas de David y Sergio a las actividades correspondientes a la simetría central utilizando inicialmente Cabri; en un segundo momento, con la máquina articulada y, finalmente, en la resolución de un problema. Simultáneamente, se hace un análisis de estas respuestas en términos de la noción de campo de experiencia y de las conceptualizaciones aprehendidas por los estudiantes de la transformación geométrica en juego.

<u>La exploración en Cabri-Géomètre</u>
Después de las indicaciones, en el guión de la actividad, para llevar a cabo una exploración de la simetría central, se plantean las siguientes instrucciones (las respuestas de David y Sergio aparecen en cursivas).

g) Caracteriza el objeto geométrico imagen de una simetría central.

En la simetría central del triángulo, el triángulo imagen:

- está al contrario del triángulo

- se deforma el triángulo imagen al mover ya sea el punto a, b, o c

- están a la misma distancia del punto

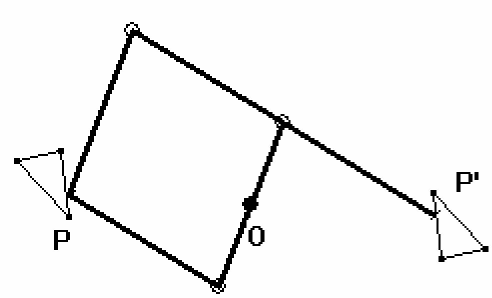
h) Da una definición de simetría central.

La simetría central es la copia con un giro de 180° de cualquier objeto que para crearlo se necesita un objeto cualquiera y un punto cualquiera en el cual se maneja una recta entre el punto y el objeto

Si bien estas primeras referencias que David y Sergio hacen de la simetría central muestran cierta noción de dependencia entre una figura y su imagen, parece tener mayor peso la impresión visual que genera el arrastre de los objetos base, esto sugiere que ellos conciben esta transformación como una relación entre dos configuraciones geométricas o entre dos partes de una misma configuración, el primer nivel de la clasificación que presenta Sangaré (1999) de las concepciones que los estudiantes tienen de las transformaciones geométricas y que corresponde a "…un dominio espacio-gráfico referido directamente a los elementos geométricos euclidianos involucrados…" (p. 29). También podemos asumir que ellos intuyen el invariante de esta transformación (el centro de simetría es el punto medio de los segmentos formados por puntos correspondientes), aunque esto no destaca entre otras propiedades que ellos perciben, y que pudiéramos considerar como circunstanciales.

La exploración de la simetría central en la máquina articulada

Posteriormente, David y Sergio llevan a cabo la actividad planeada para trabajar con el pantógrafo de simetría central. Se muestra un esquema de este a continuación; O es el punto fijo de la máquina y P y P' son los trazadores.



Sus respuestas a algunas de las preguntas planteadas fueron las siguientes.

3.b) <u>En la máquina articulada</u> ¿Cuáles son las propiedades geométricas que distingues entre sus diferentes componentes?

> *Se maneja un giro de 180° en cualquiera de sus objetos que se dibujen. Las varillas de la máquina forman un paralelogramo*
>
> *Los puntos de las varillas en las que llevan las plumas están alineados siempre con el centro de simetría.*

En esta respuesta, David y Sergio confirman la idea que tienen en cuanto a la relación de "giro de 180°" que existe entre un objeto y su imagen simétrica, aunque no establecen explícitamente la coincidencia entre el centro de simetría y el centro de rotación. También reconocen en la estructura de la máquina un paralelogramo, así como la alineación entre los trazadores de la máquina y el pivote-centro de simetría de ésta. En ese momento, ellos están avanzando en la precisión del invariante que caracteriza a esta transformación.

4) Una vez que has explorado con la máquina la transformación geométrica que genera, trata de identificar alguna propiedad invariante, es decir, <u>alguna propiedad que se verifique en cualquier configuración geométrica</u>, o bien que se verifique con cualquier par de puntos correspondientes bajo la transformación.

a) Escribe la propiedad o las propiedades identificadas. ¿Por qué consideras que esa o esas propiedades se verifican siempre en la máquina? Trata de encontrar argumentos matemáticos para esto.

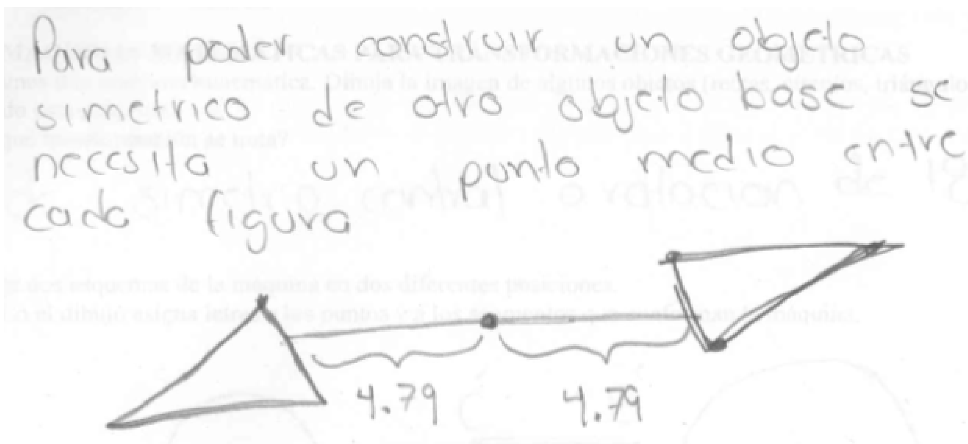
> *Los puntos donde están las plumas siempre están alineados al punto de simetría ya que siempre se maneja un giro de 180°*
>
> *Siempre están a la misma distancia del punto de simetría*

David y Sergio ya han señalado las propiedades geométricas esenciales de la simetría central: la alineación entre puntos correspondientes y el centro de simetría, y la equidistancia de los primeros respecto al segundo. Se refieren ahora al giro de media vuelta para explicar la alineación entre los puntos. La actividad los ha inducido a identificar lo esencial de esta transformación, dejando a un lado aspectos circunstanciales o ambiguos surgidos en la exploración inicial mediante el software.

b) Coloca un punto sobre uno de los objetos trazados. ¿Cómo encuentras o trazas, <u>sin utilizar la máquina</u>, el punto imagen? Describe tu procedimiento.

Calculando la mitad o el punto medio entre cada figura

c) Trata de construir una prueba teórica de que tu procedimiento de trazado o de construcción es correcto.

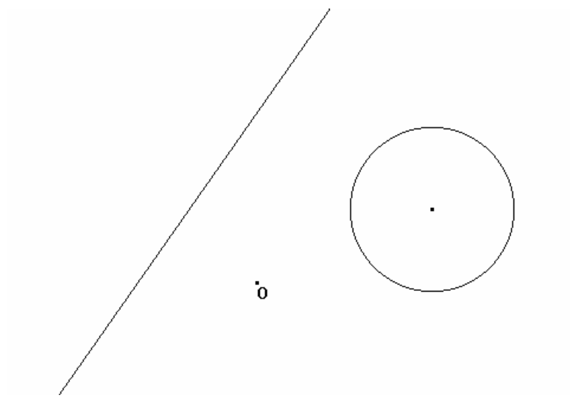


El argumento presentado para justificar su procedimiento de construcción se apoya en el invariante de la simetría central. David y Sergio han interiorizado una representación que corresponde adecuadamente con lo que sería una representación genérica de esta transformación geométrica, y que muestra consistentemente el invariante característico de la misma. Ahora comienzan a considerar esta transformación como “una aplicación puntual del plano sobre sí mismo”, aproximándose a una noción funcional, que corresponde con el segundo nivel de aprehensión señalado por Sángare (1999), en la que la posición y la forma de la imagen están determinadas de manera inequívoca por la posición de los objetos base de la transformación: el objeto antecedente y el centro de simetría en este caso.

Resolución de un problema

Con posterioridad a la actividad con el pantógrafo, se pide resolver el siguiente problema:

- Se dispone de una circunferencia, de una recta y de un punto O. Construir un segmento AB de tal manera que O sea el punto medio de AB y que A esté sobre la circunferencia y B sobre la recta. Indagar acerca de la posibilidad de diferentes soluciones.



A los estudiantes se les ha indicado que exploren el problema, buscando con cuál o cuáles de las transformaciones que han revisado podrían resolverlo satisfactoriamente. David ha ensayado una posible solución utilizando el pantógrafo de simetría central, inicialmente ha trazado dos segmentos de recta simétricos (l y l' en la Figura 1), referidos como rectas en la trascripción que sigue, y después una circunferencia que "toca" a uno de ellos (la parte derecha de la Figura 1), percatándose, en ese momento, de que puede trazar un segmento de recta que satisface las condiciones planteadas en la tarea; esto lo convence de que la simetría central es la transformación que permite resolver adecuadamente el problema. El conductor de la sesión interviene para que David explique su idea:

Conductor: *¿David, cuál sería tu idea para resolver el problema?*

David: S*ería trazar la simetría central de esta recta* (l) *con base a este punto* (O)*, creando así una recta simétrica, ya tenemos un punto* *medio, sería la misma distancia que hay de esta recta* (l) *al punto* (O) *e igual de esta recta* (l') *al punto, y sería trazar un círculo al lado de la recta y así tendríamos lo que nos dan al principio una recta, un punto y una circunferencia. Si trazamos un segmento de un punto de la circunferencia a la recta ya tendríamos el punto medio con la misma distancia en ambos lados.*

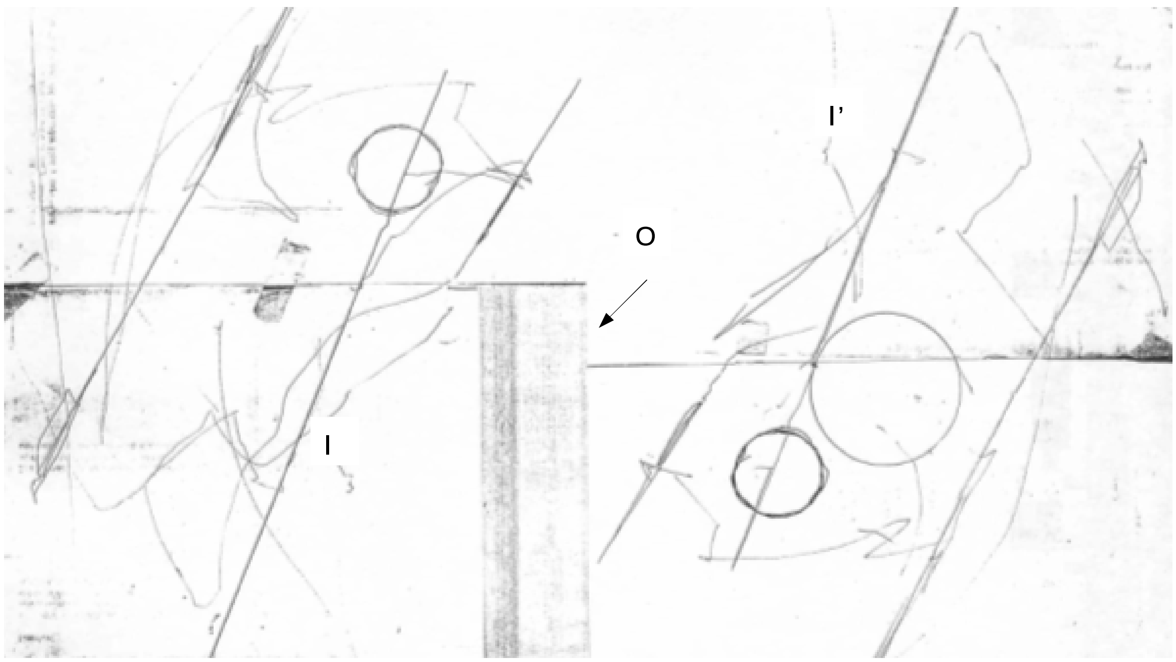


Figura 1

David explica cómo están relacionados los elementos de su construcción para hacer ver que la condición requerida se satisface; aunque su construcción no se ajusta a la situación inicialmente planteada en el enunciado, puesto que primero traza dos segmentos simétricos y después una circunferencia; presenta una configuración en la que el problema está resuelto, y a partir de ésta trata de hacer ver la pertinencia de utilizar la simetría central; esto hace suponer que se ha apropiado de la situación planteada y que ha visualizado una solución. Sustenta su argumentación esencialmente en el papel que tiene el centro de simetría del pantógrafo como punto medio de los segmentos determinados por puntos correspondientes en la transformación. David asume que el punto en el que una de las rectas simétricas "toca" la circunferencia, tiene su correspondiente sobre la recta simétrica, y que ambos puntos determinan un segmento bisecado por el centro de simetría.

Cabe aclarar que el problema planteado puede tener dos soluciones, una o ninguna, dependiendo de que la imagen de la recta dada sea, respectivamente, secante, tangente o ajena a la circunferencia. También es posible resolver el problema obteniendo la imagen de la circunferencia dada. David se refiere al caso en el que la recta imagen es tangente a la circunferencia, y pareciera que deliberadamente está buscando ese caso; él continúa su exploración de la situación planteada en la tarea tratando de reproducirla en Cabri. Finalmente David y Sergio responden de la siguiente manera a las preguntas del guión de actividades:

a) ¿Cuál o cuáles de las transformaciones geométricas revisadas serían adecuadas para resolver el problema? Explica tu respuesta.

> *La simetría central, trazamos una recta, un punto O y un círculo, realizamos la simetría central de la recta con base el punto O, la recta que se creará cruzará la circunferencia en un punto cualquiera, trazamos una semirrecta y de un punto cualquiera de la primera recta al punto en que la recta imagen fue cruzada en el círculo.*

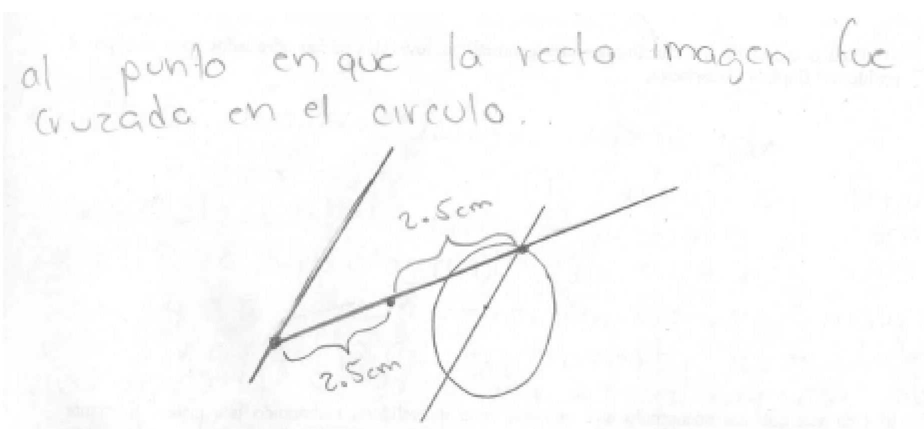


Figura 2

El procedimiento descrito refleja la utilización de Cabri para confirmar lo que ya David ha planteado como solución. Su construcción dinámica consiste en construir un punto sobre la recta antecedente y una semirrecta que parte de ese punto y pasa por el centro de simetría, a continuación David arrastra el punto sobre la recta hasta que la semirrecta coincide con una de las intersecciones entre la circunferencia y la recta imagen, la intersección que satisface la condición plateada en el enunciado, como lo muestra el dibujo que él mismo presenta en sus hojas de trabajo (Figura 2).

b) Una vez que has encontrado una solución, trata de validarla elaborando una prueba mediante argumentos matemáticos, es decir, propiedades o conceptos matemáticos que le den validez a tu solución.

Una simetría central es una representación de cualquier objeto con un punto como base con un giro de 180°, si creamos una recta simétrica de otra con el punto que nos dan como base, se creará la simétrica de la recta cruzando una parte del círculo y así al ser una simetría en las rectas habrá el mismo tamaño entre cada recta colocando el punto O como punto medio entre cada recta

En las respuestas anteriores, esta pareja de estudiantes elabora argumentaciones en las que nuevamente tratan de relacionar el invariante de esta transformación con la situación planteada en el enunciado del problema y con la aplicación de la transformación misma para resolverlo. Podemos decir que su conceptualización respecto a la simetría central ha evolucionado, puesto que distinguimos en sus respuestas y en sus acciones rasgos característicos del tercer nivel según la clasificación utilizada por Sangaré (1999): “La transformación es considerada como una herramienta funcional con la finalidad de poner en evidencia invariantes o con la finalidad de resolver problemas.” (p. 29). David y Sergio han sido capaces de visualizar la transformación en la situación planteada en el enunciado y de utilizarla con eficacia para mostrar la pertinencia de su solución, desprendiéndose, en buena medida, de las herramientas de mediación con las que han trabajado.

Tal como lo señala Bartolini (2000, p. 5), esta “pérdida de materialidad permite tomar distancia de los hechos empíricos, transformando la evidencia empírica del dibujo que representa una solución [...] en la representación externa de un proceso mental”. Finalmente, constatamos en las diferentes fases de la actividad, cierto enriquecimiento en cuanto a las herramientas geométricas que los estudiantes manejan y en cuanto a la manera en cómo se refieren a esa transformación, ambos aspectos constituyen elementos del desarrollo de un campo de experiencia (Bartolini y Boero, 1998, p. 53) referido, en este caso, a las transformaciones geométricas.

- El caso de Alma al explorar la homotecia utilizando Cabri

Se presentan en esta parte algunas de las respuestas dadas por Alma cuando ha estado realizando las actividades correspondientes con la homotecia utilizando Cabri. Al igual que en el apartado anterior, interesa saber si las actividades y las respuestas producidas por esta estudiante permiten evidenciar un cambio en la conceptualización de los objetos y los procedimientos geométricos presentes en las actividades de aprendizaje, o bien, si es posible constatar un enriquecimiento progresivo del conjunto de herramientas geométricas que esta estudiante utiliza para abordar las actividades y responder a los cuestionamientos que se le plantean.

Alma ha explorado la homotecia a partir de un triángulo y su imagen, expresando lo que ella percibe como los efectos que el arrastre de los objetos base tiene sobre los objetos construidos a partir de ellos.

d) ¿Cuáles objetos puedes variar y cuáles no?, ¿Por qué?

> *Los del triángulo ABC se pueden mover, los del triángulo A’B’C’ no se pueden mover, porque como el triángulo A’B’C’ fue hecho a una escala con el triángulo ABC, depende de éste, en especial de sus medidas.*

e) Si movemos o variamos el triángulo ABC, entonces… *es independiente.*

Alma se refiere al triángulo antecedente como un objeto independiente, y al triángulo imagen como “una escala” del primero.

e.1) Antes de encontrar la imagen homotética de un punto P sobre el triángulo ABC por medio de la herramienta **Homotecia**, ¿en dónde supones que estará la imagen homotética del punto P? Escribe tu suposición.

En el mismo lado y mismo lugar, pero en el triángulo A’B’C’

e.2) Utiliza ahora la herramienta **Homotecia** para encontrar la imagen P’ en A’B’C’. Mueve el punto P y observa qué pasa con su imagen P’. Anota tus observaciones.

Al mover el punto P se mueve el punto P’ en el triángulo A’B’C’ de la misma forma.

f) Describe cómo podrías encontrar la imagen homotética de cualquier punto P, <u>sin utilizar</u> la herramienta **Homotecia** de Cabri.

Con la relación que hay entre el punto O y los puntos ABC con su homotético forman líneas rectas. Así podemos trazar una línea recta que pase por el punto O y el punto P. Donde cruce la recta el lado homotético al lado donde está el punto, será el punto homotético de P.

i) Construye la imagen de otros objetos geométricos, como un segmento de recta y un círculo, explora su homotecia anotando tus observaciones.

Con un segmento de recta se forma una paralela al primer segmento

j) Caracteriza el objeto geométrico imagen de una homotecia. Anota las propiedades geométricas que éste tiene en relación con los elementos básicos de esta transformación (el centro, la razón de homotecia y el objeto antecedente).

En el primer círculo, el radio multiplicado por el factor de homotecia nos da como resultado el radio del círculo homotético.

La identificación de invariantes de esta transformación geométrica se hace explícita en las dos últimas respuestas: la alineación entre puntos correspondientes y el centro de homotecia, y la relación entre el factor de homotecia y las medidas relativas entre segmentos correspondientes, además de que estos son paralelos. También la respuesta de Alma a lo que se le requiere en el inciso j hace suponer que su conceptualización de la homotecia se ha enriquecido, puesto que ella se refiere explícitamente a la relación multiplicativa entre un objeto y su imagen, determinada por el factor de homotecia. Sin embargo, las respuestas aún están limitadas a puntos que pertenecen a objetos antecedentes de los que ya se tienen construidas sus imágenes.

Por último se pide:

k) Da una definición general de homotecia.

Es una escala a mayor o menor de la primera figura.

Esta actividad tenía por objetivo llevar a los estudiantes a una formulación general de la homotecia, en el sentido de desarrollar un procedimiento para encontrar la imagen de un objeto geométrico específico, dados la razón y el centro de homotecia. Esto no sucede así, ¿cuáles pueden ser las razones de esto? En principio, las instrucciones que se dan en las hojas de trabajo tendrían que ser más explícitas a fin de inducir a los estudiantes a considerar un punto cualquiera y no sólo un punto sobre un objeto del que se tiene también su imagen, o más aún, pedir que se construya la imagen de un objeto sin recurrir a ninguna de las herramientas utilizadas durante la exploración. Sin embargo, al parecer el desarrollo de un procedimiento de construcción utilizando herramientas comunes como regla, compás y escuadras, no es una tarea que los estudiantes puedan llevar a cabo, de forma inmediata, como consecuencia de la actividad de exploración de la homotecia por medio del software, aún si ellos intuyen o pueden reconocer las propiedades que definen esa transformación.

El nivel en el que Alma conceptualiza la homotecia, atribuible en términos de lo que ella responde en las hojas de trabajo, no se limita a una relación dimensional y de posición entre figuras geométricas, si bien ella enfatiza la relación escalar entre figuras (quizá por convicción en cuanto a lo que ella percibe como el objetivo de la actividad), sus respuestas muestran rasgos que caracterizan a esta transformación como la aplicación puntual del plano en sí mismo (Sangaré, 1999), destacando la noción de dependencia de la imagen respecto a la figura antecedente y el valor de la razón de homotecia como el determinante específico de la relación escalar.

En conclusión, las dos situaciones experimentales presentadas nos permiten constatar un compromiso favorable de los estudiantes con las actividades de aprendizaje, en el sentido de alentar la generación de un campo de experiencia referido a las transformaciones geométricas. En este proceso las herramientas de mediación (el software, los pantógrafos y los instrumentos de geometría) juegan el papel de contexto externo del campo de experiencia en el que subyacen las nociones y las propiedades geométricas de interés; complementariamente, los guiones de actividad permiten centrar las acciones de los estudiantes hacia el reconocimiento y la apropiación de tales nociones y propiedades. Es factible entonces constatar cambios en el contexto interno de los estudiantes, en términos de la forma en que se refieren a las transformaciones geométricas y las utilizan para dar respuesta a las situaciones que se les plantean, lo cual permite identificar niveles de conceptualización de las mismas. Por otro lado es importante considerar modificaciones pertinentes en las secuencias de trabajo a fin de que los estudiantes estén en posibilidad de avanzar hacia la elaboración de argumentos y de pruebas matemáticas, en este sentido se considera necesario estimular el análisis teórico de las herramientas de mediación empleadas.

4.2.2. La posibilidad de involucrar a los estudiantes en situaciones de validación

Una parte esencial de esta tesis se enfoca en el análisis de la racionalidad que los estudiantes ponen en juego y exteriorizan en situaciones de validación (Balacheff, 1997), es decir, situaciones en el salón de clases en las que se les requiere justificar las aserciones o los resultados que ellos obtienen al llevar a cabo las actividades planeadas. En esta primera serie de sesiones de trabajo en el laboratorio fue posible observar a los estudiantes involucrándose genuinamente en procesos de validación de sus propias afirmaciones o resultados. El escenario de aprendizaje estimuló el compromiso de los estudiantes en un proceso de conjetura y argumentación, en el que las herramientas disponibles y los recursos desarrollados por los propios estudiantes, son utilizados productivamente. Para mostrar esto revisaremos las actividades que Antonio y Eutimio llevaron a cabo, respecto a la rotación, así como un argumento propuesto por una de las estudiantes en el proceso de resolución de un problema.

- Eutimio y Antonio trabajando con el pantógrafo de Sylvester

Antonio y Eutimio llevan a cabo la actividad de exploración del pantógrafo de Sylvester (Figura 3), el cual produce rotaciones. Tienen como antecedente el estudio de esta transformación utilizando Cabri. Ellos han determinado el ángulo de la rotación que produce el pantógrafo haciendo mediciones sobre las figuras que han obtenido y asociando este ángulo a la estructura del pantógrafo, concretamente a los ángulos ECB y BAD representados en el esquema del pantógrafo que se muestra a continuación.

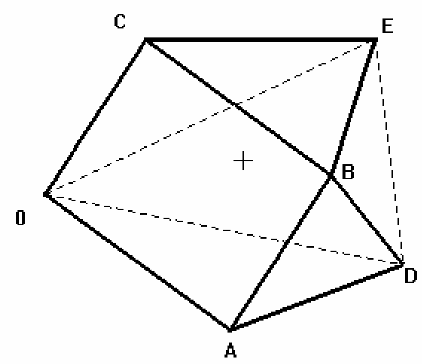


Figura 3

Esta pareja de estudiantes ha llevado a cabo un procedimiento de construcción para responder el siguiente requerimiento:

4.b) Coloca un punto sobre uno de los objetos trazados. ¿Cómo encuentras o trazas, sin utilizar la máquina, el punto imagen? Describe tu procedimiento.

Antonio:

> *Del punto O al X trazamos un segmento, después medimos el ángulo de 40°, al encontrar el ángulo trazamos una recta y por último medimos la recta imagen para encontrar X'.* (La respuesta de Eutimio es similar a ésta)

Si bien sus respuestas indican la apropiación del procedimiento de construcción geométrica que implica la rotación, es importante conocer la forma en que ellos llegan a establecer esto, para lo cual se ha revisado el video que se hizo en ese momento de su trabajo. Previamente, Antonio y Eutimio han dibujado con el pantógrafo dos arcos (Figura 4) sobre las hojas que cubren la tabla en la que este pantógrafo está montado, y han dibujado, también con el pantógrafo, un par de trazos cortos sobre los arcos etiquetándolos como P y P', de manera que visualizan claramente el resultado de lo que la instrucción les pide describir, omitiendo la condición de no utilizar la máquina.

Como veremos, los objetos que han dibujado con el pantógrafo serán usados adecuadamente para validar su propio procedimiento de construcción. Utilizando regla y transportador, construyen una recta que parte del centro de rotación en el pantógrafo (el vértice O en la Figura 3) y que está girada 40° respecto a la recta previamente trazada que une el centro de rotación y el punto P, prolongándola hasta la intersección con el arco del segmento circular considerado como imagen en la transformación, ellos constatan que esta intersección coincide con P', la imagen de P. Su procedimiento los lleva a obtener el mismo resultado que el obtenido mediante el pantógrafo, lo cual les da confianza para responder en términos prácticos a un requerimiento teórico:

4.c) Trata de construir una prueba teórica de que tu procedimiento de trazado o de construcción es correcto.

Ambos dan la misma respuesta:

> *Porque utilizamos el mismo ángulo de la máquina en nuestro procedimiento.*

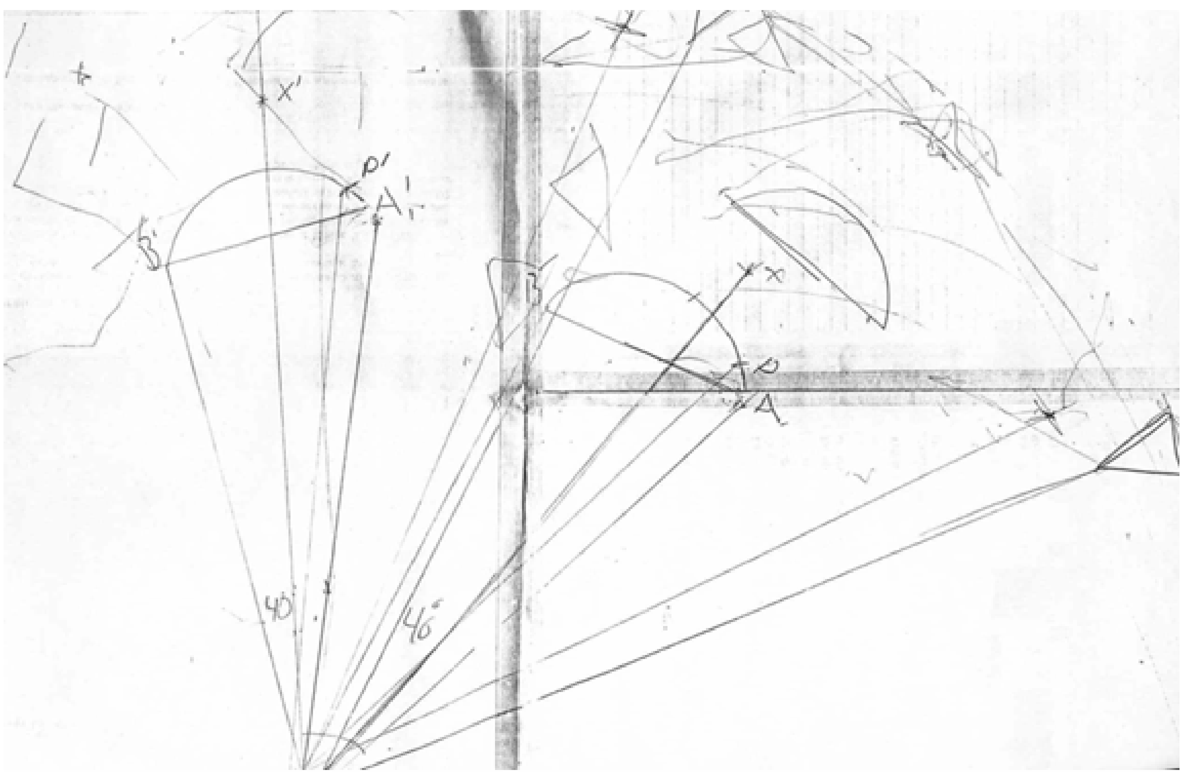


Figura 4

Su respuesta está constreñida al contexto particular en el que han realizado la experiencia. Podemos decir que la confirmación que ellos obtienen de lo que la máquina produce al llevar a cabo su propio procedimiento, les basta para justificar el procedimiento mismo. Tal como lo señala Balacheff (1987), la situación permite una prueba pragmática, las pruebas pragmáticas son testificadas por la acción y no por el discurso, los estudiantes tiene acceso a la constatación empírica y esto no los estimula a buscar alguna otra forma de justificar que su procedimiento es correcto, lo cual se hace evidente en el diálogo que se genera atendiendo a un requerimiento del conductor:

Conductor: *Y si yo les diera un punto… no sobre una figura, sino, así nada más, este punto,* (Marcando un punto sobre la hoja que cubre la tabla y denotándolo con la letra *x*)*, ¿Podrían encontrar su correspondiente según esta rotación?*

Eutimio: *Sería el mismo procedimiento.*

Antonio: *O sea, ¿Lo podemos sacar... o cómo dices?* (Señalando sobre la tabla una posible localización de la imagen del punto trazado por el conductor)

Conductor: *Si, ¿Cómo podrían encontrar el* (correspondiente) *de este punto?*

Eutimio procede a hacer nuevamente la construcción, utilizando regla y transportador, para encontrar la imagen del punto dibujado en la hoja. Simultáneamente, el conductor interviene con la intención de que ellos expliquen su procedimiento:

Conductor: *A ver Antonio, mides los 40°, ahí está ya* (Eutimio ya ha trazado una recta que une el centro de rotación con el punto *x,* y ha llevado a cabo el desplazamiento angular correspondiente, marcando otro punto)*; ¿Y después?*

Antonio: *… trazas una línea que vaya al infinito, o ¿algo así?*

Conductor: *No se, a ver cómo…*

Eutimio: *Por este punto pasaría por los 40°.*

Antonio: *¿Dónde?*

Eutimio: *No se…espérame* (Nuevamente localiza el punto con el que se apoya para determinar la rotación de 40°)

Antonio: *Si, que vaya al infinito, luego alargamos acá, luego una medición de aquí a acá…*

Antonio está explicando la manera de determinar la imagen del punto indicado por el conductor de la sesión (al tiempo que Eutimio lleva a cabo dicho procedimiento). Inicialmente señala la semirrecta que corresponde a una rotación de 40° de la semirrecta que parte del centro de rotación de la máquina y pasa por el punto *x* (figura 4), e indica su prolongación; después indica la existencia de un segmento entre el punto antecedente (*x*) y su imagen (ésta, en la posición que él prevé). Por último, se refiere a la medición de la distancia del centro de rotación al punto antecedente (*x*):

Conductor: *¿Una medición de dónde a dónde?*

Antonio: *De aquí, a acá, y de aquí, a acá para trazar el punto… en esta línea tiene que estar el punto.*

Con el movimiento de sus manos hace la indicación de trasladar ese segmento a la recta trazada por Eutimio, indicando así que ambos segmentos serán iguales y que tienen como punto inicial el centro de rotación, con lo cual pueden establecer de manera más precisa la posición de la imagen (*x'*) de *x*. Esta pareja de estudiantes se ha apropiado de un procedimiento de construcción geométrica que si bien sigue limitado a la situación particular que el pantógrafo representa, les permite encontrar la imagen de un punto, referido como un objeto genérico. En este sentido podemos decir que ellos han interiorizado la rotación como un procedimiento de construcción geométrica, siendo capaces de obtener la imagen de un punto haciendo uso de los instrumentos de geometría convencionales.

Dos aspectos son importantes de discutir aquí. Por un lado la respuesta que ellos dan al requerimiento de elaborar una prueba teórica de la validez de su procedimiento de trazado se fundamenta en la constatación práctica del mismo, así, su prueba es pragmática, se sustenta en la coincidencia entre su propio procedimiento y lo que el pantógrafo genera. Por otro lado, ellos son capaces de desarrollar por sí mismos una secuencia de construcción independiente del pantógrafo o del software que han utilizado para aprehender esa transformación geométrica. Esto representa ya un primer paso en la construcción de una prueba intelectual: "cuando esa acción (la que da cuenta de la prueba pragmática) puede ser descrita y explicada se está en un primer momento de una construcción cognitiva" (Balacheff, 1997, p. 160).

Podemos ubicar este proceso de validación matemática entre una *experiencia crucial* y un *ejemplo genérico* (Balacheff, 1997, pp. 165-166) puesto que esta pareja de estudiantes es capaz de llevar a cabo una construcción válida para un punto "cualquiera" en el plano, y también es capaz de hacer explícita su secuencia de construcción, ésta es la prueba que ellos elaboran en ese momento para validar su resultado, es decir, la prueba es el ejemplo en sí mismo y se usa para ejecutar las operaciones que garantizan la validez de lo que se afirma. En relación con esto, podemos observar que su empleo del lenguaje es aún limitado, quizá la disponibilidad de las representaciones gráficas de los objetos geométricos involucrados en la transformación les permite referirse a estos directamente, sin la necesidad de utilizar denominaciones características o adecuadas, según la terminología que el software mismo y los guiones de actividad establecen.

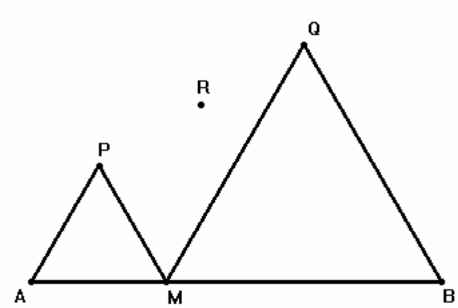
En conclusión, este episodio permitió constatar planteamientos que ya Balacheff había formulado en cuanto al comportamiento de los estudiantes ante situaciones de validación; pero sobre todo permitió hacer verosímil la hipótesis de trabajo en relación a la pertinencia de la utilización de Cabri y las máquinas matemáticas para promover la participación de los estudiantes en esta clase de situaciones al indagar en las transformaciones geométricas. Sin embargo, también se reconoció (desde la perspectiva del investigador) la necesidad de plantear cuestionamientos dirigidos a que los estudiantes avancen en la descontextualización de sus procedimientos de construcción y hacia la elaboración de pruebas intelectuales, es decir, esta experiencia, permitió reconocer la importancia de que los estudiantes lleguen a desarrollar un procedimiento de construcción que haga explícitas la propiedades de la transformación en juego, para que ellos avancen en la elaboración de argumentos dirigidos a validar sus propias afirmaciones, quizá en el sentido de establecer los invariantes geométricos de la transformación involucrada.

- Un argumento apoyado en la exploración de una figura geométrica dinámica

La construcción y exploración de figuras geométricas dinámicas alienta el descubrimiento de invariantes y, con esto, la formulación de argumentos convenientes para iniciar la elaboración de una justificación teórica con respecto al invariante mismo. Esto fue observado en el estudio empírico inicial, particularmente, en el caso que a continuación se revisa.

Entre las tareas que se les pide llevar a cabo a los estudiantes está la siguiente:
2) Construir un segmento AB y un punto M sobre el segmento AB. Construir los triángulos equiláteros AMP y MBQ. R es el punto medio de PQ.

a) ¿Qué trayectoria describe R cuando M se desplaza sobre AB? Encuentra el objeto geométrico que forma R al desplazarse.



b) ¿Por qué el objeto geométrico que has determinado es una solución correcta? Trata de probar tus afirmaciones buscando argumentos matemáticos, es decir, propiedades o conceptos matemáticos que le den validez a tu solución.

Esta tarea se plantea una vez que los estudiantes han explorado las transformaciones geométricas con Cabri y han trabajado con algunas de las máquinas matemáticas identificando las transformaciones que representan. Se trata ahora de indagar de qué manera ese proceso les permite abordar problemas que se resuelven identificando y aplicando alguna transformación geométrica en particular y en los que se les pide justificar lo que ellos proponen u obtienen como solución. Se revisan las respuestas dadas por tres estudiantes a los dos cuestionamientos planteados en la tarea mostrada arriba.

Juan: a) *Una paralela con respecto A y B*

b) *Por que se comprueba con la función de "?" si es paralela o no.*

Juan hace referencia en sus respuestas a la construcción dinámica que ha realizado con el software, el argumento con el que trata de justificar su respuesta al primer inciso se apoya en la utilización de la herramienta **Traza activada**, después ha construido una recta tratando de que coincida con la traza del punto R para compararla con el segmento AB, dado que el software no reconoce la traza como un objeto geométrico. En esta parte Juan utiliza la herramienta **Paralelo** (referida en su respuesta por el signo de interrogación y que es parte del icono mostrado por el comando correspondiente en el software) que indica si dos rectas o segmentos rectilíneos son paralelos o no. La dificultad de dibujar una recta que coincida perfectamente con la traza del punto R lo lleva a dudar de su justificación empírica.

Maricarmen:

a) *describe una recta*

b) *El punto medio entre los dos* D *siempre va a ser la recta que describe el punto medio. La recta se mantendrá a la misma distancia del punto del triángulo antecedente y figura*

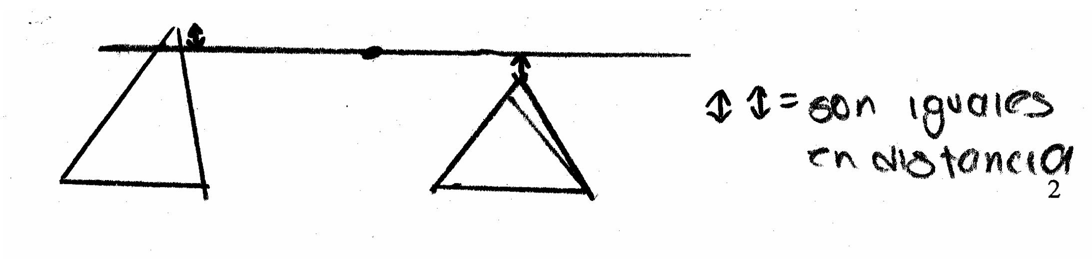


Figura 5

Maricarmen justifica su respuesta inicial planteando un argumento geométrico en el que trata de explicar una propiedad invariante de la construcción. En efecto, las distancias de los vértices superiores de los triángulos a la recta que pasa por el punto medio entre ellos (y que es paralela al segmento base de la construcción, el segmento AB) son iguales; quizá los estudiantes perciben cierto equilibrio o cierta compensación entre las alturas de ambos vértices. Probablemente la exploración con el software le ha ayudado a descubrir esa propiedad. Ella hace un dibujo (Figura 5) en su hoja de trabajo para explicar esa idea y justificar su respuesta, utilizando las palabras antecedente y figura, lo cual sugiere que está pensando en alguna transformación entre ambos triángulos.

Antonio:

a) *R forma una recta.*

b) *El segmento que forma R es proporcional al segmento* $\overline{AB}$*, por lo tanto es determinado por la distancia de A a B.*

Antonio intuye una relación proporcional entre el segmento que describe el desplazamiento de R y el segmento original, después de que ha obtenido una construcción dinámica que representa adecuadamente la situación. En la parte final de la sesión Eutimio y Antonio, quienes han llevado a cabo la actividad en pareja, trataban de hacer explícita alguna justificación fundamentada en el pantógrafo de homotecia, el conductor de la sesión les sugirió tratar de reproducir la configuración construida con el software pero utilizando ese pantógrafo.

Constatamos en estas respuestas que los estudiantes logran visualizar con cierta precisión el objeto geométrico que genera el movimiento del punto R, apoyándose para esto en una construcción dinámica que satisface las condiciones planteadas en el enunciado del problema. Interesan sobre todo, las justificaciones que ellos dan a sus respuestas a la pregunta del inciso a, es decir, sus respuestas en el inciso b. Mientras algunas de estas justificaciones se sustentan en la "autoridad" otorgada al software o a la eficacia de la construcción dinámica obtenida, como es el caso de Juan; otras justificaciones tratan de hacer explícitas relaciones geométricas que si bien surgen de la manipulación de las construcciones dinámicas, también muestran una intención de elaborar explicaciones que no se limiten a una constatación empírica del hecho geométrico observado, como es el caso de Maricarmen y de Antonio. Estas explicaciones pudieran ser los puntos de partida para generar argumentos válidos con los cuales presentar una prueba matemáticamente fundamentada.

Estos resultados llevan a suponer que, en el desarrollo de las actividades puestas en marcha en este estudio, los estudiantes desarrollan recursos (e. g., procedimientos de construcción, descubrimiento de invariantes, anticipación de resultados, identificación de relaciones, apropiación de imágenes) que les permiten participar en un proceso de conjetura y argumentación, mediado por las herramientas de que disponen, trátese de los artefactos mismos o de las representaciones que los estudiantes son capaces de generar al utilizarlos.

Esto llevó a considerar un segundo estudio empírico en el que a los participantes se les pidiese argumentar a favor de sus conjeturas, discutir esos argumentos y escribirlos de la manera más clara posible, de tal forma que eventualmente pudiesen reconsiderarlos en la construcción de una prueba.

4.2.3. Cierre

El objetivo de este primer estudio empírico fue el de complementar herramientas de mediación y actividades dirigidas, con la finalidad de generar un campo de experiencia que permitiera a los estudiantes no sólo apropiarse de los elementos característicos y los invariantes geométricos que definen a cada una de las transformaciones geométricas elementales, sino que les permitiera avanzar en situaciones de validación. Los resultados obtenidos indican que el escenario de aprendizaje, como un todo en el que se incluyen las actividades, las herramientas y las interacciones entre pares y con el conductor, es eficaz para proporcionar experiencias compartidas y promover la construcción de nociones geométricas con las cuales los estudiantes y el conductor pueden establecer procesos de comunicación y de argumentación dirigidos a la justificación de los resultados y de las afirmaciones matemáticas obtenidas al participar en las actividades previstas.

Podemos observar que los guiones de actividad favorecen el desarrollo de ciertos esquemas de utilización de las herramientas y estos contribuyen a la construcción de significados y de nociones referidos a las transformaciones geométricas. Concretamente, el arrastre de los objetos base de la construcción lleva a identificar relaciones de dependencia entre los objetos antecedentes en la transformación y sus imágenes, esto también es observable en la manipulación de los pantógrafos, cuando los estudiantes pueden percibir y hacer explícita la correspondencia entre los trazadores de cada máquina. También observamos la formación de patrones discursivos (Hoyos, 2002), o formas de referirse a los objetos geométricos y sus representaciones, que ponen de manifiesto que los estudiantes han identificado y son capaces de utilizar las propiedades características de las transformaciones geométricas.

Un aspecto que resalta en la discusión de estos resultados es la importancia de inducir o favorecer el análisis teórico de las herramientas de mediación, consideradas como el contexto externo del campo de experiencia; en el caso de

Cabri, la experiencia de manipulación directa de los objetos geométricos da paso a una transformación cognitiva de objetos abstractos en “realidades concretas” (Balacheff y Kaput, 1996), pero se requiere que el proceso no termine ahí, sino que de la posibilidad al sujeto de ampliar su dominio de experiencia (operando a través de esas realidades concretas) para enriquecer su concepción del objeto geométrico (abstracto) en juego. En el caso de las máquinas articuladas, la estructura y las diversas configuraciones genéricas que presenta cada pantógrafo pueden llevar a una justificación matemática de la transformación que produce, se trata, como ya lo ha señalado Bartolini (1993) de transparentar la relación entre la experiencia mecánica y la experiencia geométrica.

Particularmente, en la manipulación de los pantógrafos, podemos observar que la construcción de diversos objetos y sus imágenes y la necesidad de argumentar para convencerse y convencer a otros de la pertinencia de la conjetura acerca de la transformación involucrada, lleva a los estudiantes a una primera justificación pragmática, sustentada en la evidencia empírica y en la coincidencia entre lo que la máquina articulada produce y el resultado obtenido mediante el procedimiento de construcción que los propios estudiantes han desarrollado (utilizando otros recursos, como los instrumentos de geometría). Sin embargo, esta argumentación contiene ya los elementos iniciales para elaborar una prueba intelectual, dado que los estudiantes pueden describir detalladamente el proceso de construcción, descontextualizado de las herramientas de mediación utilizadas a lo largo del proceso. Podemos suponer que el trabajo con el software y con los pantógrafos estimula en los estudiantes la apropiación de representaciones dinámicas referidas a las transformaciones geométricas, que resultan adecuadas para apoyar el tipo de razonamientos que Balacheff (1987) identifica como *experiencia crucial* y *ejemplo genérico*.

El desempeño de los estudiantes en la fase de resolución de problemas, permite suponer que los estudiantes realmente disponen de una estructura de conocimientos acerca de las transformaciones geométricas, fuertemente apoyada en las herramientas con las que han logrado establecer tales conocimientos, y que, naturalmente, recurren a éstas para confirmar sus conjeturas, es decir, las herramientas se emplean en este nivel como un primer criterio de validación. Para avanzar hacia la elaboración de pruebas intelectuales, parece ser importante incrementar (cualitativamente) la actividad dirigida al análisis teórico de las herramientas, así como en la explicitación de los argumentos con los cuales se busca mostrar la plausibilidad de una conjetura; también se considera importante inducir la recuperación o el reciclaje de esos argumentos, o de algunos de ellos, con el fin de que los estudiantes lleguen a construir argumentaciones coherentes.

Otro aspecto importante es el que se refiere a las intervenciones del conductor de las sesiones. Esto representa un aspecto fino de su desempeño, a fin de no obstaculizar los posibles desarrollos autónomos de los estudiantes, lo cual se hace evidente cuando la intervención termina por dar respuestas puntuales a los cuestionamientos que los estudiantes plantean, y también en el sentido de potenciar las participaciones de los estudiantes para que éstos avancen en sus procesos de validación.

La información que este escenario de aprendizaje potencialmente provee, constituye una base amplia que permite comparar diversos registros referidos a la interacción entre pares, a la forma en que se utilizan las herramientas y los guiones de instrucción y a la forma en que las intervenciones del conductor alteran el desarrollo “natural” de la actividad realizada por los estudiantes. Todo lo cual resalta la importancia de procurar una toma de datos sistemática a fin de obtener datos consistentes con los cuales discutir las hipótesis con las que se aborda la investigación.

Finalmente, este primer estudio empírico permitió establecer bases más sólidas y objetivos más claros en el proyecto de investigación. Se previó llevar a cabo un segundo estudio empírico poniendo mayor énfasis en el análisis teórico, por parte de los estudiantes, de las herramientas de mediación como una vía para promover su desempeño en situaciones de validación y para promover el desarrollo de formas de racionalidad matemática ligadas al conocimiento y a los significados que los estudiantes pueden estructurar a partir de las actividades y el uso de tales herramientas. Se ha considerado también que la composición de transformaciones puede ser una actividad propicia para el involucramiento de los estudiantes en procesos de validación. Por último, la internalización de las herramientas y la generación, en el contexto interno de los participantes, de instrumentos de mediación semiótica, parecen constituir elementos adecuados para elaborar una discusión más amplia referida a la relación entre la racionalidad puesta en juego ante situaciones de validación y la mediación semiótica desarrollada al llevar a cabo las experiencias de aprendizaje.

4.3. Estudio final

En los apartados de esta sección se presentan el desarrollo, los resultados y el análisis de dos de los episodios grabados en video correspondientes a la segunda fase de trabajo empírico en el laboratorio de matemáticas con estudiantes de bachillerato. Las precisiones respecto a las características de este segundo estudio han sido ya señaladas en el apartado 3.2.2. Se dio inicio a este segundo estudio asumiendo que los recursos materiales y el tipo de actividades utilizadas en el proyecto de investigación permiten generar un campo de experiencia referido a las transformaciones geométricas, en el cual los estudiantes se apropian de nociones y experiencias y desarrollan actitudes y recursos que les permiten involucrarse productivamente en situaciones de validación. Considerando, además, que estas afirmaciones quedaron suficientemente fundamentadas en la revisión de investigaciones antecedentes a la nuestra (apartado 2.1 y los que de éste se derivan) y por los resultados presentados en el estudio empírico inicial y la discusión correspondiente.

Para organizar la presentación y la discusión de los datos obtenidos en este segundo estudio, se consideró conveniente establecer tres temáticas principales:

- la generación de representaciones internas dinámicas;
- la internalización de instrumentos de mediación semiótica;
- la emergencia de racionalidad matemática.

De esta forma, en esta parte del documento, se presentan los que, consideramos, son los resultados más relevantes del proyecto de investigación, así como un análisis y una discusión de éstos, teniendo como objetivo sustentar la tesis misma y dar respuesta a las preguntas de investigación planteadas.

4.3.1 La internalización de instrumentos de mediación semiótica: El dominio de las formas semióticas externas

El carácter interpsicológico o social-transaccional del proceso de internalización ha sido ya argumentado con suficiencia, esencialmente desde la perspectiva de Vygotsky; así, sabemos de la necesidad de una práctica común en la que se genere una actividad colectiva y de la importancia de la conversión de acciones en discurso o la explicitación de las formas en que se emplea la herramienta para que el sujeto esté en posibilidad de generar herramientas psicológicas o simbólicas. No obstante, el carácter intrapsicológico del proceso de internalización aún requiere de análisis más detallados a fin de elaborar modelos explicativos en el nivel individual del proceso de internalización o de apropiación de signos como poseedores de significado. Nos interesa particularmente abordar uno de los aspectos que, a juicio de Wertsch (1995), conforman el proceso de internalización tal como lo concibió Vygotsky: *el mecanismo específico de funcionamiento es el dominio de las formas semióticas externas* (p. 82). La importancia de este aspecto ha sido ya reconocida en la literatura especializada, e. g. Verillon y Rabardel (1995) consideran que las hipótesis de Vygotsky proporcionan directrices teóricas estimulantes para el estudio del impacto de los artefactos sobre la cognición, sin embargo, el nivel macroscópico general en el cual están formuladas deja abierta la pregunta en relación con los procesos microscópicos subyacentes involucrados. Con la misma orientación, Kirshner y Whitson (1997, p. viii) señalan la importancia de no descuidar las dimensiones intrapersonales del conocimiento y el aprendizaje para fortalecer perspectivas teóricas como la de la cognición situada que por esencia enfatizan las dimensiones social y cultural.

Nos interesa, entonces, dar cuenta del proceso por el cual el sujeto llega a desarrollar el dominio de las formas semióticas externas asociadas con una noción matemática específica. Tales formas externas están constituidas por los artefactos culturales utilizados y también por las representaciones distintivas (o situadas) generadas por los participantes y que son propias del escenario de actividad en el que están inmersos. Es en esta discusión, que nos parece conveniente introducir el esquema que Sfard (1991) propone para explicar el desarrollo, al nivel del sujeto, de los conceptos matemáticos. La descripción y el análisis del siguiente episodio permite discutir con respecto a lo que consideramos constituye una aproximación productiva a la elaboración, por los participantes en nuestro estudio, de instrumentos de mediación semiótica.

- La conjetura inicial

Previamente a la realización de la actividad con la máquina de composición de simetrías centrales, Gabriela y Rodrigo habían explorado ésta y otras composiciones de isometrías utilizando Cabri (Apéndice II). En aquella ocasión ellos propusieron una conjetura correcta respecto a la transformación equivalente, como podemos observar en sus respuestas a la siguiente instrucción:

- Efectúa la composición de dos simetrías centrales. ¿El objeto final puede ser obtenido a partir del objeto inicial con una sola transformación? Si es así, ¿con cuál?

> **R1**: *"con un vector que se halle dirigido hacia abajo, paralelo con los dos puntos con los cuales se realizó la simetría central, y el doble de la distancia entre esos puntos."* (Gabriela)
>
> **R2**: *"Si, usando un vector y luego haciendo una traslación del segmento A al A´´."* (Rodrigo)

En esa actividad previa, ambos estudiantes emplearon de manera eficaz el software para construir la composición de simetrías y para verificar que mediante una traslación podían obtener el mismo resultado. La respuesta de Gabriela está limitada por la visualización de una configuración particular entre los centros de simetría. Dentro de esa limitación, Gabriela establece las características necesarias y suficientes del vector de traslación requerido. La respuesta de Rodrigo es menos precisa en este sentido, sin embargo, muestra con claridad que él puede verificar, por medio de geometría dinámica, la pertinencia de utilizar una traslación para obtener el resultado producido por la composición de simetrías. El hecho de que al arrastrar la flecha del vector varíen sus propiedades (norma, dirección y sentido) y sea posible observar, simultáneamente, el efecto producido en la imagen, permite a Rodrigo tener convicción de lo que afirma. Como en otros casos, el conductor de las sesiones intervino pidiendo a los estudiantes afinar de la mejor manera posible sus respuestas, así, cuando alguno de los estudiantes suponía, e. g., que mediante un vector podría obtener un resultado equivalente, el conductor le pedía tratar de caracterizar con precisión tal vector, induciéndolo a buscar relaciones entre el vector y los elementos de la composición en juego, algo que parece haber funcionado adecuadamente en el caso de Gabriela.

- La actividad con la máquina de composición de simetrías centrales

Teniendo como antecedentes las actividades ya referidas, Gabriela y Rodrigo están ahora examinado la máquina de composición de simetrías centrales (figura 6). La tarea consiste en descubrir qué es lo que la máquina produce y en elaborar una justificación teórica del resultado de la composición. Esta máquina articula dos pantógrafos de simetría central con un trasladador de Kempe, de manera que existe la posibilidad de distinguir, en su estructura, cada uno de los tres pantógrafos funcionando simultáneamente y en correspondencia. Además, sobre la tabla en la que está montada la máquina se observan tres triángulos, uno distinguible por las etiquetas de sus vértices como ABC; otro etiquetado como A'B'C', imagen del primero bajo la primera simetría central; y un tercer triángulo etiquetado A”B”C”, imagen del anterior bajo la segunda simetría. A lo largo de la actividad indicada en las hojas de trabajo (Apéndice VI). El conductor interviene cuestionando a los estudiantes o tratando de que ellos hagan explícitas sus acciones.

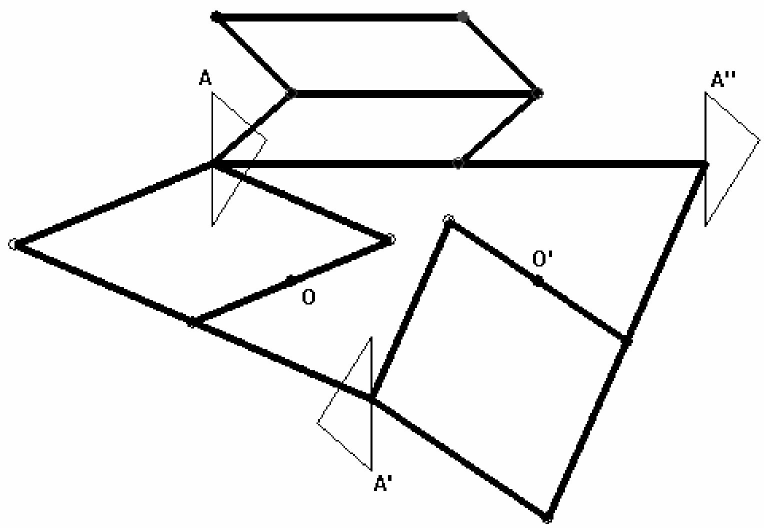


Figura 6

1) Conductor: *¿Qué está pasando con esta máquina?*
2) Gabriela: *Tres transformaciones*.
3) Conductor: *¿Tres transformaciones?*

[Rodrigo parece no estar de acuerdo con la afirmación de Gabriela, aunque no lo hace explícito.]

4) Gabriela: *Sí. Primero empezaríamos trazando éste* (ABC), *éste* (A’B’C’) *sería su imagen de éste* (ABC) *y luego con otra simetría sale éste* (A”B”C”). *Ésta es una simetría axial, éste con éste* (señalando los triángulos ABC y A”B”C” que están dibujados sobre la tabla de la máquina articulada)
5) Conductor: *¿Entre ABC y A”B”C” es una simetría axial?*
6) Gabriela: *Sí*.
7) Conductor: *¿Dónde estaría el eje?*
8) Gabriela: *¿Aquí?* (señalando el centro de la tabla)

9) Rodrigo: *Pero no se están reflejando.*

10) Gabriela: *Claro que sí, son iguales, éste* (ABC) *con éste* (A"B"C") *son iguales*.

11) Rodrigo: *Pero supón que éste* (A"B"C") *estuviera más arriba y fuera una hoja* (refiriéndose a la tabla sobre la que está montada la articulación) *y lo doblaras, esta línea* (el lado BC) *quedaría acá* (señalando el extremo opuesto de la tabla) *y este punto* (A") *quedaría acá* (al otro extremo de la tabla).

12) Conductor: *Si se corresponden en una simetría axial, entonces tendría que haber un eje que hiciera que ésta* (ABC) *se reflejara acá* (en el sitio donde está A"B"C")

13) Gabriela: *Aquí está esto*. (Gabriela ha encontrado en sus hojas de trabajo la actividad en la que exploró la simetría axial mediante el software).

14) Rodrigo: *Pero es lo que le digo, que el segmento C y el segmento B quedaría acá.*

[Rodrigo continúa tratando de explicar el resultado que ha visualizado con respecto a la simetría del triángulo ABC por un eje hipotético, indicando la posición de la imagen.]

15) Conductor: *¿Y el vértice A?*

16) Rodrigo: *Y el vértice A quedaría acá, y ya no serían simetrías axiales*.

17) Gabriela: Sí *son simetrías axiales*.

Rodrigo considera que la composición no corresponde con una simetría axial, y propone inicialmente una traslación de la imagen resultante de la composición, para después realizar una simetría (intervención 11) por el eje que resultaría al "doblar" la tabla sobre la que está montado el pantógrafo, concluyendo que los triángulos correspondientes estarían orientados de manera distinta de la que se observa en la tabla. Rodrigo muestra tener claridad en cuanto a la configuración resultante de una simetría axial al indicar la forma en que el lado BC quedaría ubicado en el plano por efecto de esa transformación, además, intuye el cambio que se produciría en la orientación de la imagen respecto a la del objeto inicial, ya que, en efecto, la simetría axial no es una isometría directa. Él propone este razonamiento con la intención de explicar que la transformación equivalente no corresponde a una simetría axial. En esos momentos Gabriela está buscando entre sus guiones de actividad la exploración que previamente había hecho de la simetría axial con el software (int. 13), ella había dibujado una representación de esta isometría mediante dos triángulos y un eje, sin embargo, tal representación corresponde, visualmente, con una traslación, es decir, se observa una isometría directa entre los triángulos que ella ha dibujado. Esto la lleva a sostener su afirmación de que el producto de la composición representada en la máquina articulada es una simetría axial (int. 17), puesto que asocia la configuración de triángulos representados en la máquina, particularmente el triángulo antecedente y la segunda imagen, con su propia representación, la cual es errónea.

18) Conductor: *Traten de ponerse de acuerdo si es una simetría axial o no.*
19) Gabriela: *Yo digo que sí*.
20) Rodrigo: *O una central*.
21) Gabriela: *No, central no es*.
22) Rodrigo: *¿Por qué?*
23) Gabriela: *Porque en la central están al revés*.

Gabriela recurre a la representación de la simetría central que ha plasmado en sus hojas de trabajo correspondientes a la exploración de las isometrías con Cabri, refiriéndose a la simetría como una relación entre dos figuras de las cuales una es “copia” de la otra, y una está “al revés” respecto a la otra.

24) Conductor: *Entonces observen, ¿Aquí está quedando al revés este segundo triángulo* (la segunda imagen) *con respecto de éste* (la figura antecedente en la composición)?
25) Gabriela: *No*.
26) Rodrigo: *Es una traslación.*

27) Gabriela: *No… ¡ah, pudiera ser!*

28) Rodrigo: *Porque fue lo que hicimos esa vez que hacíamos el vector más grande y lo iba poniendo más… en el mismo orden*.

Rodrigo se refiere al estudio de esta composición realizado anteriormente con el software, en el que pudo constatar que una composición de simetrías centrales puede sustituirse por una traslación.

29) Gabriela: *Pero, ¿cuál es el vector?*

30) Conductor: *Entonces tienen que ABC se transforma en A'B'C'*.

31) Gabriela: *Ésta sí es una simetría central*.

32) Conductor: *¿Es una simetría central, cuál?*

33) Gabriela: *Éste* (ABC) *con éste* (A'B'C') *y éste* (A'B'C') *con éste* (A"B"C").

34) Conductor: *¿Cuáles son los centros de las simetrías?*

35) Rodrigo: *Entre ésta* (A'B'C') *y ésta* (A"B"C"), *éste* (señalando el centro de simetría correspondiente), *porque este punto* (C') *pasaría por aquí* (Rodrigo indica con su lápiz una línea imaginaria del vértice C' al C" pasando por el segundo centro de simetría). *Aquí está C, C' y el punto* (refiriéndose ahora a la primera simetría y colocando una regla sobre la máquina articulada indicando la alineación entre ese par de puntos correspondientes y el centro de simetría).

36) Conductor: *¿Entonces tienen ahí una composición?*

37) Gabriela: *De dos*…

38) Rodrigo: *Simetrías centrales*.

39) Gabriela: *Ándale*.

40) Conductor: *Que al parecer equivale a*…

41) Rodrigo: *A una traslación*.

42) Conductor: *Entonces avancen en lo que están escribiendo en las hojas, y se trataría de deducir cuál es el vector de traslación*.

43) Gabriela: *Éste, ¿no maestro?* (Gabriela está arrastrando, en la máquina articulada, la barra que corresponde con el vector de traslación).

44) Conductor: *¿Este es el vector de traslación?*

45) Gabriela: *Yo digo que éste, porque si trasladamos el punto A nos va a dar esto*…

Gabriela asume ahora la traslación entre el triángulo antecedente y la segunda imagen y manipula la articulación para hacer ver que los extremos de la barra coinciden precisamente con los vértices A y A” de los triángulos representados en la tabla de la máquina, esto lo verifica también con los otros dos pares de vértices. Su observación, lo que ella percibe sobre la estructura de la máquina, le permite apropiarse de un elemento más para convencerse de la validez de la conjetura referida a lo que la máquina realiza.

Al final de su actividad con el pantógrafo, Gabriela y Rodrigo miden la longitud de la barra que suponen representa el vector de traslación y miden a continuación la distancia entre un par de puntos correspondientes en la composición, observando que se trata de la misma medida. Confirmando, así, que la máquina reproduce una composición de simetrías centrales. El conductor de la sesión les pide entonces avanzar en la justificación de lo que están concluyendo de esa parte de la exploración con la máquina matemática; en particular les pide que traten de establecer alguna relación entre las características del vector de traslación y otras características de esa máquina.

A continuación se presenta una discusión referida a los aspectos relevantes en el proceso llevado a cabo por esta pareja de estudiantes, iniciado con la exploración de las isometrías en el ambiente de Cabri, y que finalizó en la actividad con la máquina articulada de composición de simetrías centrales.

1. El razonamiento de Rodrigo para explicar que no es el caso de una simetría axial

Al inicio de la exploración de la máquina articulada observamos un proceso cognitivo importante para la identificación de la composición de transformaciones que la máquina efectúa. Mientras Gabriela asegura que la composición representada en el pantógrafo puede ser reemplazada por una simetría axial, apoyándose para esto en lo que ella había obtenido al explorar esa isometría mediante el software, Rodrigo se percata de que no es este el caso y propone un razonamiento en el que supone que en verdad se trata de una simetría axial (intervenciones 11 y 14), para llegar a un resultado que no corresponde con lo que se constata en la máquina articulada. Su razonamiento está fundado en la apropiación que él ha alcanzado de la transformación inicialmente conjeturada por Gabriela, es decir, él puede ejecutar (internamente) la simetría axial de un segmento de recta, dado un eje hipotético, para ubicar la posición de la imagen y mostrar que no corresponde con lo que la máquina produce.

En términos de las categorías propuestas por Balacheff (1987), el razonamiento de Rodrigo corresponde, en buena medida, con un *ejemplo genérico*, dado que el ejemplo no se examina en sí mismo, sino para hacer explícito un modelo de acción. En este caso, ese modelo de acción consiste de una representación mental del procedimiento para efectuar una simetría axial; el discurso (intervenciones 9, 11, 14 y 16) pone en relieve las propiedades características y la estructura que el objeto representa, pero en referencia directa al caso particular en el que se apoya la argumentación; Rodrigo tiene una idea clara de la relación entre un objeto y su imagen bajo esa transformación. Si bien la categorización presentada por Balacheff (1987) no hace referencia explícita a razonamientos que buscan refutar una conjetura, lo que se observa en el desempeño de Rodrigo se ajusta, a nuestro juicio, adecuadamente a los rasgos distintivos de este tipo de prueba pragmática.

2. La articulación de experiencias para confirmar la certeza de la conjetura producida

Al cabo de su exploración con la máquina articulada, Rodrigo y Gabriela optan por trabajar con el software para avanzar en lo que se les ha pedido, es decir, en proponer argumentos matemáticos para validar su afirmación respecto a la composición que la máquina produce. En ese momento Gabriela está construyendo, en Cabri, la composición de simetrías, produciéndose el siguiente diálogo entre ellos:

46) G: *Ya ves, ya quedó.*
47) R: *Entonces sí era eso*.
48) G: *Pero, ¿cuánto tiene que medir el vector?*
49) R: *El doble de ése.*
50) G: *¡Sí, es el doble de la distancia de los puntos! Son dos simetrías centrales*.
51) R: *Sí, equivalentes a una traslación*.
52) G: *Ve, sí es el doble, ésas son dos simetrías centrales que equivalen a una traslación*.

Gabriela ha construido un triángulo, un punto y la imagen del triángulo bajo la simetría, a continuación construye otro punto y la imagen de la imagen, en seguida construye un vector, dirigido del primer triángulo hacia la segunda imagen, de magnitud tal que al ejecutar la traslación del primero, obtiene un cuarto triangulo en la pantalla. Gabriela está cuestionando cuál debe ser la magnitud del vector necesario para producir una traslación que haga coincidir este cuarto triángulo en la pantalla con el obtenido de la composición (int. 48), Rodrigo propone que sea un vector del doble del que se muestra en la pantalla, en ese momento Gabriela comienza a arrastrar la flecha del vector hasta que ese cuarto triángulo queda superpuesto al obtenido de la composición. Ella utiliza la herramienta *Distancia y longitud* del software para medir primero la longitud del vector y después la distancia entre los centros de simetría, en ese momento hace una exclamación enfatizando la relación entre estas medidas (int. 50). Después de esto, sigue ensayando esa relación, haciendo variar la posición y la distancia entre los centros de simetría y la magnitud del vector. A partir de este momento, la interacción con el software se detiene y la pareja de estudiantes se dedica a responder lo que se solicita en el guión de la actividad.

La decisión de utilizar el software les da la oportunidad de reproducir la composición explorada en el pantógrafo, con la posibilidad de variar las condiciones que en él son fijas: la posición relativa entre los centros de simetría y la configuración geométrica entre la figura antecedente y sus imágenes. La construcción en Cabri funciona adecuadamente para indagar en términos de una generalización de la proposición matemática implicada, mostrando un “continuo” de casos que confirman esa proposición. Así, en el caso de Gabriela y Rodrigo, la indagación de la composición de simetrías teniendo como contexto externo la máquina articulada, en combinación con su capacidad para generar construcciones dinámicas, constituyen una base experimental sólida para que esta pareja de estudiantes consolide su conocimiento respecto a esa composición en particular.

Al parecer, ellos han logrado interiorizar esta composición de isometrías, aproximándose a una aprehensión de la misma que corresponde con el tercer nivel en la categorización presentada por Sangaré (1999), es decir, ellos son capaces de evidenciar los invariantes característicos de esta composición, sobre la estructura del pantógrafo y mediante el empleo del software. También es posible suponer que en este proceso se ha producido cierto nivel de descontextualización, respecto al teorema geométrico que dicha composición implica, en esto la actividad mediante los artefactos parece ser fundamental. A continuación se presenta un análisis que pretende profundizar en estos aspectos.

3. Un posible mecanismo de mediación semiótica

La secuencia de trabajo y las herramientas utilizadas estimulan la adquisición de una experiencia geométrica basada en un proceso bidireccional, entendiendo por esto que tal proceso se desarrolla, simultáneamente, en dos sentidos: por una parte, el uso de las herramientas, con sus representaciones virtuales o físicas, impulsan la concepción de objetos abstractos referidos de manera específica mediante cierto vocabulario y ciertas representaciones; a su vez, estos objetos abstractos, por medio de las relaciones y las propiedades a ellos atribuidos, potencian el sentido de lo que las herramientas generan cuando el usuario hace un uso consciente y premeditado de éstas, enriqueciendo, así, su experiencia y su concepción del objeto abstracto involucrado. Tanto Gabriela como Rodrigo, pueden establecer conexiones entre representaciones internas y externas, además, son capaces de utilizar las herramientas intencionalmente con el fin de refutar o de confirmar sus conjeturas. Podemos decir, citando a Mariotti (2002), que: “En este sentido, los conceptos matemáticos son “abstracciones concretas” porque reflejan y reconstruyen la naturaleza sistémica e interconectada de los objetos reales” (p. 699). Los objetos reales (las máquinas articuladas y el software de geometría dinámica, en este caso) resultan medios eficaces para la apropiación de nociones y procesos geométricos subyacentes a tales objetos.

Hay que añadir que, en nuestro estudio, además del micromundo que el software proporciona, los pantógrafos contribuyen a enriquecer las concepciones inicialmente activadas en aquél medio. Mientras la actividad con el software permite internalizar referentes virtuales y lingüísticos de los objetos geométricos involucrados, así como una primera percepción de las relaciones y las propiedades que los caracterizan, la actividad con las máquinas articuladas promueve la reificación de los objetos abstractos y sus relaciones incipientemente elaboradas; estimulando, además, la formulación de una conjetura y el desarrollo de procesos que lleven a confirmarla o a refutarla. También podemos observar que los estudiantes recurren nuevamente a la utilización del software con intención de confirmar y ampliar la experimentación de la proposición geométrica en juego. Las posibilidades de la geometría dinámica son explotadas por ellos convenientemente, al producir una construcción genérica que permite examinar la validez general de tal proposición.

Para Sfard (1991) las concepciones (el nivel subjetivo o personal de un concepto) que las personas desarrollan de los objetos matemáticos, poseen una naturaleza dual, estructuralmente (como objetos) y operacionalmente (como procesos), que se genera en la recursividad de tres fases cognitivas jerárquicas: *interiorización*, *condensación* y *reificación*. Esta jerarquía presupone que: “en el proceso de la formación de un concepto, la concepción operacional precederá a la concepción estructural” (p. 10). Con la intención de proponer un mecanismo de internalización, es decir, la generación de instrumentos de mediación semiótica, como herramientas del pensamiento, analizamos los protocolos presentados previamente, desde la óptica del desarrollo de las concepciones de los objetos matemáticos que propone Sfard (1991).

a) La actividad previa de exploración de composiciones de isometrías en el ambiente de Cabri permitió a esta pareja de estudiantes reconocer dos procesos o dos procedimientos geométricos que generan un mismo resultado, y les permitió también intuir las relaciones básicas entre los elementos característicos de cada una de las transformaciones involucradas en tales procedimientos (respuestas R1 y R2 al inicio de la presentación de este episodio). Si bien no se tiene constancia de que, en ese momento, Gabriela y Rodrigo tuviesen ya la capacidad de llevar a cabo la composición de simetrías (como tal) en el plano cognitivo, sí es notorio que ellos interiorizaron una representación, cuyo referente lingüístico hace explícito el reconocimiento de tales procedimientos geométricos. Este proceso cognitivo corresponde en buena medida con la fase de interiorización que plantea Sfard (1991): “en el escenario de interiorización un aprendiz obtiene conocimiento de los procesos que eventualmente darán origen a un nuevo concepto” (p. 18). En el caso de esta pareja de estudiantes, la idea de composición evoca en ellos un proceso operativo, posiblemente limitado a la utilización de las herramientas que el software proporciona.

b) De la intervención 26 hasta la 41 de la trascripción anterior se constata un proceso en el que la composición de simetrías adquiere el carácter de lo que Davydov señala como “una abstracción substancial desde lo concreto, realizada por el análisis de la función de una relación de cosas dentro de un sistema estructurado” (citado en Bartolini, 1993, p. 98). En otras palabras, la concepción de los estudiantes, respecto a la composición de simetrías, ya no sólo se limita a una configuración geométrica reconocible, sino que se enriquece al hacer explícitos los elementos característicos de cada transformación y de la relación que guardan entre sí, sobre la base material del pantógrafo. Aquí, la fase de condensación parece estar presente, dado que los estudiantes pueden referirse a la composición de transformaciones en juego como “el todo en relación con sus partes” (Sfard, 1991, p. 19). Para Sfard, en el escenario de condensación “una persona llega a ser más y más capaz de pensar en un proceso dado como un todo, sin sentir la urgencia de entrar en detalles” (Sfard, 1991, p. 19).

c) Posteriormente, la construcción dinámica generada en Cabri se constituye en una representación adicional, funcionalmente enlazada a la máquina articulada, ambas representaciones “cristalizan” en una concepción de la composición de simetrías como una traslación. La complementariedad entre las herramientas utilizadas y su carácter de representaciones dinámicas y diferenciadas de una noción geométrica particular, parecen alentar una integración semántica, para consolidar en los estudiantes una noción matemática específica. Llama la atención la forma en que Gabriela cambia su juicio respecto a la transformación que la máquina articulada produce, ella asume que se trata de una traslación y es capaz de reconocer en la estructura de la máquina la barra que corresponde al vector involucrado, este proceso desemboca “naturalmente” en la creación y manipulación, mediante su propia construcción dinámica, de un vector y de una traslación con la intención de verificar la afirmación involucrada. Podemos percibir, en esta fase de actividad de los estudiantes, el proceso de reificación que Sfard caracteriza esencialmente por la concepción de una noción como “un objeto totalmente corpóreo… en el que varias representaciones del concepto llegan a estar semánticamente unificadas por este constructo abstracto puramente imaginario” (p. 19-20). Adicionalmente, podríamos conjeturar que la intervención didáctica en su conjunto, en la forma en que se ha llevado a cabo, contribuye a reducir la distancia entre cada fase, y pudiera estar promoviendo la transición a un nuevo nivel de procesamiento de la noción en juego.

- Cierre

La discusión aquí presentada en relación con lo que Gabriela y Rodrigo realizaron, permite señalar que la actividad centrada en la utilización de las herramientas instruccionales, efectivamente, promueven procesos cognitivos dirigidos a la internalización de éstas, es decir, a la elaboración de objetos y procesos geométricos, como constructos abstractos significativos y también como “abstracciones concretas” (Mariotti, 2002, p. 699), cuya aprehensión resulta de la utilización de referentes concretos o virtuales y de la discusión generada en cuanto a la validez de las conjeturas que la misma utilización de dichos referentes permite proponer.

Siguiendo con esta idea, se ha introducido en esta discusión un mecanismo específico para explicar la transición desde una actividad “externa”, sustentada en la exploración y la indagación de nociones geométricas utilizando artefactos culturales, a la generación de instrumentos de mediación semiótica como herramientas del pensamiento. En otras palabras, las etapas que Sfard (1991) propone en la construcción de concepciones matemáticas se ajustan adecuadamente a un proceso cognitivo que transcurre simultáneamente en doble sentido: la internalización de objetos y procesos matemáticos a partir de la indagación (mediante la utilización de referentes concretos) de las relaciones y las propiedades que los caracterizan, da origen a un proceso recíproco de significación de los objetos abstractos y potenciación de los referentes concretos, de manera que significados y referentes evolucionan en la medida en que la actividad y la interacción promueven el proceso mismo de indagación. Las etapas de interiorización, condensación y reificación de concepciones matemáticas, se constituyen en categorías adecuadas a la descripción del mecanismo por el cual los participantes logran el dominio de las formas semióticas externas y construyen un plano interno, en el cual son capaces de operar con herramientas simbólicas o instrumentos de mediación semiótica en el contexto de las situaciones de aprendizaje llevadas a cabo en este proyecto de investigación.

Finalmente, el desempeño de Rodrigo y Gabriela en la unidad cognitiva de un teorema, específicamente, el teorema que establece la relación entre la composición de simetrías y una traslación, estuvo limitado, a nuestro juicio, por dos factores. Por un lado esta pareja de estudiantes se satisfizo con la confirmación del resultado de la composición mediante su construcción dinámica, su actitud pareciera mostrar que, desde su propio punto de vista, lo que lograron fue suficiente para justificar convenientemente la proposición geométrica involucrada, la evidencia empírica proporcionada por las herramientas, aún tratándose de construcciones realizadas por ellos mismos, de alguna manera limitó la búsqueda de otros argumentos. Por otra parte, la actividad, tal como se llevó a cabo, no promovió de forma más dirigida esa búsqueda de argumentos teóricos, quizá en términos de una representación "esencial" del hecho geométrico involucrado, o de una descontextualización plena del hecho geométrico confirmado, como podría ser la visualización de la proporcionalidad ente lados de triángulos semejantes formados por los elementos característicos de la composición (figura 7), de manera que los estudiantes hubiesen tenido oportunidad de argumentar en esos términos.

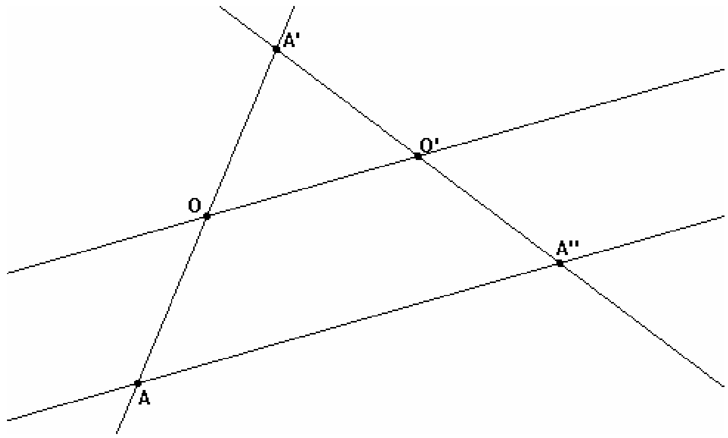


Figura 7.

4.3.2 La emergencia de racionalidad matemática

Como ya se ha señalado en otras partes de este documento, entendemos por racionalidad matemática un tipo de racionalidad teórica, expresada a través de razones y de justificaciones que tienen la finalidad de fundamentar un hecho matemático. Se trata, como lo señalan Mariotti y sus colaboradores (1997), de entrar en la fase de fundamentar por qué un hecho es cierto, ya no a partir de la constatación misma del hecho, sino a partir de justificaciones teóricas organizadas mediante el recurso a los conocimientos o a los aprendizajes previamente consolidados. En nuestro caso, esos aprendizajes consisten de una estructura teórica (y cognitiva) creada alrededor de las transformaciones geométricas elementales, es decir, de sus elementos característicos, de sus propiedades y de sus invariantes.

Desde la perspectiva de la investigación realizada en este proyecto, el proceso de elaborar pruebas matemáticas está intrínsecamente ligado con los procesos de mediación semiótica y de interacción social puestos en marcha en las experiencias de aprendizaje en las que los estudiantes han participado, esto debiera ser así tanto por la intención misma del proyecto de investigación, como por las características de los medios utilizados y las actividades realizadas. En este apartado se analizará un episodio en el que cuatro de los participantes, guiados por el conductor, llevan a cabo la tarea de encontrar argumentos teóricos para validar una de las afirmaciones propuesta por dos de ellos referida a una composición de transformaciones. En este análisis se pondrá énfasis en la racionalidad matemática emergente en el contexto de la situación, así como de sus posibles relaciones con la mediación semiótica alcanzada.

- La afirmación inicial

En el episodio que a continuación se transcribe los estudiantes (Trinidad, Rodrigo y Juan Carlos) tienen en sus manos una hoja en la que se pueden leer varias de las afirmaciones que ellos mismos han producido al trabajar con diferentes máquinas matemáticas. La tarea que se les ha pedido es la de producir una prueba matemática de la validez de una de esas afirmaciones; la afirmación considerada es la siguiente:

> **A1:** *"Dos simetrías axiales corresponden a una rotación, que corresponde al doble del ángulo formado y que gira en el punto de intersección."*

Esta afirmación fue formulada por Gabriela y Rodrigo en una actividad previa, en la que exploraron la composición de simetrías con ejes coincidentes utilizando la máquina matemática articulada y Cabri. Esta pareja de estudiantes logró constatar cierta relación entre el ángulo formado por los ejes y el ángulo de la rotación equivalente apoyándose en la utilización de ambas herramientas. En su construcción dinámica, ellos midieron ángulos entre los ejes y asignaron diferentes ángulos a la rotación con la cual buscaban obtener el mismo resultado que el producido por la composición. Sin embargo, la validación se limitó a la constatación del hecho geométrico, es decir, ellos lograron convencerse de que, en efecto, la rotación equivalente tiene como centro la intersección de los ejes y como ángulo el doble del formado entre estos, mediante un proceso de aproximación y de superposición de figuras. Así, esto no significó que ellos pudieran elaborar alguna argumentación que fuese más allá de describir los elementos geométricos involucrados en la composición y las relaciones entre ellos, sus respuestas al requerimiento de organizar sus argumentos a fin de explicar satisfactoriamente la afirmación formulada así lo muestran:

> *“Para la realización de la simetría axial necesitamos dos ejes de simetría y la figura. Una rotación necesitamos un factor numérico un punto y una figura.*
> *Y éstas dos en conjunto forman una simetría axial con respecto a una rotación es decir, al término de hacer una rotación la simetría de una figura quedaran en el mismo sitio de rotación”.* (Gabriela)

> *“Para construir una simetría axial necesitamos un eje de simetría y la figura. Una rotación necesita un factor numérico, un punto céntrico y una figura a rotar.*
> *Y éstas dos en conjunto forman una simetría axial con respecto a una rotación, es decir, al término de hacer una rotación la simetría de la figura quedará en el mismo sitio que la rotación”.* (Rodrigo)

Sus respuestas hacen suponer que, en ese momento, ellos aún no desarrollaban alguna forma teórica de explicar la relación entre las transformaciones involucradas. Su intención de justificar la validez de su afirmación quedó limitada a un nivel operacional, en el sentido de la descripción de los procedimientos necesarios para construir, por una parte, la composición y por otra, la rotación “correspondiente”.

Por otra parte, ni Trinidad ni Juan Carlos habían trabajado, previamente, con la máquina articulada, aunque habían explorado ya la composición de simetrías axiales utilizando Cabri. En esa ocasión ellos no llegaron a caracterizar adecuadamente esta composición, como lo muestra lo que ellos escribieron para completar la siguiente proposición:

- Componiendo dos simetrías axiales con ejes coincidentes se obtiene...

Una rotación de x° (Trinidad)

Una rotación de 90° (Juan Carlos)

Si bien pudieron reconocer a la rotación como una transformación relacionada con la composición de simetrías, la actividad de indagación quedo limitada a un caso particular, o quizá al reconocimiento incipiente de la relación angular existente.

Ahora los estudiantes están trabajando juntos y tienen en su mesa de trabajo la máquina articulada en cuestión (figura 8), tienen también una computadora con un modelo simulado en Cabri de esa máquina (proporcionado por el conductor de la sesión), además de las hojas de trabajo de todas las actividades que han realizado con anterioridad y las correspondientes a la actividad que están realizando en ese momento. La tarea (Apéndice VII) consiste en considerar la afirmación producida previamente (A1) para afinarla con mayor precisión y llevar a cabo una demostración.

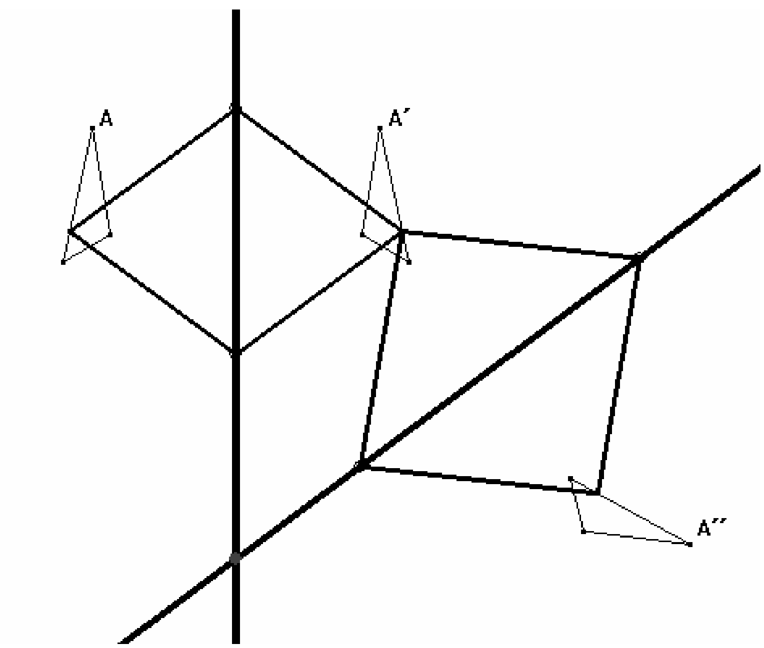


Figura 8

- Refinamiento de la afirmación previamente formulada

Una vez que los estudiantes han leído la afirmación generada previamente, el conductor interviene con la intención de orientar la tarea que ellos tienen en ese momento:

Conductor: *Se trata de especificar de mejor manera la composición…*

Juan Carlos: *O sea que no está bien especificada y hay que trabajar con ésta*… (Señalando la máquina articulada).

Trinidad: *¿Dos simetrías axiales?*

Conductor: *Son dos simetrías axiales.*

Trinidad: *Ah, pues de una figura pasa a otras dos.*

Juan Carlos: *Con ejes coincidentes.*

Trinidad: *Con ejes coincidentes, es una cruz porque eso fue lo que hicimos nosotros con una figura, es una cruz y pones uno en una esquina.*

Conductor: *¿Una cruz?*

Trinidad: *Bueno, primero tomas en cuenta un eje, y haces uno* (la primera simetría), *y puedes poner un eje que sea transversal a… o perpendicular a una recta, y con ése puedes hacer otra simetría y quedan las dos simetrías y se pueden unir hasta cierto… o sea las puedes mover.*

Trinidad acompaña su explicación con movimientos de sus brazos y manos para indicar la posición de cada eje y para simular un movimiento de rotación entre la posición inicial de un objeto hipotético y la posición final al cabo de la composición; refiriéndose a su experiencia realizada con Cabri en la que construyó una representación dinámica de la composición en juego. Su explicación muestra que ha interiorizado ya una imagen, en la que la relación entre la composición de simetrías y la rotación es patente; aunque dicha relación permanece aún en un nivel fenomenológico u operacional, es decir, limitado a la descripción de la sucesión de transformaciones, las simetrías axiales, y su correspondencia con una rotación.

La actividad continúa para hacer explícitos, sobre la máquina articulada, cada uno de los elementos característicos de las transformaciones involucradas y las transformaciones mismas. Ante el requerimiento de elaborar una afirmación con las cualidades de un teorema (hipótesis y tesis), Trinidad reformula lo que ya había señalado:

Trinidad: *Utilizando la repetición de la transformación de simetría axial, podemos…* (inaudible) *una figura dos veces a cierta distancia, esto se puede hacer, se puede producir este cambio de la primera figura a la última con una sola transformación que se haga a cierto ángulo, tomando en cuenta el punto de simetría.*

Conductor: *Entonces, una composición de dos simetrías axiales corresponde a una rotación ¿cuándo?*

Juan Carlos: *Cuando tienen ejes coincidentes.*

Conductor: *Eso hay que incorporarlo a la afirmación que ya tienen, entonces, ¿cómo va a quedar la afirmación?*

Trinidad: *Dos simetrías axiales, equivalen…*

Rodrigo: *Equivalen a una rotación.*

Trinidad: *Con ejes coincidentes.*

Rodrigo: *Axiales con ejes coincidentes.*

Conductor: *¿Equivalen a qué?*

Juan Carlos: *A una rotación.*

Conductor: *¿Y qué más?*

Trinidad: *Con cierto ángulo.*

Conductor: *¿Qué dice la afirmación con respecto al ángulo?*

Rodrigo: *Que corresponde al doble del ángulo.*

Trinidad: *Una rotación del doble del ángulo formado entre los ejes coincidentes*

Conductor: *¿Y el centro de rotación?*

Rodrigo: *Es éste* (señalando la intersección de los carriles –figura 8- que funciona en la máquina articulada como ejes de simetría).

Trinidad: *Tomando como centro de rotación la intersección entre los dos ejes.*

La afirmación anterior (A1) reelaborada por los estudiantes es la siguiente:

A2: *"Dos simetrías axiales con ejes coincidentes equivalen a una rotación del doble del ángulo formado entre los dos ejes coincidentes, tomando como centro de rotación la intersección entre los dos ejes."*

Después de esto Rodrigo se refiere directamente a los elementos de la máquina articulada para explicar la nueva afirmación, su explicación es seguida por sus compañeros:

Rodrigo: *Dos simetrías axiales, aquí está una y ésta es otra*, (señalando sobre la máquina articulada cada uno de los eslabonamientos que produce una simetría axial) *equivalen a lo que es una rotación, o sea que si rotamos este triángulo ABC, sale… puede llegar hasta acá* (la posición que ocupa la segunda imagen de ABC)*, pero esto, entre dos ejes coincidentes, que es el centro de la rotación, la intersección de los dos ejes, y en cuanto a lo que era la suma del doble del ángulo formado.*

Trinidad: *Esta composición se puede hacer por medio de una rotación, en la que el centro es la intersección entre las dos rectas y el ángulo debe ser del doble del ángulo que forman las… los dos ejes.*

Cabe señalar que la máquina articulada incorpora, además de los dos eslabonamientos para las simetrías axiales, un tercer eslabonamiento, ensamblado sobre los anteriores, y que corresponde con el de un pantógrafo de Sylvester, es decir, el pantógrafo que realiza la rotación equivalente, sin embargo esto no se hizo explícito en ningún momento a lo largo del episodio.

Nuevamente, observamos que la significación de los objetos y los procesos geométricos, presentes en las experiencias de los estudiantes, se apoya fuertemente en la experiencia fenomenológica que las herramientas proporcionan. Esto genera un dominio de racionalidad pragmática en la que la constatación de los hechos permite establecer una base experimental sólida para el desarrollo de una racionalidad teórica, apoyada ahora en representaciones y significados compartidos, tal como se trata de mostrar en la parte siguiente.

- La explicitación de argumentos suficientes para la construcción de una prueba

El trabajo previo y un nuevo análisis de la composición a través de las representaciones disponibles (la máquina articulada y una simulación de ésta en Cabri), junto con la interacción, tanto entre los estudiantes como entre estos y el conductor, dan paso a la explicitación de argumentos suficientes para la construcción de una prueba. Las actividades centradas en las herramientas de mediación son eficaces para promover la comunicación matemática entre los estudiantes y el conductor, y con esto desarrollar argumentos suficientes para su involucramiento en un proceso de validación matemática:

> Conductor: *¿Qué argumentos pueden dar para decir que esta composición equivale a una rotación?*
>
> Juan Carlos: *Bueno, pues, la posición del triángulo, del original y del que está a un lado de la isometría* (refiriéndose a cada una de las figuras dibujadas sobre la tabla en la que está montado el pantógrafo).
>
> Conductor: *De la segunda imagen, les podemos llamar el antecedente, la primera imagen y la segunda imagen, ¿Qué hay entre ellas?*
>
> Juan Carlos: *Si comparamos la forma en la que están, pues una se ve rotada o girada.*

Juan Carlos centra su atención en la relación que guardan la figura antecedente y su segunda imagen. Trinidad está explorando la composición en ese momento utilizando la simulación en Cabri de la máquina articulada, esto le permite contribuir a la discusión ampliando lo que afirma su compañero:

Conductor: *¿Qué hay entre las posiciones de las figuras?*

Trinidad: *Cambian.*

Juan Carlos: *Rotan.*

Conductor: *¿Por qué dices que rotan?*

Trinidad: *Porque el efecto era como de un espejo en la simetría, y siempre van a estar encontrados* (Trinidad utiliza sus manos para explicar el efecto que produce en la orientación de la imagen una simetría axial, respecto a la orientación de la figura antecedente).

Conductor: *¿Y ahora?, en una rotación se mantiene la orientación de la figura, ¿eso sucede aquí?*

Juan Carlos: *No*

Trinidad: *Sí va a suceder porque en el último,* (refiriéndose a la segunda imagen) *como se vuelve a hacer al contrario se… bueno sería la misma imagen pero un poco volteada, es como si va girando, entonces en una rotación pasaría lo mismo.*

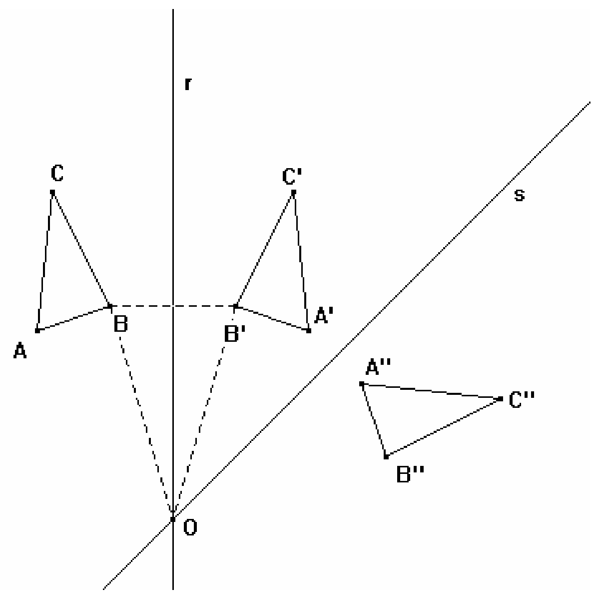
Juan Carlos: *Lo que pasa es que se sigue conservando la orientación, pero con respecto a la imagen, o sea tenemos primero el original y la primera imagen, luego tenemos la primera imagen y la segunda imagen, quedaría así.* (Juan Carlos también utiliza las palmas de sus manos, acomodándolas y mostrándolas para simular la sucesión de imágenes que genera la composición en juego).

En esta parte de la trascripción, podemos observar la forma en que Trinidad recurre a un argumento que consiste en dar cuenta de la doble inversión en la orientación de la figura antecedente, por efecto de la aplicación sucesiva de las simetrías, para concluir que la segunda imagen “recupera” la orientación de la figura original. Juan Carlos amplía la explicación de su compañera, mostrando así que ambos disponen de imágenes o de representaciones compartidas y con cualidades compatibles, referentes en este caso a la simetría axial y a la rotación. La interacción con el conductor continúa orientada a la búsqueda de otros argumentos que puedan sostener la elaboración de una prueba:

Conductor: *¿Habría algún otro argumento además de ese, para decir que aquí hay una rotación?*

Trinidad: *A partir del punto del que tomaríamos como la intersección de las rectas, se tomaría como punto de rotación y de ese punto a la figura, la distancia, y aparte debe de… va con su mismo ángulo, gira como en un círculo, con relación a un punto, lo mismo que pasaría con una rotación.*

Trinidad intuye la equidistancia de puntos correspondientes en la composición al punto de intersección de los ejes de simetría, su alusión a un movimiento circular hace suponer que éste forma parte de la imagen que ella tiene en ese momento de la composición.



Conductor: *Si ustedes toman por ejemplo el segmento BB’, ¿Qué pasa con las distancias de este punto* (señalando el punto de intersección de los ejes) *a los extremos de ese segmento?*

Trinidad: *Son iguales, porque si ese punto se mueve* (señalando uno de los vértices del rombo que constituye la articulación y que se desplaza sobre el carril que funciona como eje de simetría) *va a pasar lo que decíamos de la mediatriz, de ese eje de simetría a cierto punto habrá otro que está equidistante del otro lado.*

Conductor: *Si tomamos éste* (uno de los ejes de simetría) *como la mediatriz de… ¿qué segmentos?…*

Trinidad: *Sí, estos serían los segmentos A, B y serían equidistantes* (Trinidad señala sobre los trazadores de una de las dos máquinas de simetría).

Conductor: *Entonces la distancia que hay de este punto* (la intersección entre los ejes) *a B y a B', es la misma, ¿y entre B' y B"?*

Trinidad: *Sería lo mismo* (al tiempo que sus compañeros asienten moviendo la cabeza).

Al cabo de esta parte de la actividad fue posible esclarecer dos condiciones fundamentales. Se hizo explícita la conservación de la orientación entre la figura antecedente y su imagen bajo la composición, y también se hizo explícita la equidistancia de un punto y su imagen respecto a la intersección de los ejes. Ambos constituyen invariantes de la rotación, por lo cual los estudiantes disponían ya de argumentos suficientes para construir una argumentación más rigurosa o quizá una prueba deductiva.

- Emergencia de racionalidad matemática

En esta siguiente fase de trabajo se incorpora a la actividad Gabriela, por lo que los cuatro estudiantes están trabajando juntos, nuevamente. Como conclusión de la actividad realizada hasta ese momento, ellos han escrito en sus hojas de trabajo (Apéndice VII) argumentos para apoyar su afirmación respecto a la composición de transformaciones bajo estudio. El conductor de la sesión retoma lo que los estudiantes habían concluido, para reiniciar la elaboración de una prueba:

1) Conductor: *Ustedes ya tienen algunos argumentos, argumentos que los llevan a proponer el teorema, por ejemplo, ¿Un argumento cuál es?*
2) Juan Carlos: *Que la orientación de la figura se sigue conservando puesto que en la tercera imagen resulta ser la misma que la original.*
3) Conductor: *Que la orientación se conserva, ¿Que otro argumento tienen?*

4) Juan Carlos: *Que la figura gira alrededor del punto de intersección de los ejes.*
5) Conductor: *¿Cómo saben que gira?*
6) Trinidad: *Porque los puntos están a la misma distancia, están… son equidistantes en relación a ese punto central.*
7) Conductor: *¿Cómo sabes que son equidistantes, cuál es la razón para afirmar eso, son equidistantes a que punto?*
8) Trinidad: *A un punto de rotación.*
9) Conductor: *¿Y cuál es el punto de rotación?*
10) Trinidad: *El cruce de las perpendiculares.*
11) Conductor: *Sí, y cómo sabes que son equidistantes, ¿qué es lo que está pasando ahí para que puedas afirmar que son equidistantes?*
12) Trinidad: *Porque es como si consideráramos que el eje de simetría es una mediatriz entre el segmento de un punto y el punto de imagen, entonces, si tomas en cuenta que, cuando se cruzan las dos perpen… las dos rectas y una de ellas se toma como mediatriz entre el segmento, el punto donde se cruza está a la misma distancia de los dos extremos del segmento que forma el punto A y el punto A'.*
13) Conductor: *¿Y porqué nada más una de ellas?, si de hecho son las dos, las dos se están intersectando en un punto, ¿entonces ese punto de intersección qué?*
14) Trinidad: *Va a ser el punto de rotación.*
15) Conductor: *Sí, pero pertenece a las dos rectas, ¿no?*
16) Trinidad: *Bueno se hace al doble en vez de uno, va a haber tres figuras en vez de tomarse en cuenta solamente dos.*

Ante el señalamiento de Juan Carlos del giro de la figura alrededor de la intersección de los ejes, Trinidad hace referencia explícita (intervención 12) a una relación fundamental para construir una prueba matemática del teorema en cuestión: los ejes de simetría son mediatrices de los segmentos formados por parejas de puntos correspondientes, por lo cual un punto cualquiera del eje de simetría es equidistante de los extremos del segmento definido por puntos correspondientes. La situación impulsa a los estudiantes a descubrir propiedades o a relacionar conceptos que ya poseen con los objetos y los fenómenos que observan como parte del funcionamiento de los artefactos. Trinidad descubre, en la estructura de la máquina articulada, una relación geométrica subyacente, lo cual le permite intervenir en la discusión, aportando elementos pertinentes. En efecto, estas herramientas funcionan como instrumentos de mediación semiótica en la medida en que los estudiantes se involucran en la tarea y llegan a distinguir y a relacionar objetos y propiedades geométricas que no son evidentes de manera inmediata, a los cuales se deben referir para justificar sus afirmaciones o, inclusive, las de sus interlocutores.

El conductor pide a los estudiantes utilizar estos argumentos para elaborar una prueba del teorema. Pide, también, que consideren la construcción de trazos auxiliares, a fin de visualizar las relaciones existentes entre los elementos de la máquina y los objetos dibujados con ésta, y para hacer referencias más precisas al tratar de elaborar una prueba. Los estudiantes han decidido utilizar la simulación en Cabri de la máquina de composición de simetrías axiales con ejes coincidentes.

17) Juan Carlos: *Entonces tenemos que demostrar que sí es una rotación.*
18) Conductor: *Sí, eso es lo que queremos.*
19) Gabriela: Pero sí *es una rotación, maestro, porque vea como va …*
20) Conductor: *¿Cuando dos puntos se corresponden en una rotación, qué es lo que hay ahí, qué es lo que sucede?… Por ejemplo tengo O, el centro de la rotación, y tengo P y P’ ¿qué pasa entre P, O y P’?*
21) Trinidad: *Se forma un ángulo de cierto valor.*
22) Conductor: *Hay un ángulo, ¿y qué más?*
23) Trinidad: *Los puntos siguen siendo equidistantes.*
24) Conductor: *Los puntos son equidistantes de O.*

Nuevamente, el conductor pretende que los estudiantes hagan explícitos argumentos teóricos y no sólo argumentos visuales o referidos a la evidencia que el software proporciona, para ello alude a una imagen interiorizada de la rotación, la cual funciona adecuadamente para obtener respuestas de Trinidad.

Los estudiantes continúan la exploración con el modelo simulado, construyen un triángulo y con la herramienta *Redefinir Objeto* limitan el movimiento de uno de los trazadores al recorrido del perímetro de ese triángulo, utilizan además la herramienta *Traza Activada* con el fin de dibujar la primera y la segunda imágenes del triángulo. A sugerencia de Trinidad, ellos miden el ángulo entre los dos ejes de simetría y el ángulo formado por un vértice del triángulo original, la intersección de los ejes y la segunda imagen de ese vértice, con el objetivo aparente de confirmar su afirmación, presentada como teorema. También utilizan la herramienta *Rotación* del menú de transformaciones geométricas como otra forma de verificar su afirmación. Cuando parece que se han agotado las posibilidades de obtener más información de la manipulación del modelo simulado, el conductor sugiere trabajar con lápiz y papel.

Los estudiantes dibujan un esquema similar al representado en la simulación de la máquina articulada (figura 8), en el que indican la posición de los ejes de simetría y las posiciones relativas entre tres triángulos que se corresponden en la composición:

25) Trinidad: *¿Así?* (mostrando su esquema al conductor de la sesión)
26) Conductor: *¿Y ahora… sobre ese dibujo qué puedes hacer?... Parece ser que hay que probar dos cosas. Una que los puntos son equidistantes, o sea que A y A” son equidistantes de la intersección de los ejes y la otra es que el ángulo de rotación es el doble del ángulo que forman los ejes.*
27) Juan Carlos: *¿Entonces hay que escribir argumentos para comprobar la… lo que nos pide?*
28) Trinidad: *Pero los argumentos ya los habíamos escrito.*

29) Conductor: *Los argumentos ya los tienen de alguna manera, ahora traten de armar la prueba, por ejemplo: ¿Qué es lo que demuestra que los puntos A y A', dos puntos correspondientes, son equidistantes de la intersección de los ejes, cómo lo pueden demostrar?*

30) Juan Carlos: *Bueno, por ejemplo, si uniéramos B con B' y B" y quisiéramos por ejemplo que hubiera otra imagen que fuera B"' y así, y fuéramos uniendo los puntos se haría una circunferencia…*

Trinidad simultáneamente ha construido una circunferencia en la pantalla que pasa por puntos correspondientes en la composición, sin que haya habido comunicación aparente entre ella y Juan Carlos en ese sentido. Ambos estudiantes tienen ya una idea clara de la relación entre los puntos correspondientes en la composición, ternas de puntos en este caso, ellos saben que equidistan de la intersección de los ejes, y lo pueden mostrar construyendo una circunferencia. El conductor nuevamente trata de hacer notar la necesidad de elaborar argumentos teóricos, en predominancia sobre argumentos visuales o producidos mediante una constatación visual de lo que se quiere probar:

31) Conductor: *Ahora eso, ¿qué tiene que ver o cómo lo puedo conectar con que en la composición de simetrías axiales con ejes coincidentes, los puntos correspondientes van a ser equidistantes, en este caso los tres puntos que se corresponden, aunque nos interesa nada más el primero y el tercero realmente, esos puntos ¿Por qué siguen siendo equidistantes de la intersección de los dos ejes?*

32) Trinidad: *Por lo que le decía de la mediatriz.*

Al responder, Trinidad muestra una actitud que sugiere que para ella ya no requiere mayor discusión el hecho de la equidistancia de diferentes ternas de puntos correspondientes al punto de intersección de los ejes de simetría, constituido como el centro de la rotación. En este momento parece surgir cierto desconcierto o cierta tensión entre el concepto de prueba que el conductor desea que los estudiantes adopten, y el concepto de prueba que éstos reflejan en su propia actividad. Este conflicto no se resuelve de manera inmediata, dada la asimetría entre ambas concepciones y porque una aproximación deductiva a la prueba requiere más que una serie de indicaciones a ser seguidas por los estudiantes, aún cuando ellos hayan observado previamente este tipo de demostraciones y hayan descubierto propiedades matemáticas que potencialmente sustenten la prueba. Al parecer, la insistencia del conductor de la sesión en el sentido de inferir consecuencias lógicas a partir de lo que se está afirmando llega a convertirse, en ciertos momentos, en un obstáculo para el avance de los estudiantes en su propio proceso de validación.

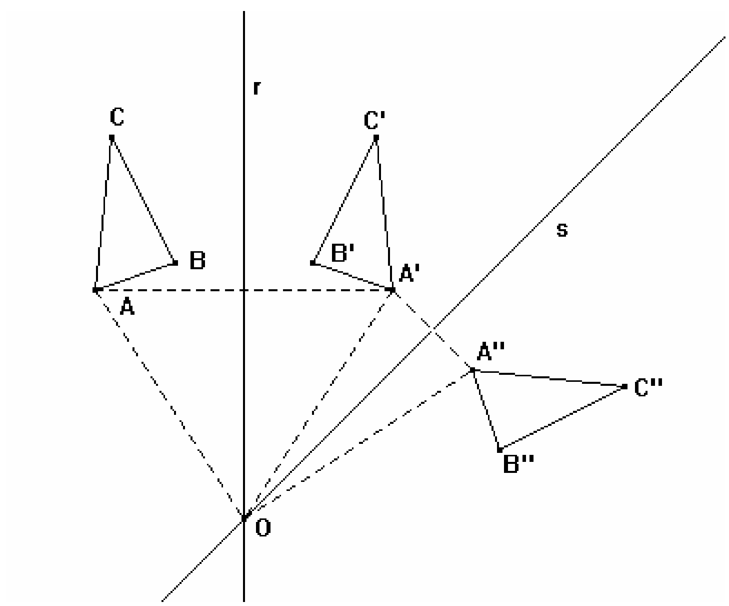
Por otra parte, la decisión de los estudiantes de seguir explorando la composición mediante el modelo simulado les permite verificar sus conjeturas y convencerse de la veracidad del teorema en juego, utilizando la herramienta de medición de ángulos y la herramienta de rotación misma, para superponer la figura antecedente sobre la segunda imagen resultado de la composición.

Después de esta fase de trabajo, Trinidad presenta a sus compañeros el esquema que ha dibujado con la intención de construir una prueba. El esquema es explicado inicialmente por Gabriela y después por Trinidad misma. Esto sirve para que el conductor mencione la posibilidad de hacer trazos auxiliares sobre el esquema que Trinidad ha hecho para hacer explícitas las relaciones entre los objetos geométricos involucrados:

33) Conductor: *Tenemos A, A' y A", pueden ser tres vértices correspondientes de los triángulos, estamos diciendo que A y A' son equidistantes de O, porque son simétricos y O es un punto del eje de simetría, ¿están de acuerdo con eso? Ahora A' y A" también son equidistantes de O por la misma razón, entonces si A y A' son equidistantes de O y a su vez A' y A" son equidistantes de O, ¿habría alguna consecuencia, o puedo inferir algo de eso?*
34) Trinidad: *Son dos ángulos, ¿iguales?*
35) Conductor: *¿Quienes son ángulos iguales?*

36) Trinidad: *Los formados entre A y A’ y el punto O y los formados entre A’ y A” y el punto O.*

Esta parte del episodio muestra un momento interesante en la interacción y potencialmente útil para llegar a la justificación matemática plena de la proposición en juego. Trinidad hace explícita la relación fundamental que complementa los argumentos requeridos para elaborar la demostración del teorema en términos de los elementos de la composición, esto es, que hay dos pares de ángulos iguales entre sí, los formados por tres puntos correspondientes en la composición, la intersección de los ejes de simetría y los ejes mismos.



$\angle$AOr = $\angle$rOA’ ; $\angle$A’Os = $\angle$sOA’’

Sin embargo este argumento no es aprovechado o no es identificado en ese momento como el argumento necesario para completar la demostración, además de la consecuencia lógica que el conductor está tratando que los estudiantes externen (la transitividad entre dos cosas iguales a una tercera), no obstante ese argumento reaparecerá más tarde en voz de Trinidad, mostrando su pertinencia. El conductor desvía la discusión hacia un hecho intrascendente respecto a lo que se quiere lograr, posteriormente centra la discusión en la congruencia entre segmentos correspondientes en la composición:

37) Conductor: *¿Son iguales los ángulos, ustedes creen que van a ser iguales?*

38) Juan Carlos: *No*

39) Conductor: *¿Por qué no?*

40) Juan Carlos: *Porque por ejemplo como es una simetría axial, o sea con respecto al final de la primera imagen cambia la orientación, entonces ahí el ángulo…* (inaudible) *tiene una abertura, entonces en la otra figura pues se invierte y el ángulo es más cerrado.*

41) Conductor: *Sí, el segmento AO es igual al segmento A’O, ¿por qué?*

42) Juan Carlos: *Porque son simétricos.*

43) Conductor: *Porque A y A’ son simétricos y O es un punto del eje de simetría. Pero también el segmento A’O y el segmento A”O son iguales, ¿están de acuerdo? ¿por qué?*

44) Juan Carlos: *Porque también son simétricos.*

45) Conductor: *Y O es un punto del eje de simetría, ¿Qué se puede deducir de ahí?*

46) Juan Carlos: *Que AO y A”O son iguales.*

Después de esto el conductor repite el argumento con la intención de que Gabriela, Trinidad y Rodrigo se percaten, también, de la consecuencia lógica que da lugar a esta última afirmación. Los estudiantes toman su lápiz y en su hoja de trabajo tratan de establecer esta inferencia, Trinidad lo hace mediante notación algebraica, Juan Carlos escribe su deducción en forma de texto (Apéndice VII). Después, continúa la interacción:

47) Gabriela: *Maestro, entonces ¿ya acabamos?*

48) Conductor: *¿Ya está probado el teorema?*

49) Gabriela: *Pero ya con todos estos dibujitos y cositas pues yo creo que...* (inaudible)*... a entender.*

50) Conductor: *El teorema plantea que el resultado de una composición de simetrías axiales con ejes coincidentes es igual a una rotación…*

51) Gabriela: *Al doble del ángulo formado por los ejes.*

52) Conductor: *Con esta parte que tienen ahí ya se está demostrando o probando que los puntos sí están rotando, pero ¿que falta?, o ¿ya está todo?... El teorema dice que el ángulo de rotación es el doble del ángulo formado entre los ejes, ¿Eso ya está confirmado o mas bien probado, o demostrado?*

53) Juan Carlos: *No, pero eso lo podemos demostrar.*

54) Conductor: *Pero eso lo podemos demostrar.*

55) Gabriela: *Midiendo los ángulos.*

56) Juan Carlos: *No, ¿Puedo hacer una figura en el pizarrón?*

Aquí es patente el involucramiento de Juan Carlos en el proceso de elaborar una prueba teórica de lo que se está afirmando al considerar la posibilidad de llevar a cabo tal prueba, oponiéndose a lo que propone Gabriela. Juan Carlos hace una representación esquemática en el pizarrón de la composición de transformaciones (figura 9), que funciona adecuadamente para iniciar una explicación de la relación entre el ángulo formado por los ejes de simetría y el ángulo de la rotación resultante de la composición. Esto da pie para un proceso de interacción entre los participantes en el que se presentan diferentes aportaciones a la discusión. En particular las aportaciones de Trinidad muestran que ella ya había interiorizado la relación angular necesaria para establecer adecuadamente la relación buscada (intervenciones 35 y 37).

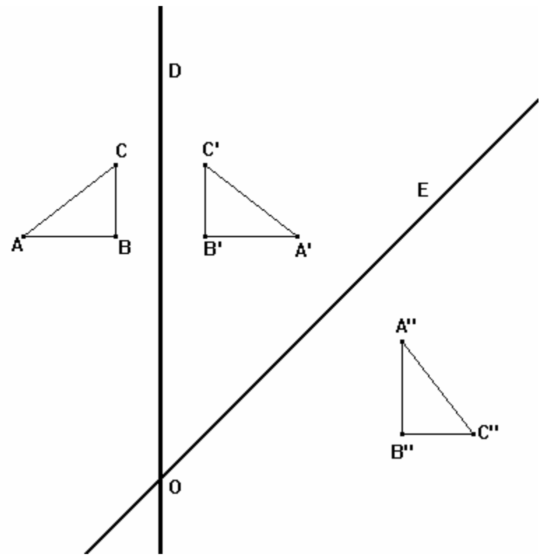


Figura 9

57) Juan Carlos: *El teorema nos dice que este ángulo, o más bien que el ángulo de rotación entre una figura y la otra con relación al punto O es el doble del ángulo en que se intersecan los ejes, y la forma en como yo lo veo es porque aquí supongamos que esta figura* (la que ha hecho en el pizarrón)… *la distancia de aquí a acá es la misma que hay del eje a la otra figura, es decir, que son simétricos con respecto al eje, ¿no maestro?*

58) Conductor: *Sí*.

59) Juan Carlos: *Lo mismo pasa acá entre los puntos correspondientes B, B', A, A' y C, C'*

60) Conductor: *Por construcción, A y A' son simétricos respecto a D, y A' y A" son simétricos con respecto a E, ¿Si están de acuerdo en eso? Ésa sería la hipótesis de la que estamos partiendo para demostrar el teorema. ¿Y entonces?*

61) Juan Carlos: *Y entonces la rotación sería la suma de este ángulo más estos segmentos, o sea este espacio que queda aquí, más éste que quedaría acá, que eso como ya lo vimos pues sería igual al que está aquí*.

Juan Carlos se refiere a los segmentos entre los puntos correspondientes y el eje de simetría que los relaciona, pero también trata de referirse al “espacio” entre esos puntos y los ejes mismos.

62) Conductor: *¿Ustedes qué opinan?, ¿Esos espacios de los que estás hablando no podrías mostrarlos también como ángulos?*
63) Juan Carlos: *¿Cómo ángulos?, Si.* (trazando en el pizarrón los segmentos OA y OA”)
64) Conductor: *¿Entonces que está pasando?*
65) Juan Carlos: *Que al sumar estos dos ángulos*…
66) Conductor: *¿Cuáles ángulos?*
67) Trinidad: *¿Por qué no pones un ángulo del punto cero a A’.*
68) Conductor: *Vamos a ver, sí, Trinidad.*
69) Trinidad: *Del punto cero a A’ pon una línea.*

Trinidad propone dibujar, también, la recta OA’, con lo cual ya es posible establecer la relación angular implicada en la composición. De esta forma, ella puede referirse a lo que ya previamente había visualizado:

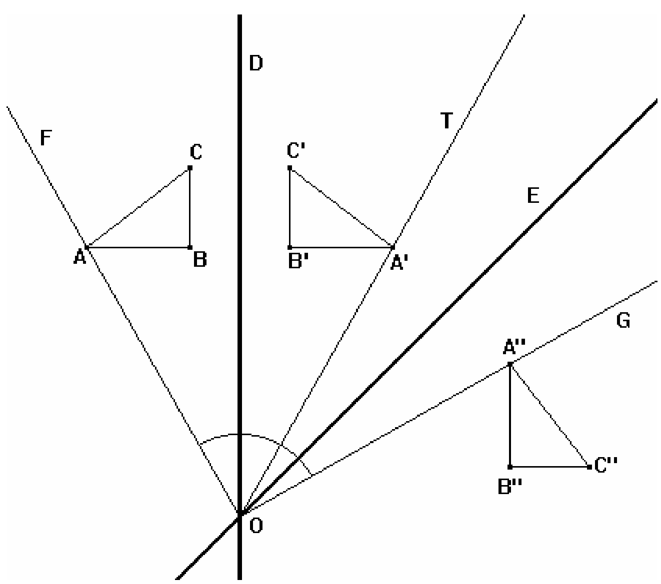


Figura 10

70) Juan Carlos: *¿Del punto cero?...*

71) Trinidad: *De O a A'* (Juan Carlos traza en el pizarrón la recta OA')… *sí y ahora sí se ve eso de la suma de los ángulos.*

72) Conductor: *A ver, ¿cómo está eso de la suma de los ángulos?*

73) Trinidad: *Es que así se comprobaría más la rotación.*

74) Conductor: *¿La rotación o el doble de los ángulos?, Bueno es parte… ¿Qué suma ves, de ángulos, Trinidad?*

75) Trinidad: *Bueno sería más bien porque, el ángulo que se forma entre lo que él puso como F y D y el que se forma entre E y G, creo que E y G, a simple vista se ve más grande que el de F y D, entonces al partirlo a la mitad se ve más que F, D y la otra que le dije yo que pusiera* (la recta OA')*.*

76) Conductor: *¿FOD?, ¿FOD dices tu?*

77) Trinidad: *Sí, forma un ángulo igual al que forma D, O, ponle H al de arriba.* (Trinidad está tratando de hacer notar la congruencia entre los ángulos AOD y DOA' de la figura 10)

78) Juan Carlos: *A ver, T de Trinidad* (asignando T a la recta OA').

79) Conductor: *Bueno con esa nomenclatura que tenemos en el pizarrón ¿Qué se quiere probar? Que AOA" es el doble de DOE, ¿si están de acuerdo? Entonces, dice Trinidad, ahí se puede ver ya mejor la suma, pero ¿cuál suma?*

80) Juan Carlos: *Pues la suma de estos dos ángulos, ¿no?, o sea, este ángulo se ve representado aquí* (señalando a los ángulos AOD y DOA')

81) Trinidad: *El ángulo AOD se representa en DOA'*

82) Conductor: *¿Cómo está eso de que se representa?*

83) Trinidad: *Bueno es equivalente*.

Tanto para Trinidad como para Juan Carlos es claro que los vértices simétricos con la intersección de los ejes forman ángulos congruentes, incluso, sus intervenciones se complementan coherentemente. Sin embargo, surge cierta dificultad para hacer explícita la congruencia de ángulos, quizá por no disponer, en ese momento, de términos adecuados. El conductor sigue buscando que se hagan explícitas razones teóricas, para justificar las afirmaciones generadas, llegando, en ocasiones, a proponer esas razones él mismo.

84) Conductor: *Sí, si trazaran el segmento AA' ¿Qué pasaría?*
85) Trinidad: *Se formaría un triángulo.* (Simultáneamente Juan Carlos traza el segmento.)
86) Conductor: *Se forma el triángulo AOA', ¿Y ese triángulo qué?*
87) Trinidad: *Es un triángulo isósceles, con dos lados iguales y uno diferente y que se da esa equidistancia que explicaba con la mediatriz.*
88) Conductor: *Entonces los ángulos que se forman acá en el vértice O, esos dos ángulos que se forman ¿cómo son?*
89) Trinidad: *Iguales, porque están cortando exactamente a la mitad el triángulo... como la mediatriz*.
90) Conductor: *La mediatriz es a su vez ¿qué? del ángulo… del ángulo AOA'*.
91) Trinidad: *Ah... la… ¿diagonal?*
92) Conductor: *También es la bisectriz, del ángulo, ¿no?*
93) Trinidad: *Eso, eso es*.
94) Conductor: *Entonces, si en este caso la recta D es la bisectriz del ángulo AOA', los ángulos AOD y DOA' son iguales, ¿están de acuerdo?…*

En este momento la actividad llega a un límite, evidenciado por la resistencia de los estudiantes a continuar la discusión y acentuada, posiblemente, por la insistencia del conductor de justificar cada una de las afirmaciones generadas. Después de esto, los estudiantes proceden a concluir, por escrito, una demostración del teorema establecido (Apéndice VII).

- Discusión

Se considera importante, desde el punto de vista de la tesis, hacer los siguientes señalamientos respecto a lo observado en el desarrollo de este episodio:

1. El desarrollo de esquemas de utilización asociados a los artefactos

Los estudiantes optan por emplear los artefactos disponibles en términos de la eficacia que les otorgan para las tareas específicas en las que están involucrados. Para los estudiantes es ya un proceso relativamente rutinario, es parte de sus esquemas de utilización (Verillon y Rabardel, 1995, p. 86), asociar convenientemente los elementos visibles en las herramientas con los elementos característicos de las transformaciones geométricas en juego, trátese de elementos de posición, como el centro de rotación o los ejes de simetría, o de elementos de relación, como el ángulo de rotación o pares de puntos correspondientes en la simetría. Esto promueve la articulación de lo que Sangaré (1999) señala como las propiedades afines (paralelismo, o pertenencia de un punto a una recta, etc.) y las propiedades euclidianas (conservación de razón de longitud, ortogonalidad, etc.) características de las transformaciones en el plano. La actividad también estimula el surgimiento en la discusión de aspectos o elementos que subyacen en los hechos geométricos que ellos están constatando; tal como la noción intuitiva de “conservación de la orientación” entre el objeto antecedente y su imagen bajo la composición, o el reconocimiento del eje de simetría como mediatriz de segmentos formados por pares de puntos correspondientes.

2. La racionalidad teórica sustentada en la fenomenología de la experiencia geométrica obtenida

El dominio fenomenológico que la utilización de los artefactos culturales provee, permite establecer una base de experiencias de aprendizaje conveniente para el involucramiento productivo de los estudiantes en una situación de validación matemática, además permite también que la afirmación por validar sea formulada y evaluada por medio de los artefactos mismos, es decir, los estudiantes pueden establecer un hecho geométrico con cierto nivel de generalidad, y también pueden desarrollar argumentos con los cuales mostrar la verosimilitud del mismo.

Simultáneamente, la actividad promueve una integración semántica de las representaciones que los artefactos proporcionan, además de las que los estudiantes generan. Esta afirmación se sustenta en el nivel de comprensión que los estudiantes muestran de la proposición geométrica en juego, asumiendo que ésta, una vez afinada, es plenamente comprendida por los participantes, es decir, es significativa y constituye un objeto de conocimiento, en el cual están incorporados representaciones externas e internas. Así, el involucramiento productivo en situaciones de validación y la integración semántica de representaciones promueven el desarrollo de una racionalidad teórica que consiste en dar cuenta de las relaciones matemáticas que subyacen no sólo en los artefactos mismos sino en las representaciones que estos proporcionan y en las que los estudiantes reconstruyen e interiorizan. Esto les permite separarse eficazmente del nivel fenomenológico para avanzar en la construcción de pruebas intelectuales. La noción de prueba matemática evoluciona en el sentido de la importancia de introducir, en la discusión, propiedades y relaciones geométricas presentes en los objetos o en los procesos bajo estudio.

3. La discusión como una forma de conocimiento matemático socialmente construido

La participación en diálogos que tienen como motivo hacer explícitas propiedades y relaciones geométricas inherentes a los artefactos culturales utilizados, produce discusiones que van dando forma a un objeto de conocimiento matemático. Tal objeto de conocimiento es compartido por los participantes en el proceso. Si bien la participación de estos no está en un mismo nivel, al parecer, los niveles de comprensión acerca de lo que se discute y afirma llegan a ser “suficientemente homogéneos”, lo cual nos permite asumir que existe una construcción social de conocimiento matemático vía la discusión generada, sustentada en el hecho de que los participantes comparten experiencias matemáticas. Vemos en esto una relación recíproca entre los significados atribuidos a los objetos de conocimiento involucrados y el nivel de la discusión generada. Por otro lado, si el avance en el proceso de validación queda limitado, esto es debido a cierta “saturación” de la interacción social desarrollada en el aula, generada, probablemente, por la tensión que existe entre la perspectiva del conductor respecto a lo que espera para asumir que se ha producido una prueba, y la apreciación personal de los estudiantes respecto a lo que representa una justificación suficiente. Se percibe en esto un problema recurrente en la investigación en educación matemática respecto a la necesidad o al papel de la prueba: la necesidad de construir una prueba matemática sólo es asumida por el profesor, sin embargo, en el episodio bajo análisis, podemos observar en los estudiantes actitudes favorables hacia la construcción de una prueba intelectual, es decir, cobra importancia el tipo de razones que se proponen en la discusión para validar una afirmación, en el sentido de aportar razones sustentadas en la teoría matemática de la que los estudiantes disponen.

- Cierre

Si bien no se estableció una prueba matemática formal de la proposición en juego, fue posible hacer explícitos argumentos necesarios y suficientes para construir una prueba en tal sentido. Los estudiantes llegaron a tener conciencia plena de las relaciones geométricas involucradas y una comprensión profunda de la proposición correspondiente. Podemos hablar, en estos términos, de la emergencia de una racionalidad matemática, es decir, en la discusión se llegó a proponer argumentos teóricos que corresponden a lo que los estudiantes aprehendieron acerca de las transformaciones involucradas en la composición bajo estudio. La utilización complementaria de las herramientas disponibles, y su carácter de representaciones dinámicas y diferenciadas, apoyaron consistentemente el descubrimiento y la integración de propiedades y relaciones geométricas para desarrollar argumentos pertinentes en la justificación matemática de una afirmación. En ese sentido la mediación adquirió el carácter de semiótica, puesto que la actividad, en su conjunto, permitió a los estudiantes interiorizar imágenes o representaciones adecuadas para la elaboración y la justificación de sus propios argumentos. Tales representaciones funcionan como herramientas del pensamiento ante situaciones de validación, ya que poseen significados o están dotadas de contenido matemático, al incorporar propiedades y relaciones características referidas a las transformaciones geométricas involucradas.

Así, la transición de una racionalidad pragmática, o de un nivel fenomenológico de justificación, a una racionalidad teórica, está estrechamente ligada a la mediación semiótica desarrollada en la actividad. Es importante considerar el papel y la calidad de la discusión matemática, referida a lo que los artefactos permiten descubrir, para proponer una explicación significativa de los procesos interpsicológicos e intrapsicológicos desencadenados en el desarrollo de estas experiencias de aprendizaje. Nuevamente, la actividad centrada en la utilización de las herramientas y los esquemas de utilización desarrollados, muestran su potencial para generar, en el contexto interno de cada uno de los participantes, objetos matemáticos experiencialmente reales, de manera que la discusión puede conducirse, con cierta naturalidad, hacia la caracterización matemática de los mismos o hacia la identificación de las relaciones o los invariantes geométricos intrínsecos; estimulando, así, el proceso de internalización de objetos abstractos dotados de significado. Las intervenciones del profesor también promueven el esclarecimiento de relaciones presentes en los objetos bajo estudio y la adopción, por los estudiantes, de actitudes favorables a la búsqueda de argumentos teóricos para validar una afirmación. La interacción entre pares permite a los estudiantes modificar sus percepciones de lo que los artefactos producen, flexibilizar sus posturas con respecto a una proposición y ampliar su comprensión de la misma. Esto abre paso al surgimiento de una racionalidad teórica en el proceso de validación de una afirmación.

Finalmente, este episodio permite corroborar que las transformaciones geométricas constituyen un campo de experiencia propicio para el involucramiento de los estudiantes en una organización local de proposiciones matemáticas y, eventualmente, en la formulación de teoremas y la elaboración de pruebas. Esto es posible, al menos, en el caso de la composición de isometrías, dado que, como se ya se señaló (apartado 2.1.2.1), éstas constituyen un grupo, es decir, al construir composiciones cualesquiera entre estas transformaciones, los productos siguen siendo elementos del conjunto de las isometrías.

4.3.3. El escenario de actividad como promotor de la apropiación de representaciones de carácter dinámico y su papel en la resolución de problemas

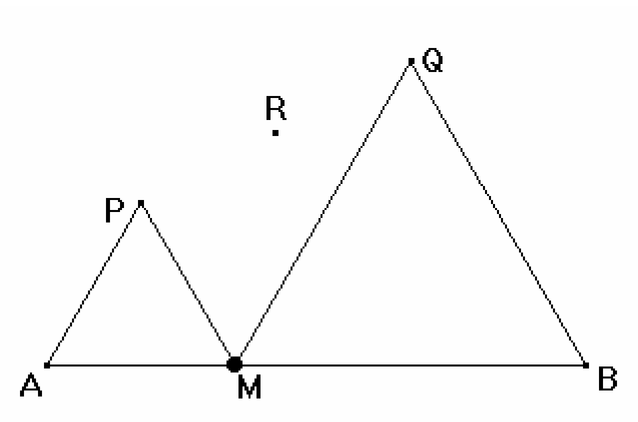
Como se hizo en el estudio inicial, también en el estudio final los estudiantes realizaron tareas de resolución de problemas, problemas de construcción geométrica cuya estructura corresponde a alguna de las transformaciones estudiadas por los estudiantes en el laboratorio de matemáticas. De hecho, fueron los problemas propuestos en el primer estudio empírico los que se presentaron en este segundo estudio, aunque con algunas modificaciones orientadas por las conclusiones que se obtuvieron al cabo del estudio inicial. Se consideró, entonces, la necesidad de promover la elaboración de conjeturas, la explicitación de argumentos para hacerlas plausibles, así como una posible recuperación de esos argumentos, para avanzar en una justificación matemática de los resultados o de las aserciones generadas.

Uno de los problemas que mejor promovió la participación de los estudiantes en el proceso de resolución, estimulando la generación de alternativas y de argumentos para abordar la situación planteada, es en el que se pide encontrar el lugar geométrico del punto medio entre dos vértices de dos triángulos equiláteros relacionados funcionalmente a través de una construcción dinámica. Con respecto al desempeño de los estudiantes al abordar este problema en el estudio inicial (apartado 4.2.2 **-** Un argumento apoyado en la exploración de una figura geométrica dinámica), se observó que ellos llegaron a crear una construcción dinámica que efectivamente satisfizo las condiciones estipuladas, llegando a proponer de manera más o menos precisa el lugar geométrico buscado. En esa ocasión, dos parejas de estudiantes formularon argumentos adecuados para iniciar la elaboración de una justificación teórica del resultado propuesto, sin embargo, no fue posible llevar a una discusión más amplia tales argumentos. Teniendo en cuenta esos resultados, se planteó en el estudio final nuevamente la tarea, aunque ahora poniendo énfasis en la explicitación de argumentos y su registro como una alternativa para el avance en la elaboración de una prueba, además se procuró una interacción más estrecha entre los estudiantes y con el conductor de las sesiones a fin de llevar a la discusión los argumentos emergentes.

A continuación se presenta el episodio en el que Trinidad, Rodrigo, Gabriela y Juan Carlos están ocupados en la tarea de resolver el problema referido. Este episodio permite analizar un proceso de validación matemática a través de diferentes etapas, desde una exploración inicial de la situación-problema apoyada en la obtención de representaciones internas dinámicas referidas a la construcción requerida en el enunciado, hasta el esclarecimiento de la relación geométrica necesaria y suficiente para justificar, en un nivel teórico, la afirmación producida. Llama la atención, particularmente, el uso que los estudiantes hacen de sus representaciones internas, las cuales muestran un carácter dinámico que se anticipa a la obtención de una figura Cabri.

El planteamiento de la actividad es el siguiente:

Construye un segmento AB y un punto M sobre el segmento AB. Construye los triángulos equiláteros AMP y MBQ, y el punto R como el punto medio del segmento PQ.



- ¿Cuál supones que es el objeto geométrico que describe R cuando M se desplaza sobre AB?
- ¿En qué fundamentas tu conjetura?
- Verifica tu conjetura. ¿Es correcta?
- ¿Cómo has verificado tu conjetura?
- Elabora una prueba teórica que le de validez a tu solución. Þ Trata de conectar o de relacionar las propiedades geométricas involucradas en la transformación utilizada de manera que expliquen y que justifiquen por qué tu solución es correcta.

Desarrollo de la actividad

1. Visualización de la dinámica de la figura

En esta parte, con la que se inició la actividad sobre la tarea propuesta, la interacción entre los cuatro estudiantes y el conductor de la sesión se dirigió a comprender la situación planteada y a generar alternativas para hacer la construcción dinámica requerida sin utilizar aún el software sino apoyándose únicamente en el enunciado del problema y en el esquema adjunto. Esta primera fase del proceso de resolución está caracterizada por la dificultad de diferenciar entre el segmento de recta al que por construcción pertenece el punto R y su propio lugar geométrico.

Fue necesario, al inicio de la actividad, que el conductor interviniera para hacer notar la posibilidad de obtener una figura dinámica que conservase la condición básica señalada en el enunciado del problema, esto es, la calidad de equiláteros de los triángulos involucrados. Si bien, al principio, los estudiantes señalaban que esta condición no se mantendría, después de dicha intervención ellos asumieron que podrían obtener una figura funcional, en términos de la condición requerida, previendo, inclusive, formas de hacer la construcción en el ambiente de Cabri. Una vez asumida esta posibilidad, los estudiantes comenzaron a generar imágenes referidas a la dinámica de la figura por construir:

Conductor: …*Como están construyendo triángulos equiláteros, cuando se mueve M sobre AB, ¿Qué va a pasar con los triángulos?*

Juan Carlos: *Van a cambiar su tamaño.*

Conductor: *¿Y qué pasará con el punto R, el punto R entre P y Q?, ¿P y Q se van a mover?*

Juan Carlos: *Sí.*

Juan Carlos acompaña su afirmación simulando con sus manos un movimiento alternado de 'sube y baja', con la intención de representar el movimiento relativo entre los vértices P y Q, como una consecuencia del desplazamiento del punto M. Rodrigo muestra estar de acuerdo con lo que su compañero propone, asintiendo con la cabeza. Parece que esta primera anticipación de la dinámica "básica" de la figura estimula la generación de representaciones internas dirigidas a visualizar el objeto que describe el punto R. Los estudiantes tratan de imaginar cuál será el movimiento de ése punto cuando la figura se transforma:

Conductor: *Lo que se pide en el problema, ¿qué es?... Encontrar el lugar geométrico de R, predecir, que es lo que genera el punto R.*

Gabriela: *¿Qué ruta?*

Conductor: *¿Qué curva o qué ruta o qué trayectoria describe?*

Trinidad: *Una paralela... no, una línea recta con una inclinación de quién sabe cuantos grados con la línea recta, bueno con el segmento AB. Es un segmento digamos que imagen, pero con cierta inclinación.*

Conductor: *¿R se va a mover sobre una recta que forma un ángulo con AB?*

Trinidad: *Bueno, si se alargaran los segmentos, cruzarían en cierto momento y sería un ángulo.*

Trinidad comienza a generar su propia imagen dinámica de la figura, en ésta, el segmento formado entre los vértices P y Q se constituye en el referente inmediato. Así, Trinidad señala que este segmento, o la recta de la que es parte, se intersecará con el segmento base de la figura o con su prolongación, formando distintos ángulos. En ese momento, para Trinidad, el lugar geométrico de R y el desplazamiento que experimenta PQ están integrados en un sólo objeto. Esto representó durante buena parte de la actividad un obstáculo para visualizar el lugar geométrico en cuestión, es decir, la diferenciación entre el movimiento de PQ, del cual R es el punto medio, y el lugar geométrico de R mismo, constituyó una tarea difícil para los estudiantes, aún después de haber obtenido una figura Cabri. Después de esto, surge una propuesta que activa este proceso de diferenciación. Juan Carlos lleva a cabo una construcción auxiliar (sobre la figura proporcionada en el enunciado) con regla y escuadra, mostrando una nueva posición para M y, en función de ésta, una nueva disposición de los objetos en la figura. Esto le da confianza para afirmar que el desplazamiento de R describe una paralela al segmento AB.

Juan Carlos: *Yo maestro, yo creo que se va a mover en línea recta, bueno en forma paralela a AB.*

Conductor: *¿Por qué?*

Juan Carlos: *Porque acabo de hacer dibujos*.

Conductor: *¿Cómo hiciste los dibujos?*

Juan Carlos: *Puse, escogí un segmento cualquiera entre A y B y puse el punto M... que sería aquí*.

Conductor: *Moviste el punto M de donde está en el dibujo ¿no?, ¿Y luego?*

Juan Carlos: Y luego pues ya hice los triángulos, y busqué el punto M, digo el punto R.

Juan Carlos se apoya en el caso mostrado en el guión de la actividad y en un segundo caso que él mismo ha construido para trazar una recta que percibe como una paralela al segmento original. En ese momento él ha sido capaz de separar el objeto de su atención, el punto R, del desplazamiento del segmento PQ, evitando que éste interfiera en su proceso de búsqueda. Puede decirse que Juan Carlos ha visualizado la dinámica del objeto de interés de manera previa a la utilización del software. Para esto ha sido fundamental su propia reconstrucción de la figura en otra configuración, asignando una nueva posición para el punto M sobre el segmento AB.

Si bien el razonamiento de Juan Carlos corresponde con el de una prueba pragmática, quizá en el nivel de *empirismo ingenuo*, según lo que propone Balacheff (1987), puesto que se sustenta en la observación de un par de casos, la reconstrucción que él hace de la figura parece aproximarse más a una *experiencia crucial*, sobre todo por su intención, esto es, Juan Carlos está inmerso en un proceso de generalización referido a las distintas posiciones que experimenta el punto M y, en consecuencia, el punto R. Así, su procedimiento, y la nueva configuración que él obtiene, lo llevan a proponer una conjetura verosímil.

2. Confirmación de la conjetura

La actividad continúa con la intención de establecer argumentos para validar la conjetura propuesta por Juan Carlos. Los estudiantes, en parejas (Trinidad con Juan Carlos y Gabriela con Rodrigo), trabajan con el software, primero para obtener la figura Cabri requerida y después para confirmar la conjetura y avanzar en su justificación.

Tras un intento errado de Trinidad de construir la figura Cabri, Juan Carlos lleva a cabo la construcción que había ya previsto. Él utiliza la herramienta *Rotación* para girar los segmentos AM y MB alrededor de los extremos A, M y B, construyendo, así, los triángulos equiláteros. Su construcción queda validada al conservar las relaciones geométricas requeridas cuando el punto M es arrastrado sobre el segmento AB. Juan Carlos obtiene confirmación empírica y dinámica de lo que ya había afirmado en la fase de exploración y discusión del problema. Utilizando varias herramientas del software, puede mostrar que el punto medio entre los vértices P y Q describe un desplazamiento paralelo al segmento AB. Para hacer esto, construye una paralela a ese segmento por el punto R, y con la herramienta *Traza* muestra como el desplazamiento del punto R coincide con la paralela. Si bien aún faltaba especificar la posición y la longitud del segmento descrito por ese punto, su conjetura pudo ser confirmada mediante el empleo productivo del software.

La figura Cabri y sus atributos (los que Juan Carlos ha puesto en evidencia), alientan a Trinidad a presentar un argumento para justificar el lugar geométrico de R.

> Conductor: *Entonces* R *describe un segmento... ¿Cómo es ese segmento?*
> Juan Carlos: *... siempre está alineado con* P *y* Q*, entonces...*
> Trinidad: *Siempre va a ser la diferencia cuando los dos triángulos sean iguales, y que forme una línea recta, el segmento* PQ*.*
> Conductor: *Todo el tiempo forman una línea recta.*
> Trinidad: *Bueno si, pero sin inclinación, va a ser ése, ése es el trayecto que hace* R*.*

Trinidad ha visualizado una configuración particular, la que corresponde al caso en el que M coincide con el punto medio de AB y, en consecuencia, los dos triángulos son congruentes. En este caso, el segmento PQ se superpone al lugar geométrico de R. Al parecer, Trinidad descubre que entre los vértices P y Q existe una relación constante ("*Siempre va a ser la diferencia cuando los dos triángulos sean iguales y que forme una línea recta, el segmento* PQ), un invariante de la construcción dinámica. Un argumento semejante a éste fue propuesto por Maricarmen, una de las estudiantes que participó en el estudio empírico inicial. De hecho, la representación que Maricarmen en ese momento propuso (véase la figura 5 en el apartado 4.2.2), muestra claramente una idea intuitiva de compensación o de equilibrio entre los vértices de los triángulos involucrados en la figura. Esto nos lleva a suponer que la figura dinámica en juego es eficaz para promover formas de visualizar el objeto geométrico de R, y aún para generar argumentos matemáticos, no evidentes, con los cuales iniciar una justificación teórica. Si bien este argumento, por sí sólo, no es suficiente para elaborar una justificación teórica de la conjetura presentada, si permite a Trinidad convencerse de la validez de la conjetura propuesta y entrar en una fase de justificación que apela a relaciones geométricas no evidentes en la figura Cabri.

Por su parte, Gabriela y Rodrigo están aún tratando de encontrar sentido a la afirmación formulada previamente por Juan Carlos y ahora confirmada mediante la construcción dinámica. En su caso, dicha afirmación se sitúa en un primer nivel de motivación para la prueba, el de la veracidad de ese hecho geométrico (Mariotti, et al., 1997). Ellos aún tienen dificultad para reconocer algún objeto geométrico asociado con el desplazamiento del punto R, que sea distinto al que por construcción éste pertenece, como se puede confirmar en la siguiente parte del protocolo registrado:

Rodrigo: *Se está pidiendo el punto medio de PQ... por decir... si yo muevo el punto M, PQ se va a... bueno el segmento PQ se deforma pero el punto R siempre va a ser constante.*

Gabriela: *Sí*.

Conductor: *Y después, ¿Qué más?*

Rodrigo: *Sí, este segmento* [PQ] *termina de aquí a aquí*...*pero si se prolongara se interseca con AB*.

Conductor: *Es decir, ese segmento pertenece a una recta, esa recta… ¿Es paralela a AB o no es paralela a AB?*

Rodrigo: *Dependiendo... si ponemos a AB en el centro de... digo el punto M en el centro del AB, pues obvio que va a ser paralelo, pero si yo le...*

Conductor: *Pero sigues pensando en el segmento PQ, ¿no?*

Rodrigo: *Si, bueno aquí va a ser un segmento, el segmento PQ, pero supongamos que el segmento PQ se prolonga a más de donde están los puntos, del punto P...*

Conductor: *Sí, porque ese segmento todo el tiempo está cambiando ¿no?*

Rodrigo: *Para la izquierda o para la derecha, donde se mueva*...

Conductor: *Además de todo eso, ¿Qué pasa con R?...*

Rodrigo: *Que es el punto medio de PQ.*

Conductor: *Pero... ¿Qué lugar geométrico describe R?, ¿Cómo se está moviendo R?*

Aún cuando Rodrigo intuye cierto “comportamiento” de R, no puede diferenciar, todavía, entre el lugar geométrico que ese punto describe y el segmento PQ del que, estructuralmente, forma parte. Rodrigo (como Trinidad) ha identificado un caso particular en el que el segmento PQ es paralelo al segmento AB. Rodrigo y Gabriela están, todavía, en una fase de exploración de la construcción dinámica en la que el segmento PQ domina su atención. Esta parte del protocolo, también muestra cierta desconexión entre lo que la pareja de estudiantes está argumentando y lo que el conductor de la sesión quiere hacer notar.

Hacia el final de esta fase de exploración de la figura Cabri, Trinidad y Juan Carlos habían avanzado en la comprensión más amplia de la dinámica de la construcción geométrica. Ellos se dan cuenta de lo que sucede cuando M coincide con alguno de los extremos del segmento AB:

Conductor: *Vayan tratando de adelantar cómo podemos explicar ese comportamiento, ¿Porqué el punto R hace esa trayectoria, a qué se debe?*

Juan Carlos: *A que siempre es el punto medio de P y Q, y P y Q siempre están alineados, entonces como está sobre un segmento ya establecido, o sea Q llega a un tope y de ahí ya no hace que crezca más... y entonces el punto entre P y Q es éste, aquí está R que es el* *punto de la…* [Refiriéndose a su construcción dinámica en la pantalla de la computadora.]

Conductor: *Es el punto medio de ese lado de ese triángulo más grande...*

Juan Carlos ha observado que los vértices P y Q llegan a coincidir con los extremos del segmento AB, como efecto del desplazamiento máximo de M. Esta visualización más amplia de la dinámica de su construcción les ayudará a lograr una caracterización precisa del objeto geométrico que el punto R describe, como se verá en la siguiente parte.

3. Situación de validación

Esta fue la última fase del trabajo en la tarea propuesta. La intención (desde la perspectiva del conductor) era la de concluir la tarea elaborando una argumentación teórica con la cual validar la afirmación ya constatada. El conductor pidió a los estudiantes reunirse en un sólo grupo para concluir la tarea propuesta:

Conductor: *Vamos a tratar de terminar esta parte. Lo que describe R ¿Qué es?*

Trinidad: *Una recta.*

Conductor: *Una recta que es, ¿Cómo?*

Juan Carlos: *Paralela*.

Conductor: *Paralela ¿A qué?*

Juan Carlos: *A AB*.

Conductor: *Eso es lo que estamos observando. Ahora, ¿Por qué sucede eso?, ¿Cuál es la razón, hay alguna transformación que ayude a explicar que es lo que está pasando?... Se trataría de dar algunos argumentos para explicar que es lo que está pasando*.

Trinidad: *Porque el punto R está en el centro del segmento PQ, y al trasladarse de un lado hacia otro se traslada sobre... No, es que como los triángulos están formados con sus bases sobre el segmento AB, los vértices de arriba siempre se van a trasladar en* *ese segmento, ya sea aunque uno sea más pequeño y otro sea más grande siempre van a trasladarse en ese segmento.*

Conductor: *¿En qué, cómo está eso, a ver?*

Trinidad: *En el segmento AB, era lo que estábamos haciendo...*

Conductor: *Mientras uno... al momento que mueves M, uno va creciendo y el otro va decreciendo.*

Trinidad: *Sí, pero como el punto M, que es el que está haciendo que crezca o decrezca, siempre se traslada sobre el segmento A, esto quiere decir que el punto P y el punto Q siempre se van a trasladar igual, o sea, digo, tal vez cambie la inclinación y todo eso, pero siempre se van a trasladar sobre AB, entonces el punto R debe hacer esa paralela, puesto que como los otros dos puntos pueden cambiar la inclinación de esa recta cuando crece o decrece algún triángulo... bueno, hasta ahí iba bien.*

Observamos, nuevamente, que Trinidad recurre a la imagen que previamente ha interiorizado, en la que existe cierto invariante en la relación entre los vértices P y Q (*"esto quiere decir que el punto P y el punto Q siempre se van a trasladar igual…"*), para justificar el lugar geométrico de R. Por su parte, Juan Carlos ha identificado otro caso particular, dentro del "continuo" que la construcción dinámica genera, el que corresponde al desplazamiento de M hasta coincidir con uno de los extremos del segmento AB; como se muestra en la siguiente figura.

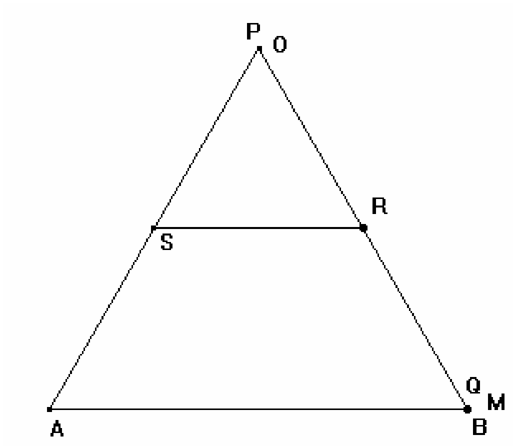


Figura 6

Juan Carlos también muestra, mediante su figura Cabri, el objeto geométrico que describe R, y que forma parte de un triángulo equilátero más (RPS, en la figura 6). Esta configuración particular parece ser decisiva para lograr una caracterización precisa de tal objeto, pero sobretodo en la visualización de la transformación geométrica que lo justifica, como se puede observar en la parte siguiente.

- La integración de casos y la visualización de la transformación geométrica

El conductor de la sesión pide a los estudiantes que traten de identificar una transformación geométrica que permita justificar lo que ya han confirmado mediante su construcción dinámica: *¿Qué transformación geométrica podría ayudar para resolver ese problema?, ya sabemos que lo que describe el punto R es un segmento paralelo a AB. ¿Podrían decir algo más del segmento que describe R?, por ejemplo sabemos que es más chico, pero ¿Qué tanto más chico?* La atención se centra en lo que Juan Carlos está dibujando sobre la figura proporcionada junto con el enunciado del problema:

> Conductor: *Juan Carlos, explícanos más o menos qué estás haciendo... varios casos ahí sobre el dibujo*.
>
> Juan Carlos: *Sí, lo que hice fue buscar otra vez la paralela, la que describe R y, bueno, ya con el segmento R, buscar lo que usted nos preguntaba la...*
>
> *Conductor: ¿Qué es lo que obtienes de ese dibujo?*
>
> Juan Carlos: *Pues que, aparentemente, el segmento R es la mitad del segmento AB*.
>
> Conductor: *¿Qué es lo que estás haciendo en tu construcción?, estás completando*...
>
> Gabriela: *Todo*.
>
> Conductor: *Un triángulo, un triángulo más grande arriba*.
>
> Juan Carlos: *Sí, bueno, suponiendo que alguno de los dos triángulos lo lleváramos hasta la orilla*...
>
> Conductor: *Que M llegue hasta A o hasta B, se forma ese triángulo grande.*

Juan Carlos: Y sería lo máximo que...

Conductor: *P queda hasta arriba, por ejemplo, y Q queda hasta abajo, en B... ¿Y qué pasa con R, en dónde está R?*

Juan Carlos: *R estaría aquí en la orilla.*

Conductor: *Que sería ¿qué?, el punto ¿qué?*

Juan Carlos: *El punto medio entre B y P*.

Conductor: *¿Qué más?, eso ya está dando más cosas, parece ser que es un segmento que es paralelo y que además es la mitad del segmento AB. Si pensáramos en alguna transformación geométrica cuál ayudaría, cuál estaría relacionada con eso.*

Juan Carlos: *¿La homotecia? No, no es cierto*.

Conductor: *¿Por qué no?, si fuese una homotecia quienes estarían jugando el papel de...*

Juan Carlos: *Bueno, sí puede ser una homotecia, por ejemplo que esta figura, la que queda aquí arriba, el triángulo pequeño*, *este triángulo podría ser el original y su homotecia o su imagen podría ser el triángulo más grande.*

Conductor: *¿Cuál sería el triángulo más grande?*

Juan Carlos: *Todo, y tomando como el centro de la homotecia este vértice de aquí* [el vértice superior en su dibujo], *entonces pues sería lo doble, o sea con una razón dos.*

La argumentación de Juan Carlos parte de la constatación empírica, él mide la longitud del segmento que ha construido (figura 7) y la compara con la longitud de AB. El conductor sugiere a los estudiantes que traten de relacionar ese resultado con alguna de las transformaciones estudiadas. La relación de 1:2 entre los segmentos que Juan Carlos ha identificado le permite proponer que esa transformación podría ser la homotecia. Después de esto, se produce un diálogo con el conductor que lleva a Juan Carlos a apropiarse de la situación en términos de esa transformación, de manera que él puede relacionar adecuadamente los objetos presentes en la construcción dinámica con los elementos característicos de aquella:

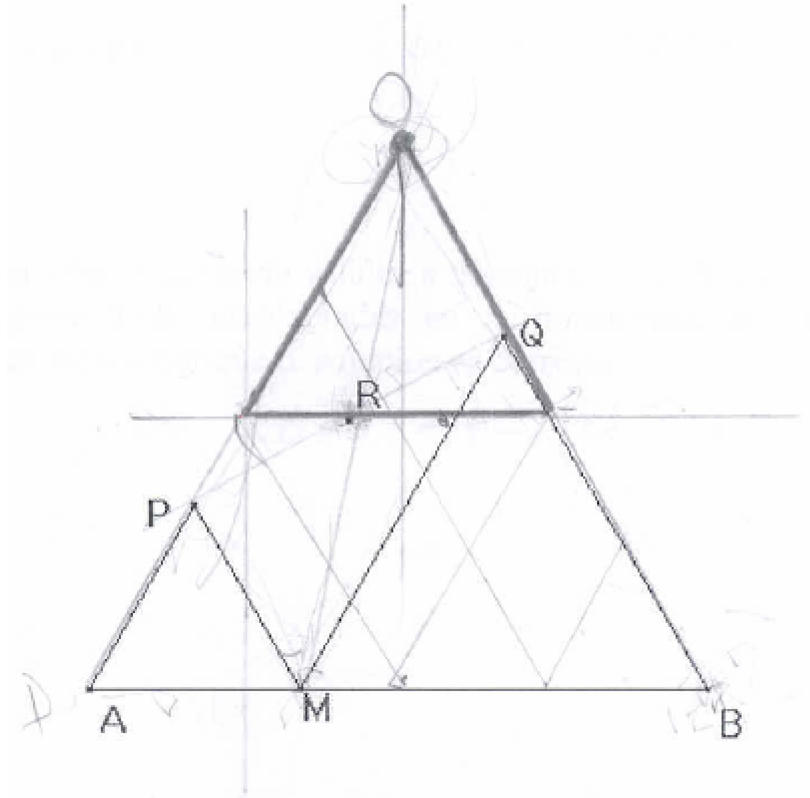


Figura 7

Conductor: *Si es una homotecia, ¿Qué debe pasar entre R y M?, ¿Quién sería O y quién sería A' y B'?*

Juan Carlos: *Bueno, el homotético de R sería M, el homotético de Q sería B, el homotético de P sería... no, bueno suponiendo que Q esté acá, y P esté acá, entonces el homotético de Q sería*... [Juan Carlos está tratando de identificar las imágenes de los vértices P y Q]

Conductor: *Si ése es O* [señalando el vértice superior], *¿dónde estarían los homotéticos de A y de B, las imágenes?*

Juan Carlos: *De B sería Q... o este vértice que está aquí* [señalando el extremo derecho del lugar geométrico de R].

En este momento Juan Carlos asume que no es necesario preguntarse por los homotéticos de P y de Q, sino que la atención debe centrarse en la relación entre el lugar geométrico de R y el segmento AB.

Conductor: *¿Por qué sería ese vértice?*

Juan Carlos: *Porque la homotecia está construida en base a este triángulo* [señalando el triángulo pequeño formado en el vértice O], *está a una razón de dos, o también podría ser al revés, por ejemplo la homotecia en base al más grande y la homotecia de .5*

Conductor: *Entonces ¿quiénes son correspondientes, por ejemplo de A y de B…?*

Juan Carlos: *Estos dos de aquí* [señalando los extremos del lugar geométrico de R], *y el punto O es imagen de sí mismo*.

Juan Carlos ha podido visualizar el comportamiento general de la construcción dinámica. Él lleva a cabo una integración entre los casos que la exploración de la figura Cabri ha evidenciado y sus propias construcciones utilizando regla y lápiz. Esto le permite tener una visión completa de la dinámica de la figura y asociar eficazmente los objetos geométricos de ésta con los elementos característicos de una homotecia.

- El esclarecimiento de la relación geométrica necesaria para elaborar una justificación teórica

La actividad continúa teniendo como referentes principales para la discusión los casos identificados y sus representaciones, además de la idea de la homotecia como la transformación que permite justificar la conjetura en relación al lugar geométrico que describe el punto R. Los estudiantes tienen en la mesa las construcciones que ha hecho Juan Carlos en su hoja de trabajo (figura 7). El conductor interviene con la intención de que se establezca explícitamente una propiedad geométrica que justifique la relación de 1:2 entre los segmentos OR y OM:

Conductor: *¿Qué estabas explicando Juan Carlos?*

Juan Carlos: *En caso de que sea homotecia, se estaría construyendo la homotecia de este triángulo, la homotecia del triángulo grande* [OAB en la figura 7] *en base a este punto que sería el punto O, con una razón de dos, o también se podría construir al revés, que en base al triángulo grande construyas la homotecia del triángulo pequeño a una razón de .5, entonces los puntos correspondientes, por ejemplo, en este caso sería... este vértice sería correspondiente a B y el de acá sería correspondiente al vértice A* [refiriéndose a los extremos del segmento que corresponde al lugar geométrico de R] *y el R sería correspondiente a M, y O sería imagen de sí mismo.*

Conductor: *¿Si ven esa homotecia ahí?*

Rodrigo: *Sí.*

Conductor: *¿Habría alguna manera de asegurarnos de que, por ejemplo, R siempre va a ser el punto medio entre O y M?*

Juan Carlos: *Pues porque siempre, o sea como son puntos este...*

Conductor: *O sea, justificar la homotecia de razón dos, a partir de alguna construcción, por ejemplo la figura PMQO* [figura 7]*¿qué es?*

Juan Carlos: *Un... paralelogramo*.

Conductor: *¿Si, están de acuerdo en que PMQO es un paralelogramo...?, porque PM siempre es paralela a BQ y QO es parte de BQ, y lo mismo pasa del otro lado, PO es paralela a MQ, entonces son dos pares de paralelas que se cortan. ¿Qué pasa en ese paralelogramo, entre sus diagonales?, ¿Cuáles son sus diagonales?*

Juan Carlos: *¿Cuáles son las diagonales?* [Juan Carlos y Gabriela están trazando con regla y lápiz la diagonal OM del paralelogramo en cuestión.]

Conductor: *Ésa es una* (OM) *y la otra*...

Rodrigo: *Q con P*.

Gabriela: *Las diagonales se intersecan aquí*. [Señalando con el lápiz la intersección de las diagonales OM y PQ, la cual coincide con el punto R.]

Conductor: *Una propiedad de las diagonales de un paralelogramo ¿cuál es?*

Trinidad: *Se intersecan en un punto… central.*

Conductor: *Punto medio, ahí podemos ver que R siempre va a ser el punto medio entre O y M, entonces sí hay una homotecia de 1 a 2, o de 2 a 1, ¿Si lo ven?*

Trinidad y Juan Carlos: *Sí.*

Conductor: *Bueno entonces traten de terminar ya esta parte*...

Gabriela: *Entonces sí es una homotecia.*

Conductor: *Es decir, con todo lo que ya vimos, traten de elaborar una argumentación que justifique esto*.

Juan Carlos puede describir con claridad la relación de homotecia entre los triángulos, esta relación subyacía en la figura hasta el momento en el que él mismo lleva a cabo la integración de casos y de representaciones, ya referida en el apartado precedente. La intervención del conductor tiene la finalidad de hacer visible un argumento geométrico que permite establecer la condición necesaria y suficiente para justificar esa relación.

No obstante, parecía existir aún, desde la perspectiva de los estudiantes, cierta confusión en cuanto a lo que se debía justificar, o a lo que el conductor requería que fuese justificado. Por una parte se buscaba justificar el lugar geométrico del punto R, sin embargo en el centro de la discusión se ubicó la homotecia que subyace en la construcción dinámica. La relación entre ambos aspectos no parece haber quedado del todo establecida, como lo muestran los señalamientos de Trinidad ante las afirmaciones de Rodrigo al reformular las explicaciones de Juan Carlos.

Rodrigo: *Y aquí Juan Carlos toma como base el segmento donde está el punto R, y ya no sería este de acá* [el segmento AB], *entonces ya* *nada más encuentra los vértices correspondientes y es lo que decía el maestro que se forma un paralelogramo, y las diagonales, P con Q y M con O intersecan al punto R, este punto R es... ¿cómo se llama?*

Gabriela: *El punto de intersección*.

Rodrigo: *Ah, el punto medio de éste... del paralelogramo.*

Trinidad: *Si, ¿Y eso con qué ayuda a explicar por qué el punto R hace esa trayectoria?*

Juan Carlos: *Porque una de las propiedades del paralelogramo es que siempre tienen... que los lados opuestos son congruentes, al igual que los ángulos.*

Trinidad: ¿Y eso qué?

Juan Carlos: *Entonces cuando lo abres, pues los lados opuestos siguen siendo congruentes al igual que los ángulos* [refiriéndose al efecto provocado en PMQO por el desplazamiento de M].

El reclamo de Trinidad indica cierta desconexión entre el hecho de que los puntos M y R sean homotéticos y el hecho de que R describa el lugar geométrico ya establecido. Esto permite centrar nuevamente la discusión en el objetivo inicial:

Conductor: *Es muy buena pregunta la que hace Trinidad, ¿por qué todo eso que se está diciendo justifica que R describe esa trayectoria?*

Juan Carlos: *A porque una de las propiedades de la homotecia es que los puntos correspondientes siempre están alineados con el centro de homotecia, y el centro de homotecia es O, entonces a donde se muevan siempre van a estar alineados y como te das cuenta pues ORM es la diagonal, es una de las diagonales del paralelogramo*.

Trinidad: *Sí*...

Conductor: *Pero R siempre está a la mitad de camino entre O y M*.

Trinidad: *Y siempre va a ser el punto medio del paralelogramo*.

Conductor: *Y como M se está moviendo sobre una recta*...

Rodrigo: *Éste* [el vértice O] *sería el... así como lo sacamos sobre su homotético del punto por decir este sería el punto*...

Juan Carlos: *El centro de la homotecia*.

Rodrigo: *El centro de la homotecia, éste* [R] *sería el punto original y éste* [M] *sería su homotético y de aquí a aquí* [de O a R] *y de aquí a aquí* [de R a M] *es la misma distancia*.

Trinidad: *A creo que está más fácil así*.

Juan Carlos hace explícita una de las propiedades de la homotecia, mientras que Rodrigo señala la congruencia entre los segmento OR y RM (figura 7), ambos están involucrados en el proceso de elaborar una justificación que convenza a su compañera. Para ello recurren a argumentos teóricos válidos en la situación bajo estudio.

El tipo de razonamientos que caracterizan esta parte final de la actividad, marca, según la propuesta de Balacheff (1987), la transición de las pruebas pragmáticas a las intelectuales. Específicamente, observamos, en estas intervenciones de los estudiantes, el recurso a su conocimiento teórico y a su conocimiento empírico; por un lado, ellos conocen los invariantes de la homotecia y sus elementos característicos, por otro lado, ellos han acumulado una serie de experiencias que pueden relacionar adecuadamente con esos conocimientos. Otros indicios de que dicha transición estaba en curso son los siguientes: a) el lenguaje utilizado recurre, en momentos, a los términos formales; b) la figura que presenta Juan Carlos ya no es en sí misma la justificación de lo que se afirma, sino que constituye un medio sobre el que se proponen argumentos para establecer la justificación; c) los argumentos se basan en el análisis de las propiedades de los objetos en juego. Es importante señalar que la intervención del conductor permite integrar, finalmente, esos conocimientos y experiencias, mediante un argumento geométrico pertinente (el referido al paralelogramo que se forma en la figura).

Para finalizar la actividad, el conductor pidió a los estudiantes que pusieran por escrito las afirmaciones que se habían presentado durante esta fase final. Así los estudiantes se dieron a la tarea de recuperar lo que a su juicio fueron los hechos geométricos relevantes y explicitados en la discusión y que en conjunto explicaban satisfactoriamente el resultado obtenido, de tal forma que procedieron a redactar en forma de listado esos hechos geométricos. Uno de estos listados es el siguiente:

- Si un triángulo aumenta, el otro disminuye
- Los puntos O P Q M forman un paralelogramo, tendiendo como punto medio es R
- La trayectoria de R es una paralela en relación a la trayectoria de M
- Los triángulos, siempre son equiláteros
- Existe homotecia entre el punto R y M con un factor 2, teniendo como centro de la misma el punto O

- Cierre

El desempeño del grupo de estudiantes, en esta tarea de resolución de un problema, indica que ellos fueron capaces de prever cierta fenomenología inherente a una figura geométrica, aún antes de manipular o de explorar de manera directa una construcción dinámica relacionada. Nos parece que sus experiencias previas con Cabri y con las máquinas articuladas, les proporcionan recursos para generar representaciones internas de carácter dinámico, es decir, representaciones que pueden ser transformadas con el fin de predecir algún resultado. En el caso de Juan Carlos, esta forma de concebir las figuras geométricas lo impulsa a transformar la situación inicial para proponer una conjetura y comenzar un proceso de validación. Tal proceso está marcado por una integración de las representaciones o de los casos particulares identificados por medio de la figura Cabri, una vez obtenida. Esto enriquece su conceptualización dinámica de la figura misma y le permite distinguir propiedades y relaciones geométricas útiles para avanzar en una justificación teórica de la conjetura señalada. Así, entrelazada con este proceso, está una transición de las pruebas pragmáticas a la pruebas intelectuales (Balacheff, 1987). Como ya se señaló, la figura Cabri permite reconocer casos especiales, dentro del continuo que representa; por una parte, esos casos especiales parecen alentar formas de razonamiento como la *experiencia crucial* o el *ejemplo genérico*; sin embargo, es esta integración de representaciones lo que permite generar razonamientos que corresponden con la *experiencia mental* en el nivel de prueba intelectual. Si bien, no es posible afirmar que el texto producido, al final de la actividad, constituye una demostración matemática de la conjetura elaborada, si podemos afirmar que los argumentos presentados, o los conocimientos puestos en juego, el carácter general que estos tienen, así como el lenguaje utilizado, corresponden con una prueba intelectual.

Aunque tampoco es posible afirmar que los cuatro estudiantes están involucrados, en un mismo nivel, en el proceso de validación puesto en marcha, nos parece que la interacción entre ellos y con el conductor, promueve su avance individual, de tal manera que, en general, las discusiones y los argumentos que se generan les son significativos. En esto, probablemente, juega un papel fundamental el hecho de compartir experiencias de aprendizaje y el de poder referirse a los objetos geométricos como objetos experiencialmente reales. En otras palabras, la actividad colectiva, la conversión de acciones en discurso, el control voluntario de las representaciones (tanto externas como internas) y el predominio (sobretodo en la fase de validación) de las imágenes subjetivas sobre las representaciones externas, son indicadores puntuales de un proceso de mediación semiótica ejercido por medio de la actividad en el laboratorio, vista de manera integral. Tal mediación tiene, en este caso, la característica de promover formas de aprendizaje de matemáticas en las que es posible involucrar a los estudiantes en la justificación teórica de los hechos que ellos previamente han confirmado.

También fue observable cierto obstáculo inherente a la situación planteada en el enunciado del problema. Este obstáculo consiste en la dificultad de diferenciar entre el objeto que el punto R genera al desplazarse, y el segmento al cual ese punto biseca. En principio, la construcción dinámica (la figura Cabri) no resuelve esta dificultad, incluso, podría aumentarla. El hecho de que R esté asociado, simultáneamente, a dos segmentos distintos crea un obstáculo para lograr esta diferenciación, evidenciado en las dificultades en la comunicación surgidas en los diálogos entre Rodrigo, Gabriela y el conductor. La forma en que ese obstáculo es superado es distinta en cada caso. Para Trinidad fue revelador identificar la situación en la que ambos objetos se confunden en uno sólo, esta configuración la llevó a visualizar y a proponer un argumento que si bien no progreso en la discusión, si le permitió convencerse de la conjetura propuesta y comenzar a distinguir el lugar geométrico del punto R del segmento al que biseca. Rodrigo también había reconocido esa configuración, inclusive llegó a proponer una relación dimensional entre el que sería el lugar geométrico de R y el segmento AB, sin embargo, fue hasta el momento en el que Juan Carlos argumentó a favor de la homotecia para explicar las relaciones geométricas surgidas de sus propias representaciones, que Rodrigo hizo referencias explícitas al lugar geométrico de R como un objeto definido e independiente del segmento PQ. Esto sugiere que la diferenciación manifiesta entre el lugar geométrico del punto R y el segmento al que éste biseca se produjo, en el caso de Rodrigo, al visualizar la relación homotética entre los objetos de la figura.

5. Conclusiones

Las conclusiones del documento de tesis se presentan en cuatro apartados. En el primero se hacen explícitas las que consideramos son diferencias sustanciales entre nuestra investigación y las investigaciones vinculadas a ésta. En el segundo apartado se presentan respuestas a las preguntas de investigación. En el tercer apartado se presenta una argumentación referida a lo que se ha planteado como la tesis misma del proyecto. Por último, se presenta una breve discusión de temas o preguntas de investigación que pudieran plantearse a partir de los resultados obtenidos.

5.1. Diferencias entre esta investigación y otras investigaciones relacionadas

Aunque esta investigación tiene vínculos estrechos con otras investigaciones, principalmente con las reseñadas en el apartado 2.1.3, también presenta diferencias. Señalamos, a continuación las que consideramos son sustanciales.

1. La utilización complementaria de Cabri y las máquinas articuladas ya ha sido objeto de investigación. Hoyos (2003-a) plantea esto en el sentido de "…la coordinación del uso de artefactos mecánicos y virtuales hacia la promoción de experiencias matemáticas significativas." (pp. 145-146). Por su parte Vincent et al. (2002) explotan este aspecto con la intención de promover procesos de prueba deductiva. Si bien estos aspectos también forman parte de este proyecto de tesis, no se había enfocado esta complementariedad entre ambos tipos de artefactos para promover el desarrollo de un campo de experiencia de las transformaciones geométricas. Se considera, entonces, que éste es un rasgo particular de esta tesis.

2. El enfoque con respecto al estudio de las formas de racionalidad matemática que emergen de la actividad de los estudiantes, ha tenido, en este proyecto de tesis, una orientación hacia la construcción de una *organización local*

del campo (Freudenthal, 1973), como una red de proposiciones inherentes al campo de las transformaciones geométricas en el plano. Esto ha tenido la intención de involucrar a los estudiantes en situaciones de validación referidas a la composición de transformaciones.

3. Diferentes autores (Verillon y Rabardel, 1995; Kirshner y Withson, 1997) han señalado la necesidad de proponer modelos explicativos del proceso de internalización, sobre todo en el nivel individual o microscópico del proceso. Wertch (1995) propone que es el dominio de las formas semióticas externas lo que esencialmente constituye la internalización. Mariotti (2002) señala que la internalización es un proceso complejo, en el cual tiene un papel importante la coordinación, que el sujeto puede lograr, entre diferentes esquemas de utilización (la génesis instrumental) respecto a una herramienta. El esquema de desarrollo de los conceptos matemáticos que propone Sfard (1993), y que adoptamos en este estudio, representa una alternativa que puede aportar a la discusión, sobre todo si se trata de explicar el proceso de internalización en el nivel intrapsicológico.

5.2. Respuestas a las preguntas de investigación

- ¿Qué evidencias es posible encontrar, en el desempeño de los estudiantes, de relación entre una racionalidad matemática emergente y la elaboración de instrumentos de mediación semiótica?

En un primer nivel de respuesta podemos señalar que el desarrollo de una concepción de las figuras geométricas como objetos dinámicos, mediante la apropiación de esquemas de utilización asociados a los artefactos empleados, permite a los estudiantes prever una fenomenología inherente a una construcción dinámica aún por realizar y, de esta manera, buscar y proponer argumentos sustanciales para respaldar lo que esa construcción generará. Esta concepción dinámica, también promueve la identificación plena de relaciones entre los elementos geométricos involucrados, estas relaciones, una vez constatadas, llegan a constituir, desde la perspectiva de los estudiantes, evidencias sólidas con las cuales argumentar a favor de una conjetura. Así lo muestra el desempeño de los estudiantes ante tareas de resolución de problemas.

Uno de los casos en que esto se constató, es el caso en el que David y Sergio resuelven un problema de construcción geométrica (apartado 4.2.1). En el problema se pide encontrar un segmento cuyos extremos estén, uno, sobre una recta, y el otro, sobre una circunferencia y cuyo punto medio sea un punto entre ambas. En el proceso de resolución, David es capaz de presentar, valiéndose del pantógrafo de simetría central, una configuración en la que el problema está resuelto; mostrando, de esta manera, que esa transformación resuelve el problema. La apropiación que logra de la situación queda evidenciada por esta forma de visualizar la configuración requerida.

Otro caso en el que se observa una utilización productiva de una concepción dinámica de los objetos geométricos es el problema en el que se pide encontrar el lugar geométrico del punto medio entre vértices de dos triángulos equiláteros, funcionalmente relacionados (apartados 4.2.2 y 4.3.3). En la resolución de este problema se observó, en dos distintas ocasiones (tanto en el caso de Maricarmen como en el de Trinidad), el surgimiento de un argumento geométrico fuertemente apoyado en la exploración dinámica que la figura Cabri permite realizar. El argumento consiste en hacer notar un invariante de la figura, mismo que coincide con el lugar geométrico en cuestión. Tal argumento se constituyó en un apoyo visual y racional para avanzar en la solución del problema. También en la resolución de este problema, se observó como Juan Carlos se dio a la tarea de generar nuevas configuraciones a partir de la presentada originalmente como parte del enunciado del problema. Una vez asumida la factibilidad de obtener la figura dinámica requerida, Juan Carlos “inmediatamente” fue capaz de producir representaciones coherentes con la dinámica misma de la figura y, de esta manera, proponer una conjetura verosímil.

Estos casos permiten proponer que el escenario de actividad y la actividad misma, como un todo, son adecuados para promover en los estudiantes la apropiación de esquemas de utilización productivos, referidos a algunas de las características estructurales que las herramientas poseen. Tales esquemas se originan en la indagación de lo que las herramientas producen o de la forma en que funcionan, para dar paso a un uso premeditado (y en ocasiones complementario) de las mismas. Así sucede con la función de arrastre en Cabri, o con algunos de los comandos que proporciona, como la *Activación de la traza* o la *Redefinición de un objeto*, o con la "tendencia" a relacionar los elementos característicos de las transformaciones geométricas (tanto de posición como de relación) con los elementos materiales correspondientes en las máquinas articuladas.

En un segundo nivel de respuesta, podemos señalar que las fases de actividad cognitiva (Sfard, 1991), asociadas con la generación de concepciones matemáticas estructurales, son estimuladas cuando la actividad ha promovido la internalización de instrumentos de mediación semiótica. El episodio en el que Gabriela y Rodrigo están trabajando con la máquina de composición de simetrías (apartado 4.3.2) permite identificar estas fases, y proponer, de esta manera, un posible mecanismo de internalización:

Al explorar la composición de simetrías centrales utilizando Cabri, Gabriela y Rodrigo produjeron una conjetura correcta respecto a la transformación equivalente: Al efectuar la composición de dos simetrías centrales, el objeto final puede ser obtenido a partir del objeto inicial… *"con un vector que se halle dirigido hacia abajo, paralelo con los dos puntos con los cuales se realizó la simetría central, y el doble de la distancia entre esos puntos."*

Esa actividad permitió a esta pareja de estudiantes reconocer dos procedimientos geométricos que generan un mismo resultado (la composición de simetrías y la traslación equivalente), y les permitió también intuir las relaciones básicas entre los elementos característicos de cada una de las transformaciones involucradas.

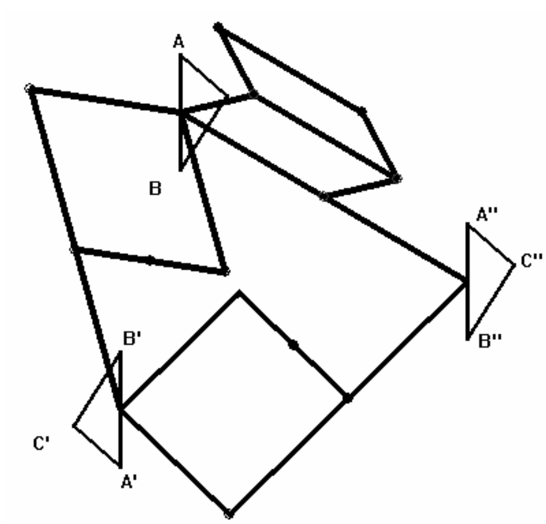
Este proceso corresponde con la fase de interiorización que propone Sfard (1991): “en el escenario de interiorización un aprendiz obtiene conocimiento de los procesos que eventualmente darán origen a un nuevo concepto” (p. 18). En el caso de esta pareja de estudiantes, el concepto de composición evoca en ellos un proceso operativo, posiblemente limitado a la utilización de las herramientas que el software proporciona.

Posteriormente, la exploración del pantógrafo de composición de simetrías centrales da pie a una situación de validación generada y asumida por los propios estudiantes. Mientras Gabriela sostiene que el pantógrafo (como unidad) realiza una simetría axial, Rodrigo expresa su desacuerdo:

Rodrigo: *Pero no se están reflejando.*

Gabriela: *Claro que sí…*

Rodrigo: *Pero supón que éste* (el triángulo etiquetado como A”B”C”) *estuviera más arriba y fuera una hoja* (refiriéndose a la tabla sobre la que está montada la articulación) *y lo doblaras, esta línea* (el lado BC) *quedaría acá y este punto* (A”) *quedaría acá.*



Rodrigo es capaz de prever el resultado de una simetría axial y supone su realización; intentando que su compañera también lo visualice. Él busca mostrar la contradicción entre lo que Gabriela sostiene y lo que el pantógrafo produce. Esto induce a Gabriela a flexibilizar su postura y la prepara para adherirse a lo que su compañero propone más adelante:

Rodrigo: *Es una traslación.*

Gabriela: *No… ¡ah, pudiera ser!*

Rodrigo: *Porque fue lo que hicimos esa vez que hacíamos el vector más grande y lo iba poniendo más… en el mismo orden.* (Rodrigo se refiere a la exploración de esta composición realizada anteriormente con el software)

Gabriela: *Pero ¿cuál es el vector?... Esta si es una simetría central.* (Refiriéndose a una de las dos simetrías mostradas en el pantógrafo)

A partir de este momento, ambos estudiantes inician un proceso en el que serán capaces de reconocer, en la estructura del pantógrafo, los centros de las simetrías involucradas y de asumir la necesidad de identificar el vector de la traslación equivalente. La concepción de los estudiantes de esta composición, ya no se limita a un procedimiento definido, sino que se enriquece al hacer explícitos los elementos característicos de cada transformación y de la relación que guardan entre sí, sobre la base material del pantógrafo. Aquí, la fase de condensación parece estar presente, dado que los estudiantes pueden referirse a la composición como “el todo en relación con sus partes” (Sfard, 1991, p. 19).

Al cabo de su exploración con la máquina articulada, Rodrigo y Gabriela optan por trabajar con el software con la intención de verificar su afirmación. Ahora Gabriela está manipulando la composición de simetrías que ha construido, produciéndose el siguiente diálogo:

Gabriela: *Ya ves, ya quedó… Pero, ¿cuánto tiene que medir el vector?*

Rodrigo: *El doble de ese.*

Gabriela: *¡Sí, es el doble de la distancia de los puntos! Son dos simetrías centrales.*

Rodrigo: *Sí, equivalentes a una traslación.*

Su construcción dinámica se constituye en una representación adicional, funcionalmente enlazada a la máquina articulada, ambas representaciones “materializan” una concepción de la composición de simetrías como una traslación. La complementariedad entre las herramientas utilizadas y su carácter de representaciones dinámicas y diferenciadas de una noción geométrica particular, parece alentar en esta pareja de estudiantes una integración de las representaciones externas y la consolidación de una noción matemática específica. Podemos percibir en esta fase de actividad el proceso de reificación que Sfard caracteriza esencialmente por la concepción de una noción como “un objeto totalmente corpóreo… en el que varias representaciones del concepto llegan a estar semánticamente unificadas por este constructo abstracto puramente imaginario” (p. 19-20).

De esta forma, las etapas de interiorización, condensación y reificación de concepciones matemáticas, permiten una primera aproximación a lo que podría ser un mecanismo específico de internalización. La transición de una concepción operacional a una concepción estructural de una composición de transformaciones, parece dar cuenta del proceso de internalización de instrumentos de mediación semiótica. En otras palabras, los objetos geométricos se constituyen en abstracciones concretas como estructuras cognitivas formadas por representaciones, significados asociados y esquemas de utilización productivos. La evidencia más clara de esto radica en el dominio de las formas semióticas externas; la capacidad desarrollada por los estudiantes para pasar de las representaciones y de las construcciones generadas en Cabri, al empleo de las máquinas articuladas y viceversa (tendiendo como motivos identificar elementos característicos, afinar proposiciones, constatar relaciones o descubrir invariantes), significa el desarrollo de formas productivas de interacción con las herramientas; pero sobre todo, representa la apropiación de herramientas del pensamiento.

Finalmente, podemos señalar que el involucramiento productivo en situaciones de validación y la integración semántica de representaciones, promueven el desarrollo de una racionalidad teórica, la cual se apoya en hacer explícitas relaciones geométricas que subyacen no sólo en los artefactos mismos sino en las representaciones que estos proporcionan y en las que los estudiantes reconstruyen e interiorizan al utilizar, sistemáticamente, tales artefactos. Esto permite que los estudiantes se separen del nivel fenomenológico de justificación, para avanzar en un nivel teórico o racional de validación. Al mismo tiempo, esta relación entre racionalidad matemática emergente y mediación semiótica, promueve la significación matemática atribuible a los artefactos mismos y a las representaciones que mediante estos se obtienen.

- *¿Cómo se construye esa relación en la situación particular de la interacción de los estudiantes con dos tipos de herramientas de mediación que se asumen, desde el punto de vista del investigador, como complementarias?*

En los episodios analizados fue posible constatar que los estudiantes optaban por emplear los artefactos disponibles en términos de la eficacia que ellos mismos les otorgaban para las tareas específicas en las que estaban involucrados. Un modo de trabajo que llegó a consolidarse a lo largo del estudio empírico, consistió en la utilización alternada de las herramientas o los artefactos de mediación. Para los estudiantes llegó a constituirse en un proceso relativamente rutinario, como parte de sus esquemas de utilización (Verillon y Rabardel, 1995, p. 86), asociar convenientemente los elementos visibles en las herramientas con los elementos característicos de las transformaciones geométricas. También la confirmación o una exploración más detallada de algún hecho geométrico descubierto mediante el empleo de uno de los artefactos, trasladando la actividad hacia el otro de los artefactos disponibles, fue una forma recurrente de utilización complementaria de las herramientas desarrollada por los estudiantes. De esta manera, la utilización coordinada de las herramientas promovió, consistentemente, el descubrimiento y la integración de propiedades y relaciones geométricas para desarrollar concepciones y significados compartidos y compatibles acerca de las transformaciones geométricas y también para elaborar argumentos pertinentes en la justificación matemática de alguna afirmación. En estos procesos tuvieron un papel esencial la organización de las actividades, realizadas por los estudiantes, mediante los guiones o las hojas de trabajo, mismas que ellos tuvieron en todo momento a su disposición, así como las intervenciones del conductor de las sesiones. Si bien no fue éste el enfoque central de la investigación, si podemos señalar que ambos aspectos funcionaron también como mediadores dentro del proceso, puesto que actuaron esencialmente como directrices de la actividad de indagación que se esperaba de los estudiantes y para promover la discusión matemática referida a los hallazgos producidos en esa indagación.

De manera más precisa, es posible afirmar que las actividades centradas en el empleo de las herramientas y los esquemas de utilización desarrollados, funcionaron adecuadamente para lograr la articulación de lo que Sangaré (1999) señala como las propiedades afines (paralelismo, o pertenencia de un punto a una recta, entre otras) y las propiedades euclidianas (conservación de razón de longitud, ortogonalidad, etc.) características de las transformaciones en el plano. Esto se hizo evidente sobre todo en la sesión final en la que los estudiantes trabajaron en la justificación matemática de la composición de simetrías axiales con ejes coincidentes (apartado 4.3.2). En esa sesión, se hicieron explícitos conceptos geométricos inherentes al eje de simetría, como el de constituir la mediatriz de segmentos determinados por pares de puntos correspondientes, o bien el hecho de constituir la bisectriz del ángulo formado entre pares de puntos correspondientes y un punto sobre el eje mismo. Estos hechos explicitados constituyeron a su vez argumentos matemáticos con los cuales fue posible justificar convenientemente el resultado de la composición.

Otro hallazgo encontrado en esta investigación, que permite argumentar acerca de una forma específica de construcción de la relación entre racionalidad emergente y mediación semiótica, es el que se refiere al desarrollo, por los participantes, de procedimientos de construcción descontextualizados de los artefactos inicialmente utilizados para el estudio de las transformaciones geométricas. Así, fue posible observar, tanto en el estudio inicial (el caso de Antonio y Eutimio trabajando con el pantógrafo de Sylvester, apartado 4.2.2) como en el final (el razonamiento de Rodrigo para refutar la propuesta de su compañera, apartado 4.3.1), que los estudiantes concibieron una secuencia de construcción independiente del pantógrafo o del software que habían utilizado para aprehender la transformación geométrica involucrada. Tal procedimiento constituyó, desde la perspectiva de los estudiantes, una prueba de la certeza de la afirmación producida, e. g. en referencia a la transformación que realiza una máquina matemática en particular. Sin embargo, lo que más interesa resaltar es que esto representa ya un primer paso en la construcción de una prueba intelectual: “cuando esa acción (la que da cuenta de la prueba pragmática) puede ser descrita y explicada se está en un primer momento de una construcción cognitiva” (Balacheff, 1987, p. 160).

- *¿Qué argumentos se pueden dar, en términos de los elementos puestos en juego en esta investigación y de los resultados obtenidos, respecto a la interacción social y al deseo de certitud como motores para la elaboración de pruebas por parte de los estudiantes?*

En ambas fases del estudio empírico se observó que los estudiantes llegaron a compartir significados atribuidos a objetos matemáticos experimentados en un contexto material. Esto fue particularmente manifiesto en la actividades en parejas desarrolladas por los estudiantes, e. g., cuando la explicación de uno de era acompañada fielmente por las construcciones geométricas del otro, ya fuese con Cabri, con las máquinas articuladas o bien utilizando instrumentos estándar como transportador, y regla. Casos que muestran esto son los de Antonio y Eutimio al trabajar con el pantógrafo de Sylvester (apartado 4.2.2), en esa ocasión observamos como las explicaciones que Antonio daba al conductor para justificar la validez del procedimiento de construcción para la rotación, eran acompañadas por la construcción misma llevada a cabo por Eutimio. Otro caso es el de Trinidad y Juan Carlos cuando estaban inmersos en el proceso de validación referido al resultado de una composición de simetrías con ejes coincidentes (apartado 4.3.2); ahí, en un par de ocasiones, lo que uno de ellos explicaba, era mostrado, simultáneamente, mediante el software por su compañero.

También fueron observados momentos en los que cierta explicación o justificación de alguno de los participantes era reformulada por alguno de sus compañeros, mostrando acuerdos en cuanto a la forma de interpretar tales explicaciones, como sucedió durante el trabajo colectivo en la resolución del problema en el que se pide encontrar el lugar geométrico del punto medio entre los vértices de dos triángulos equiláteros, funcionalmente relacionados (apartado 4.3.3). En ese episodio surgieron momentos en los que Rodrigo reformulaba alguna explicación dada por Juan Carlos, o bien, situaciones en las que cierto desacuerdo conducía a hacer explícitos los entendimientos propios respecto a lo que significaba justificar la afirmación en cuestión. Así sucedió cuando Gabriela propuso dar por terminado el proceso de validación con respecto a tal afirmación, en ese momento Juan Carlos tomo la iniciativa de presentar una argumentación teórica que mostrara con claridad las relaciones geométricas necesarias y suficientes para probar esa aseveración. Por supuesto, también las intervenciones del conductor en ocasiones llegaron a promover la reflexión con respecto a las afirmaciones o a las conjeturas que los estudiantes proponían o se dirigieron a presentar argumentos teóricos que pudiesen ayudar en la validación de las proposiciones en juego.

Esto da pie para proponer que las discusiones entre los participantes, incluyendo el conductor de las sesiones, se constituyen en espacios propicios para la reflexión no sólo de lo que los compañeros proponen, sino también de lo que cada quien trata de exponer. Como lo señalan Yackel y Cobb (1996), las explicaciones se constituyen en objetos de reflexión, ya no sólo es importante comprender personalmente el tema o el objeto de estudio, sino que también lo es el que nuestros interlocutores comprendan lo que uno mismo trata de explicar. Adquiere importancia, entonces, el tipo de justificaciones que se dan para validar una afirmación matemática.

En términos de lo anterior, consideramos que el tipo de experiencias de aprendizaje promovidas en un escenario como el utilizado en este proyecto de investigación, contribuye a superar uno de los obstáculos que Balacheff (1978) señala para el desarrollo de pruebas intelectuales dentro de la comunidad del salón de clases, y que consiste en las diferencias significativas que pueden existir entre los participantes en cuanto a los concepciones que cada uno posee respecto a los objetos matemáticos involucrados. Las actividades de aprendizaje mediadas por artefactos culturales, junto con la actividad discursiva generada, favorecen una significación compartida, y compatible, de los procesos y los conceptos matemáticos implicados.

- *¿Cuál es el papel de las herramientas de mediación en el proceso de descontextualización requerido para la elaboración de pruebas intelectuales?*

Las herramientas de mediación utilizadas en este estudio, contribuyen a construir un puente entre las pruebas pragmáticas y las pruebas intelectuales (Balacheff, 1987). La utilización de las máquinas articuladas promueve en los usuarios un proceso de descripción y de explicación de lo que cada máquina genera, los estudiantes llegan a ser capaces de describir con detalle el procedimiento de construcción relativo a una transformación geométrica. Esto fue constatado en varias ocasiones durante el desarrollo de la parte empírica del proyecto, como en el caso de David y Sergio al resolver un problema de construcción geométrica (apartado 4.2.1). En ese episodio David genera una representación que muestra el problema resuelto y a partir de esto, puede justificar la aplicación de una simetría como estrategia de solución conveniente. Otro caso que muestra, claramente, la apropiación de un procedimiento de construcción válido para obtener la imagen de un objeto bajo una rotación, es el de Antonio y Eutimio trabajando con el pantógrafo de Sylvester (apartado 4.2.2), su procedimiento recurre al uso de transportador y regla, siendo, así, independiente del empleo de Cabri o del pantógrafo. Como lo señala Balacheff (1987), cuando la acción que testifica una prueba pragmática puede ser descrita y explicada se está en un primer momento de una construcción cognitiva (p. 160). Así, la actividad promueve la descontextualización de las transformaciones, particularmente, en lo que se refiere a su aplicación sin recurrir a los artefactos previamente utilizados. Esto es atribuible a que las actividades centradas en el estudio de las transformaciones, mediadas por el uso de Cabri y las máquinas articuladas, efectivamente, permiten identificar e interiorizar los elementos característicos de las transformaciones y los invariantes geométricos que las definen.

Estas actividades favorecen, también, la visualización de configuraciones que, a su vez, estimulan en los estudiantes la generación de razonamientos del tipo que Balacheff (1987) define como *experiencia crucial*, *ejemplo genérico* y *experiencia mental*. Estos artefactos culturales permiten el reconocimiento tanto de casos particulares como generales; los estudiantes pueden transitar, en un sentido y en otro, entre la representación específica y concreta que proporciona un pantógrafo y las representaciones dinámicas y de carácter más general correspondientes en el ambiente de Cabri. Esta integración semiótica de representaciones promueve el tránsito de las pruebas pragmáticas a las pruebas intelectuales.

En nuestra investigación fue posible observar esta integración de representaciones, que permite a los estudiantes generar las suyas propias y utilizarlas efectivamente en una justificación teórica. Quizá el ejemplo más claro de esto se tenga en la actividad llevada a cabo por Trinidad y sus compañeros, teniendo como motivo probar lo que el pantógrafo de composición de simetrías con ejes coincidentes producía (apartado 4.3.2). En este episodio, los estudiantes disponían del pantógrafo mismo y de una simulación de éste en Cabri.

La actividad comienza con la intención de afinar la afirmación previamente formulada respecto a esa composición, en esta primera fase las experiencias antecedentes con Cabri permiten a Trinidad explicar la composición en términos de la aplicación secuencial de las simetrías:

> Trinidad: *Bueno, primero tomas en cuenta un eje, y haces uno* (la primera simetría), *y puedes poner un eje que sea transversal a… o perpendicular a una recta, y con ése puedes hacer otra simetría y quedan las dos simetrías y se pueden unir hasta cierto… o sea las puedes mover.*

Trinidad acompaña su explicación con movimientos de sus brazos y manos para indicar la posición de cada eje y para simular un movimiento de rotación entre la posición inicial de un objeto hipotético y la posición final al cabo de la composición. Su explicación muestra que ha interiorizado ya una imagen, en la que la relación entre la composición de simetrías y la rotación es patente; aunque dicha relación permanece aún en un nivel fenomenológico u operacional, es decir, limitado a la descripción de la sucesión de transformaciones.

La afirmación va siendo refinada de manera que se hace explícita la condición de coincidencia de los ejes y la intersección de estos como centro de la rotación equivalente. Después, Rodrigo se refiere directamente a los elementos de la máquina articulada para explicar la nueva afirmación, su explicación es seguida por sus compañeros:

> Rodrigo: *Dos simetrías axiales, aquí está una y ésta es otra*, (señalando sobre la máquina articulada cada uno de los eslabonamientos que produce una simetría axial) *equivalen a lo que es una rotación, o sea que si rotamos este triángulo ABC, sale… puede llegar hasta acá* (la posición que ocupa la segunda imagen de ABC)*, pero esto, entre dos ejes coincidentes, que es el centro de la rotación, la intersección de los dos ejes, y en cuanto a lo que era la suma del doble del ángulo formado.*
>
> Trinidad: *Esta composición se puede hacer por medio de una rotación, en la que el centro es la intersección entre las dos rectas y el ángulo debe ser del doble del ángulo que forman las… los dos ejes.*

En estas intervenciones observamos que la significación de los objetos y los procesos geométricos, presentes en las experiencias de los estudiantes, se apoya fuertemente en la experiencia fenomenológica que las herramientas proporcionan. Este dominio de racionalidad pragmática permite establecer una base experimental sólida para el desarrollo de una racionalidad teórica, apoyada ahora en representaciones y significados compartidos. Posteriormente, Juan Carlos centra su atención en la relación que guardan la figura antecedente y su segunda imagen, mientras Trinidad explora la composición utilizando la simulación en Cabri, esto le permite contribuir a la discusión ampliando lo que afirma su compañero:

Conductor: *¿Qué hay entre las posiciones de las figuras?*

Trinidad: *Cambian.*

Juan Carlos: *Rotan.*

Conductor: *¿Por qué dices que rotan?*

Trinidad: *Porque el efecto era como de un espejo en la simetría, y siempre van a estar encontrados*.

Conductor: *¿Y ahora?, en una rotación se mantiene la orientación de la figura, ¿eso sucede aquí?*

Juan Carlos: *No*

Trinidad: *Sí va a suceder porque en el último,* (refiriéndose a la segunda imagen) *como se vuelve a hacer al contrario se… bueno sería la misma imagen pero un poco volteada, es como si va girando, entonces en una rotación pasaría lo mismo.*

Juan Carlos: *Lo que pasa es que se sigue conservando la orientación, pero con respecto a la imagen, o sea tenemos primero el original y la primera imagen, luego tenemos la primera imagen y la segunda imagen, quedaría así.*

Juan Carlos contribuye, a su vez, a esclarecer la explicación de su compañera, recurriendo a imágenes interiorizadas, referentes a la simetría axial y a la rotación. Posteriormente, Trinidad intuye la equidistancia de puntos correspondientes en la composición al punto de intersección de los ejes de simetría, haciendo alusión a un movimiento circular o a una circunferencia que une puntos correspondientes en la composición. Nuevamente, Juan Carlos aporta a lo que su compañera señala:

Juan Carlos: *Bueno, por ejemplo, si uniéramos B con B' y B" y quisiéramos por ejemplo que hubiera otra imagen que fuera B"' y así, y fuéramos uniendo los puntos se haría una circunferencia…*

En la parte final del episodio, los estudiantes elaboran esquemas como apoyos de su argumentación. Juan Carlos presenta en el pizarrón su propio esquema, mismo que dispara la explicitación de los argumentos suficientes y necesarios para validar la proposición geométrica finalmente establecida. El esquema muestra, inicialmente, los elementos geométricos involucrados. Nuevamente es Trinidad quien contribuye a enriquecer ese esquema, permitiéndole además, presentar comenzara a desarrollar un argumento esencial para justificar, teóricamente, el resultado de la composición:

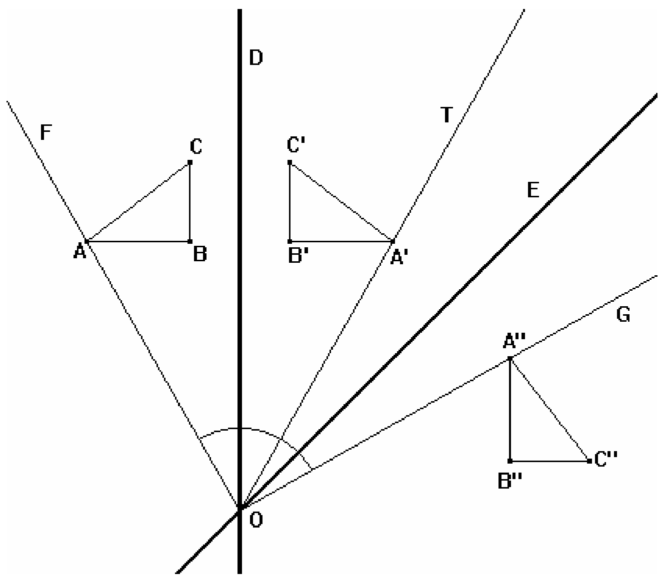
Trinidad: *¿Por qué no pones un ángulo del punto cero a A'.*

Conductor: *Vamos a ver, sí, Trinidad.*

Trinidad: *Del punto cero a A' pon una línea.*

Juan Carlos: *¿Del punto cero?...*

Trinidad: *De O a A'* (Juan Carlos traza en el pizarrón la recta OA')… *sí y ahora sí se ve eso de la suma de los ángulos.*



La relación angular que ha visualizado Trinidad resulta fundamental para la prueba de lo que la composición produce. Los ángulos AOD y DOA' son congruentes, al igual que A'OE y EOA''.

Esta selección de intervenciones, extraída del episodio ya referido, permite evidenciar un enriquecimiento de las representaciones que los estudiantes han interiorizado, como resultado de su participación. Se trata, seguramente, de un proceso de integración de las diferentes representaciones que los artefactos proporcionan, para llegar a producir, en el contexto interno de cada participante, imágenes propias que, sin embargo, son enteramente compatibles con las de los otros. Nos parece que este proceso resulta poderoso para efectos de la descontextualización de una aseveración, en el sentido de que su validez deja de estar sujeta a la herramienta desde la cual ha sido formulada originalmente. Esto representó, desde nuestra perspectiva, un recurso valioso para el avance de los estudiantes en la elaboración de pruebas intelectuales o justificaciones teóricamente fundamentadas.

5.3. Conclusiones en referencia a la tesis del proyecto

Puesto que nuestro planteamiento esencial radica en la relación entre la apropiación de instrumentos de mediación semiótica y la emergencia de formas de racionalidad matemática, se considera necesario finalizar estas conclusiones elaborando una explicación más precisa de lo que significó tal relación en el desarrollo de este trabajo de tesis.

La disponibilidad de artefactos culturales, trátese de objetos materiales o computacionales, que estructuralmente incorporan contenidos matemáticos, ha representado, en este trabajo de investigación, la posibilidad de generar actividades de aprendizaje apoyadas en una variedad de representaciones relativas a un contenido específico. Además de estos artefactos culturales, se ha dispuesto de secuencias o guiones como organizadores de la actividad que los estudiantes llevan a cabo, y de la conducción del proceso ejercida por el profesor, esto ha permitido generar condiciones para el involucramiento de los estudiantes en la elaboración de conjeturas y en el desarrollo de argumentos dirigidos a la justificación de las mismas.

La utilización intensiva y organizada de los artefactos promueve la apropiación por parte de los usuarios de instrumentos de mediación semiótica, constituidos en herramientas del pensamiento. En el contexto en el que se ha trabajado esta teisis, es posible proponer que un instrumento de mediación semiótica consiste de una estructura cognitiva organizada por medio de representaciones externas e internas, significados, e incluso esquemas de utilización, que el sujeto integra y asocia convenientemente a un concepto o a un proceso matemático. Este objeto de conocimiento se constituye entonces en una “abstracción concreta” (Mariotti, 2002) que refleja y reconstruye la naturaleza sistémica e interconectada de los objetos materiales o virtuales a partir de los cuales ha sido elaborada, varias representaciones del concepto llegan a estar semánticamente unificadas (Sfard, 1991) por este constructo abstracto.

Sin embargo, también es necesario atender el papel de la interacción social o los procesos interpsicológicos promovidos a través del requerimiento de hacer explícitos y públicos los entendimientos personales y las razones o los argumentos con los que se trata de sustentar cierta conjetura o cierto resultado matemático, evidenciado mediante la manipulación de alguna de las herramientas disponibles. Estos requerimientos promueven eficazmente un tipo de *discurso reflexivo* (Cobb, et al, 1997) que permite convertir los resultados de acciones concretas, tales como procedimientos o resultados de problemas, en objetos de discusión en términos de su pertinencia o de su eficacia, desde un punto de vista matemático. También es necesario destacar el papel del conductor de las sesiones de trabajo en el laboratorio como el de un representante de la comunidad matemática, en el sentido de llevar a un primer plano el aspecto de la validación. La búsqueda sistemática de argumentos que permitan fundamentar un resultado o una aseveración, requiere, en principio, de una orientación cualificada.

Bajo estas condiciones, los estudiantes pueden asumir como propia una situación de validación, no sólo porque disponen de herramientas o artefactos materiales con los cuales pueden explorar el hecho o la afirmación matemática involucrada, sino también porque se encuentran inmersos en un proceso de construcción de entendimientos y de significados matemáticos relativos a esos mismos hechos y resultados. La internalización de objetos y procesos a partir de la exploración de las relaciones y las propiedades que los caracterizan, da origen a un proceso recíproco de significación de los objetos abstractos y potenciación de los referentes materiales, de manera que los significados atribuidos a los referentes evolucionan en la medida en que la actividad y la interacción social e instrumental promueven el proceso mismo de indagación.

Los resultados de esta investigación también ponen en relieve la importancia de asumir diferentes niveles y significados de la prueba en el salón de clase de matemáticas de manera que, como lo propone Herbst (2000), lo que cuenta como una prueba está condicionado por la situación en la que los participantes se encuentran, de los medios externos y de los recursos propios de que disponen. En nuestro caso, la actividad en el laboratorio de matemáticas permite promover distintos niveles de actividad cognitiva, como la búsqueda de regularidades o de invariantes, la identificación de esas regularidades en otros medios de representación, la explicitación de tales regularidades, la elaboración de un discurso reflexivo y de una reflexión colectiva, la integración semiótica de las representaciones disponibles y la generación de representaciones internas, para constituir, de esta forma, objetos matemáticos abstractos que poseen referentes experimentados en un contexto material y que son socialmente compartidos. Esto permite fomentar actitudes y aptitudes favorables a la argumentación y a la validación matemática.

5.4. Preguntas o temas de investigación que surgen de esta tesis

Un aspecto en el que es necesario profundizar, es el que se refiere a la pertinencia de utilizar el esquema que Sfard (1991) propone para explicar el desarrollo de concepciones estructurales de los objetos matemáticos, como un medio para describir y entender el proceso de internalización de herramientas psicológicas en el nivel individual. A nuestro juicio, la decisión de introducir, en el contexto de aprendizaje, referentes concretos desde los cuales sea posible elaborar objetos matemáticos, empata adecuadamente con ese esquema, en todo caso, esa decisión demanda la adopción (o la elaboración) de un marco explicativo, sin pasar por alto que existen ya alternativas, como la desarrollada por Mariotti (2002) respecto a la génesis instrumental. Nos parece que esto es importante y que requiere de una indagación más profunda que contribuya a ampliar el entendimiento con respecto a la relación entre el nivel interpsicológico y el intrapsicológico de la internalización.

Con respecto a la relación entre racionalidad matemática y mediación semiótica, nos parece que este estudio permite hacer patente el potencial que esta relación tiene para un desarrollo recíproco, quizá dialéctico, de ambos procesos. Sin embargo, para hacer señalamientos más precisos al respecto, puede ser conveniente indagar en aspectos tales como la visualización o en la integración semiótica de representaciones, tanto en contextos geométricos como en otros. También surge la inquietud de averiguar si las formas de racionalidad matemática caracterizadas por Balacheff, pudieran ser promovidas mediante la introducción de artefactos culturales en contextos distintos de la geometría euclidiana, o bien, indagar en cuáles serían las formas de racionalidad “equivalentes” en tales contextos.

Referencias

Alro, H. y Skovsmose, O. (1996). Students' good reasons. *For the Learning of Mathematics*, *16*, 3, 31-38.

Arzarello, F. (1997). For an ecology of proof in the classroom. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*. Descargado el 17 de mayo de 2002, de http://www.lettredelapreuve.it/indexFR.html.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, *18*, 147-176.

Balacheff, N. (1991). Benefits and limits of social interaction: The case of teaching mathematical proof. En A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen, J. Van Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp.175-192). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Balacheff, N. y Kaput, J. (1996). Computer-based learning environments in mathematics. En: A. J. Bishop, et al. (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 469-501). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Balacheff, N. (1999). L'argumentation est-elle un obstacle? Invitation à un débat… *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*. Descargado el 26 de septiembre de 2000, de http://www.lettredelapreuve.it/Newsletter/990506.html

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá: Una empresa docente. (Traducción de P. Gómez del original en francés: Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de Collège*, Thèse d'Etat, Université Joseph Fourier, Grenoble).

Barnes, M. (2000). 'Magical' moments in mathematics: Insights into the process of coming to know. *For the Learning of Mathematics*, *20*, 1, 33-43.

Bartolini, M. (1993). Geometrical proofs and mathematical machines. An exploratory study. En *Proceedings of the 17th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, *2* (pp. 97-104). Tsukuba, Japón.

Bartolini, M. (1998); Joint activity in mathematics classrooms: A vygotskian analysis. En F. Seeger, J. Voigt y U. Waschescio (Eds.), *The culture of the mathematics classroom* (pp. 13-49). New York: Cambridge University Press.

Bartolini, M. G. (2000). Early approach to mathematical ideas related to proof making. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*. Descargado el 19 de septiembre de 2000, de http://www.lettredelapreuve.it/Newsletter/000102.html

Bartolini, M. y Boero, P. (1998). Teaching and learning geometry in contexts. En: C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp. 52-62). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Boero, P., Garuti, R., Lemut, E. y Mariotti, M. (1996). Challenging the traditional school approach to theorems: a hypothesis about the cognitive unity of theorems. *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2* (pp. 113-120). Valencia, España.

Brown, T. (1996). Intention and significance in the teaching and learning of mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*, 52-66.

CCH-UNAM (1996). Programa de estudio para la asignatura de Matemáticas II. México.

Chassapis, D. (1998-1999). The mediation of tools in the development of formal mathematical concepts: The compass and the circle as an example. *Educational Studies in Mathematics*, *37*, 275-293.

Cobb, P., Boufi, A., McClain, K. y Whitenack, J. (1997). Reflective discourse and collective reflection. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*, 258-277.

Cobo, P. y Fortuny, J. (2000). Social interactions and cognitive effects in contexts of area comparison problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, *42*, 115-140.

Coxeter, H. S. M. (1971). *Fundamentos de geometría*. R. Vinós (tr.), México: Limusa.

Crawford, K. (1996). Cultural processes and learning: Expectations, actions, and outcomes. En L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin, B. Greer, (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 131-147), New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

De Villiers, M. (1998). An alternative approach to geometry proof. In R. Lehrer, D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 369-393), New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Díaz Godino, J. y Recio, A. (1997). Meaning of proofs in mathematics education. *Proceedings of the 21th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2*, (pp. 313-320). Lahti, Finlandia.

Douek, N. (1998). Some remarks about argumentation and mathematical proof and their educational implications; I. Schwank, (Ed.), *Proceedings of the First CERME International Conference, Group 1, 1, (pp. 137-)*. Osnabrüeck, Alemania. Descargado el 10 de diciembre de 1999, de http://www.lettredelapreuve.it/indexFR.html.

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ernest, P. (1998). The culture of the mathematics classroom and the relations between personal and public knowledge: An epistemological perspective. En: F. Seeger, J. Voigt y U. Waschescio (Eds.), *The culture of the mathematics classroom* (pp. 245-268). New York: Cambridge University Press.

Eves, H. (1969). *Estudio de las geometrías.* S. Blumovicz (tr.). México: UTHEA.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Garuti, R., Boero, P. y Lemut, E. (1998). Cognitive unity of theorems and difficulty of proof. *Proceedings of the 22th Conference of the International Group for* *the Psychology of Mathematics Education*, *2*, (pp. 345-352). Stellenbosch, Sudáfrica.

Grenier, D. y Laborde, C. (1988). Transformations géométriques: le cas de la symétrie orthogonal. En: Didactique et acquisition des connaissances scientifiques. Actes du Colloque de Sèvres, mai 1987, pp. 65-86. Grenoble: La pensée sauvage. (Citado en Sangaré, 1999)

Hanna, G. y Jahnke, N. (1996). Proof and proving. En: A. J. Bishop, et al. (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 877-908). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hanna, G. (1996). The ongoing value of proof. *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1.* Valencia, España.

Henningsen, M. y Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*, 524-549.

Herbst, P. (2000, marzo-abril). The articulation and estructuring of conceptions in the mathematics class: Argument and public knowledge. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*. Descargado el 3 de marzo de 2000, de www.cabri.net/Preuve/Newsletter/000304Theme/000304ThemeUK.htlm

Hershkowitz, R. y Schwarz, B. (1999). The emergent perspective in rich learning environments: Some roles of tools and activities in the construction of sociomathematical norms. *Educational Studies in Mathematics*, *39*, 149-166.

Hoyos, V. (2001) Focus on mediation of activity to developing classroom discourse. (Documento proporcionado por la autora.)

Hoyos, V. (2002). Coordinating mediation of activity in the learning of geometrical transformations. *Proceedings of PME-NA XXIV*, Athens, USA.

Hoyos, V. (2003-a). Comunicación y mediación de artefactos culturales en el laboratorio de matemáticas de la secundaria. En: Fac. De Ciencias, UNAM, (Ed.), *Matemáquinas*, México.

Hoyos, V. (2003-b). Mental functioning of instruments in the learning of geometrical transformations. *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3* (95-106), Hawai, EEUU.

Jahn, A. (1998). Des transformations des figures aux transformations ponctuelles : Etude d'une séquence de enseignement avec Cabri-géomètre – Relations entre aspects géométriques et fonctionnels en classe de Seconde. Tesis, Université Joseph Fourier Grenoble 1. (Citado en Sangaré, 1999)

Kempe, A. (1887). *How to draw a straight line. A lecture on linkages.* Descargado el 10 de junio de 2001, de The Cornell University Historic Math Collection Sitio: http://historical.library.cornell.edu/cgi-bin/cul.math/

Kirshner, D. y Withson, J. (1997). *Situated cognition. Social, semiotic and psychological perspectives.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. En: P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Laborde, J-M. y Bellemain, F. (2000). Cabri-Géomètre II.

Landa, J. A. (2002). *Mediación de la hoja de cálculo en la composición de funciones*. Tesis de Doctorado. CINVESTAV-IPN, México.

Lo, J. y Wheatley, G. (1994). Learning opportunities and negotiating social norms in mathematics class discussion. *Educational Studies in Mathematics*, *27*, 145-164.

Mariotti, M. A., Bartolini, M. G., Boero, P., Ferri, F. y Garuti, R. (1997). Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition. *Proceedings of the 21th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1*, (pp. 180-195). Lathi, Finlandia.

Descargado el 17 de junio de 2001, de http://www.lettredelapreuve.it/indexFR.html

Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics*, *44*, 25-53.

Mariotti, M. A. (2002). The influence of technological advances on students' mathematics learning. En: L. English, et al. (Eds.), *Handbook of research in mathematics education* (pp. 695-723). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

McNair, R. (2000) Working in the mathematics frame: Maximizing the potential to learn from students' mathematics classroom discussions. *Educational Studies in Mathematics*, *42*, 197-209.

Meira, L. (1998). Making sense of instructional devices: The emergence of transparency in mathematical activity. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29,* 121-142.

Moschkovich, J. (1999). Supporting the participation of english language learners in mathematical discussions. *For the Learning of Mathematics*, *19*, 11-19.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc. 1906 Association Drive.

Noss, R. y Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings.* Dordrcht, Netherlands: Kluwer Academic.

Pergola, M. (1998). *Note storiche*. Descargado el 12 de octubre de 2001, de Museo Universitario di Storia Naturale e della Strumentazione Scientifica, Università degli studi di Modena e Reggio Emilia.
Sitio: http://www.museo.unimo.it/theatrum/macchine/_00the.htm

Pirie, S. y Schwarzenberger, R.. (1988). Mathematical discussion and mathematical understanding. *Educational Studies in Mathematics 19*, 459-470.

Richards, J. (1996); Negotiating the negotiation of meaning: Comments on Voigt (1992) and Saxe and Bermudez (1992). En: L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin, y B. Greer. *Theories of mathematical learning* (pp. 69-75). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Sangaré, M. (1999). *La rotation: approche didactique et cognitive: Une étude de cas au Mali*. Tesis, Université du Mali, Institut Supérieur de Formation et de Recherche Appliqué.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics. En: D. A. Grows (Ed.), *Handbook of the research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan Publishing Company.

Seeger, F., Voigt, J., y Waschescio, U. (1998); *The culture of the mathematics classroom* (1st. ed.). New York: Cambridge University Press.

SEP, (1993). Plan y programas de estudio. Educación básica. Secundaria. México.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Simon, M. (1996). Beyond inductive and deductive reasoning: the search for a sense of knowing; *Educational Studies in Mathematics, 30*, 197-210.

Souviney, R. J. (1989). *Learning to teach mathematics*. Columbus: Merrill.

Steinbring, H. (1998). Mathematical understanding in classroom interaction: The interrelation of social and epistemological constraints. En: F. Seeger, J. Voigt y U. Waschescio (Eds.), *The culture of the mathematics classroom* (pp. 254-268). New York: Cambridge University Press.

Szendrei, J. (1996). Concrete materials in the classroom. En: A. J. Bishop, et al. (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 411-434). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Thurston, W. (1995). On proof and progress in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *15*, 29-37.

Verillon, P. y Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to de study of though in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, *10*, 77-101.

Vincent, J., Chick, H. y McCrae, B. (2002). Mechanical linkages as bridges to deductive reasoning: A comparison of two environments. *Proceedings of the*

26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4, (313-320). Norwich, Reino Unido.

Voigt, J. (1994). Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 275-298.

Voigt, J. (1996). Negotiation of mathematical meaning in classroom processes: Social interaction and learning mathematics. En L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin, B. Greer, (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 21-50), New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Waschescio, U. (1998). The missing link: Social and cultural aspects in social constructivist theories. En: F. Seeger, J. Voigt y U. Waschescio (Eds.), *The culture of the mathematics classroom* (pp. 221-241). New York: Cambridge University Press.

Wertsch, J. V. (1995). *Vygostsky y la formación social de la mente*. Madrid: Paidós.

Wood, T. (1999). Creating a context for argument in mathematics class. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*, 171-191.

Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*, 458-477.

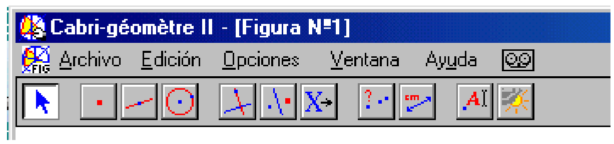
APÉNDICE I
EL SOFTWARE DE GEOMETRÍA CABRI-II

Nombre:____ Edad: ____________
Fecha:_______________

I. La pantalla de Cabri-géomètre II.

- En la pantalla de inicio de la computadora, haz doble “clic” en el icono que corresponde al software **Cabri-géomètre Exp.**

- Maximiza la ventana de Cabri. En esta ventana puedes observar *una barra de menú principal*, y debajo de esta *una barra de cajas de herramientas*; además del área de dibujo o de trazado.



- Cabri es un software que permite hacer construcciones geométricas dinámicas, es decir, es posible construir objetos geométricos tales como puntos, líneas, polígonos, etc., con la particularidad de que esas construcciones pueden ser modificadas al ***arrastrar*** en el plano los elementos base, es decir, los elementos con los que esas construcciones fueron definidas.

- Abre la opción **Ayuda** del menú principal, esta opción indica la función que tiene la herramienta activa que ha sido seleccionada con el puntero. Para empezar a explorar este software revisa los contenidos de cada una de las cajas de la *barra de herramientas*. Para esto, oprimiendo el botón izquierdo del ratón, desliza lentamente el puntero sobre la barra de herramientas y observa las opciones que cada caja presenta.

II. Construcciones iniciales.

1. Construye un triángulo rectángulo de tal manera que al arrastrar cada uno de los tres vértices el triángulo continúe siendo rectángulo. Después de terminar la construcción, describe por escrito el procedimiento realizado. Para arrastrar un objeto es necesario señalarlo con el puntero y oprimir el botón izquierdo del ratón, lo que equivale a asir ese objeto.

2. Construye un cuadrado a partir de *dos puntos dados* de tal manera que al terminar el cuadrado, <u>puedas arrastrar los vértices iniciales de la construcción y la figura siga siendo un cuadrado</u>. Después de terminar la construcción, describe por escrito el procedimiento realizado.

3. Construye un paralelogramo a partir de *tres puntos dados* de tal forma que al terminar el paralelogramo, puedas arrastrar los tres vértices iniciales de la construcción y ésta siga generando un paralelogramo. Después de terminar la construcción, describe por escrito el procedimiento realizado.

4. Selecciona alguna de las construcciones realizadas y trata de justificar el procedimiento de construcción, es decir, trata de hacer explícitas las razones por las cuales la construcción que has hecho satisface las propiedades geométricas de la figura solicitada. (Utiliza la parte posterior de esta hoja).

APÉNDICE II
¿QUÉ SON LAS ISOMETRÍAS?

Nombre:____ Edad: ___________
Fecha:______________________

<u>Traslación.</u>
a) Construye un segmento AB.
b) Construye el segmento A'B', el trasladado de AB, utilizando la herramienta **Traslación** de la caja de Transformaciones Geométricas de Cabri. (<u>Abre el menú *Ayuda* con F1</u>)
c) ¿Qué objetos son necesarios para la construcción?
Al seleccionar la herramienta Traslación y abrir el menú Ayuda se puede leer en la pantalla lo siguiente: "Construye la imagen desplazada de un objeto según un vector dado". Esto significa que requerimos de un objeto, el segmento AB en este caso, y de un vector, por ejemplo el vector OP. Después de que hayas creado el vector OP, efectúa la traslación del segmento AB.

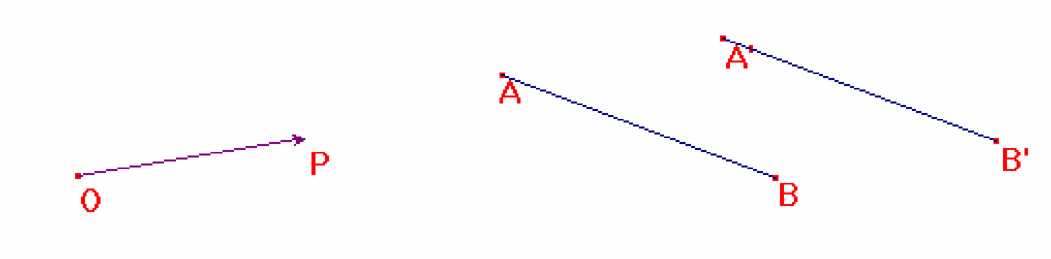


figura 1

d) ¿Cuáles objetos geométricos puedes mover o variar arrastrándolos con el ratón? ¿Por qué?
Podemos mover: - el segmento AB,
- los puntos A y B, cambiando así la longitud del segmento AB,
- el vector OP,
- el punto O, origen del vector, y el punto terminal P, con lo cual varían la norma, la dirección y el sentido del vector.

Estos objetos se pueden mover porque son objetos de base (libres).
No podemos arrastrar el segmento A'B', debido a que depende de los objetos libres que han servido para construirlo, es decir, depende del segmento AB y del vector OP.

e) ¿Qué sucede cuando variamos estos objetos geométricos en la pantalla?

Si movemos / variamos ...	Entonces ...
El vector OP	No se mueve nada más
O, o P	El segmento A'B' se mueve manteniéndose paralelo a AB, sin cambiar su longitud, pero variando la distancia al segmento AB. Los segmentos AA' y BB' se mantienen paralelos a OP.
El segmento AB	el segmento A'B' se mueve conservando su posición respecto a AB y conservando su longitud.
A	Se mueve A' y el segmento A'B' se mantiene paralelo y a la misma distancia de AB, y sin variar su longitud. Los segmentos AA' y BB' se mantienen paralelos a OP.
B	Se mueve B' y el segmento A'B' se mantiene paralelo y a la misma distancia de AB, y sin variar su longitud. Los segmentos AA' y BB' se mantienen paralelos a OP.

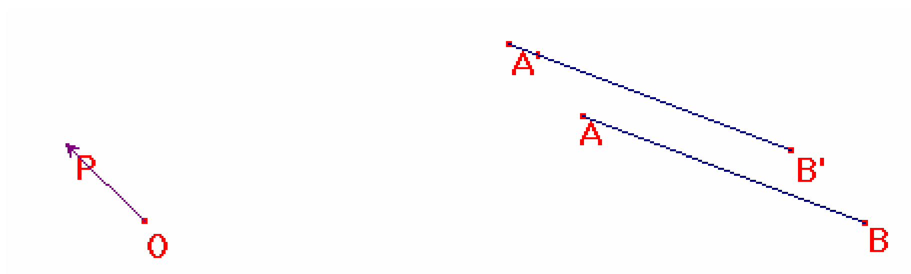


figura 1 después de haber arrastrado P

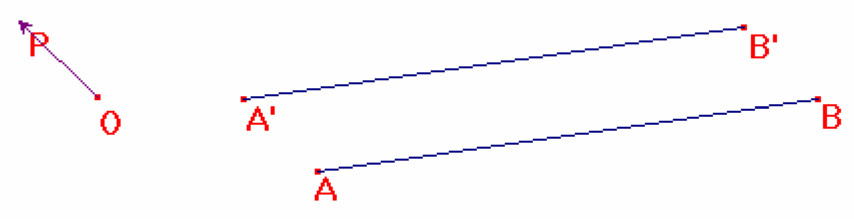
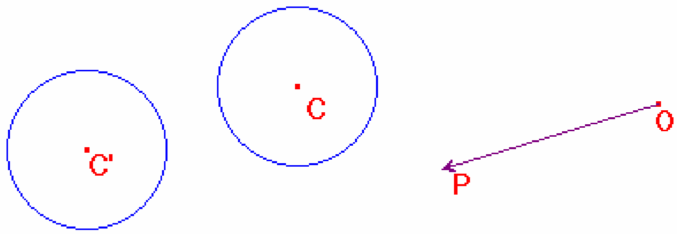


figura 1 después de haber arrastrado A

f) Construye la imagen de otros objetos geométricos (recta, círculo, triángulo) y explora su traslación anotando tus observaciones.

Por ejemplo: Una circunferencia de centro C.



Podemos mover o variar O, P, C y el radio de la circunferencia de centro C. Si movemos O, o P, la circunferencia imagen se mueve sin variar el radio, y CC' se mantiene paralelo al vector OP.

Si movemos C, la distancia entre C y C' no varía y la circunferencia imagen se mueve sin cambiar su radio.

Si variamos el radio de la circunferencia antecedente, el radio de la circunferencia imagen varia para mantenerse igual al radio de la primera.

g) Caracteriza el <u>objeto geométrico imagen</u> en una traslación. ⇒ Explica las relaciones o las propiedades geométricas que se verifican entre pares de puntos correspondientes bajo la traslación.

En la traslación del segmento AB según el vector OP, el segmento imagen A'B':

- tiene la misma longitud de AB
- es paralelo a AB
- AA' y BB' son paralelos al vector OP

En general la imagen A' de un punto cualquiera A del plano, mediante la traslación por el vector OP, es tal que: AA' = OP y AA' // OP

h) Da una <u>definición general</u> de la transformación geométrica Traslación.

La traslación según el vector OP transporta cada punto A del plano al punto A' del mismo plano, de tal forma que el segmento AA' es igual y paralelo al vector OP. La traslación conserva las distancias entre los puntos que se corresponden en la transformación, es decir, AB = A'B', donde A' y B' son las imágenes de A y B respectivamente.

La traslación no deja puntos invariantes en el plano, es decir, en la traslación mediante un vector diferente del vector nulo, no hay un solo punto que sea imagen de sí mismo.

Simetría axial ó Reflexión por un eje.

a) Construye un segmento CD.

b) Construye el segmento C'D' simétrico de CD con respecto al eje *"a"*, usando la herramienta **Simetría axial** de Cabri. (Abre el menú *Ayuda* con F1)

c) ¿Cuáles son los objetos geométricos necesarios para la construcción?

d) ¿Cuáles objetos geométricos se pueden mover o variar y cuáles no?, ¿Porqué?

e) ¿Qué sucede cuando hacemos variar esos objetos geométricos?

Al mover/variar ...	Entonces...
los puntos C o D	
el segmento CD	
el eje de simetría	

f) Construye la imagen de otros objetos geométricos, como un triángulo o un polígono, y explora la simetría. Trata de verificar en los nuevos objetos y sus imágenes las propiedades geométricas que has identificado en el cuadro anterior. Anota tus observaciones.

g) Caracteriza el <u>objeto geométrico imagen</u> en una simetría axial. Þ Explica las relaciones o las propiedades geométricas que existen entre puntos correspondientes y el eje de simetría.

h) ¿Consideras que existen puntos invariantes en la simetría axial, es decir puntos que son imagen de si mismos? Justifica tu respuesta.

i) Da una <u>definición general</u> de la Simetría Axial.

<u>Simetría central, o Reflexión respecto a un punto</u>.

a) Construye un segmento CD
b) Construye el segmento C'D' simétrico de CD con respecto al centro O, usando la herramienta **Simetría central** de Cabri (abre el menú Ayuda con F1)
c) ¿Cuáles objetos geométricos son necesarios para la construcción?

d) ¿Cuáles objetos geométricos se pueden mover / variar y cuáles no? ¿Por qué?

e) ¿Qué cosa sucede cuando hacemos variar esos objetos geométricos?

Si movemos / variamos...	Entonces ...
los puntos C o D	
el segmento CD	
el centro de simetría O	

f) Construye la imagen de otros objetos (recta, círculo, triángulo) y explora la simetría central anotando tus observaciones.

g) Caracteriza el objeto geométrico imagen de una simetría central. Þ Explica las relaciones o las propiedades geométricas que has encontrado entre pares de puntos correspondientes y el centro de simetría.

h) ¿Hay puntos invariantes en la simetría central? Justifica tu respuesta.

i) Da una <u>definición general</u> de la Simetría central.

<u>Rotación.</u>

a) Construye un segmento AB.
b) Construye el segmento A'B', imagen de AB con respecto a la rotación por el punto O, usando la herramienta **Rotación** de Cabri (abre el menú *Ayuda* con F1)
c) ¿Cuáles objetos geométricos son necesarios para la construcción?

d) ¿Cuáles objetos geométricos se pueden mover / variar y cuáles no? ¿Por qué?

e) ¿Qué cosa sucede cuando hacemos variar esos objetos geométricos?

Si movemos / variamos ...	Entonces...
Los puntos A o B	
el segmento AB	
el centro de rotación	
el ángulo de rotación	

f) Construye la imagen de otros objetos (recta, círculo, triángulo) y explora la rotación anotando tus observaciones.

g) Caracteriza el <u>objeto geométrico imagen</u> de una rotación. Þ Explica las propiedades o las relaciones geométricas que existen entre puntos correspondientes en esta isometría en relación al centro y al ángulo de rotación. Puedes utilizar la parte posterior de esta hoja para ampliar tu respuesta.

h) ¿Hay puntos invariantes en la rotación? Justifica tu respuesta.

i) Da una <u>definición general</u> de la Rotación.

¿CÓMO SE COMPONEN (APLICAN DOS VECES SUCESIVAMENTE) LAS ISOMETRÍAS?

a) Lleva a cabo la composición de dos traslaciones. ¿El objeto final puede ser obtenido a partir del objeto inicial con una sola transformación? Si es así, ¿con cuál?

b) Efectúa la composición de dos simetrías centrales. ¿El objeto final puede ser obtenido a partir del objeto inicial con una sola transformación? Si es así, ¿con cuál?

c) Efectúa la composición de dos simetrías axiales. ¿El objeto final puede ser obtenido a partir del objeto inicial con una sola transformación? Si es así, ¿con cuál? Considera las diversas posiciones recíprocas de los ejes:

- Ejes coincidentes...

- Ejes perpendiculares...

- Ejes paralelos...

d) ¿Es posible obtener algunas conclusiones generales acerca de la composición de las diversas isometrías?
   Componiendo dos traslaciones se obtiene ....

   Componiendo dos simetrías axiales con ejes coincidentes se obtiene ....

   Componiendo dos simetrías axiales con ejes perpendiculares se obtiene ....

   Componiendo dos simetrías axiales con ejes paralelos se obtiene ....

e) ¿Cuáles isometrías son operaciones internas (aquellas que su composición de una isometría del mismo tipo)?

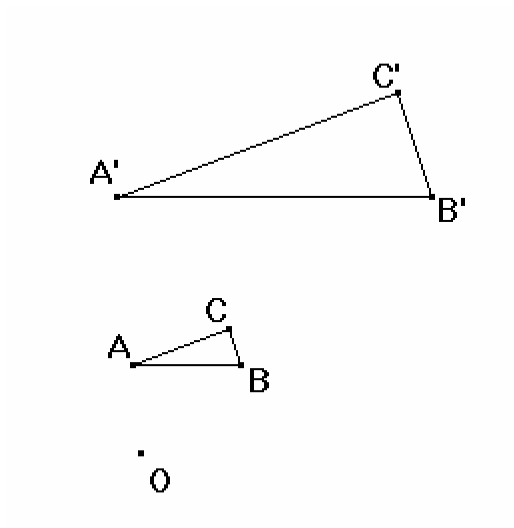
APÉNDICE III

<u>Homotecia respecto a un punto y a una razón dada.</u>

Nombre:____ Edad: ____________

a) Construye un triángulo ABC.

b) Construye el triángulo A’B’C’, homotético de ABC, usando la herramienta **Homotecia** de Cabri.



c) ¿Cuáles objetos geométricos son necesarios para la construcción? (Abre el menú *Ayuda* con F1)

d) ¿Cuáles objetos puedes mover o variar y cuáles no?, ¿Porqué?

e) Si movemos / variamos ...	Entonces...
los puntos A, B o C	
el triángulo ABC	
el centro de homotecia	
el factor o razón de homotecia	

f) Localiza un punto cualquiera P sobre el triángulo ABC...

1. Antes de encontrar su imagen por medio de la herramienta **Homotecia**, ¿Dónde supones que estará la imagen homotética de P? Escribe tu suposición.

2. Utiliza ahora la herramienta **Homotecia** para encontrar la imagen P' de P en A'B'C'. Mueve el punto P y observa que pasa con su imagen P'. Anota tus observaciones.

g) Describe cómo podrías encontrar la imagen homotética de *cualquier punto del plano* <u>sin utilizar</u> la herramienta **Homotecia** de Cabri-II.

h) ¿La homotecia es una isometría? ....
Justifica tu respuesta:

i) ¿Recuerdas algún teorema de Geometría que se relacione o que se aplique directamente a la homotecia?
Si es así ¿cuál teorema es y cómo se aplica?

j) Construye la imagen de otros objetos geométricos, como un segmento de recta y un círculo, explora su homotecia anotando tus observaciones.

k) Caracteriza el objeto geométrico imagen de una homotecia. Þ Explica las propiedades o las relaciones geométricas que existen entre puntos correspondientes en esta transformación en relación al centro y al factor o razón de homotecia.

l) Da una definición general de homotecia.

APÉNDICE IV:
MÁQUINAS MATEMÁTICAS PARA TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Nombre: ____ Edad: _________
Fecha: ______________________

1) Tu tienes una máquina matemática. Utilizando esta máquina dibuja la imagen de algunos objetos geométricos (puntos, segmentos de rectas, triángulos, etc.)
2) ¿De qué transformación se trata?

3) Dibuja dos esquemas de la máquina en dos diferentes configuraciones.

a) En el dibujo asigna letras a los puntos y a los segmentos que conforman la máquina.

b) <u>En la máquina articulada</u>, ¿cuáles son las relaciones o las propiedades geométricas que distingues entre sus diferentes componentes?

4) Una vez que has explorado con la máquina la transformación geométrica que genera, trata de identificar alguna propiedad invariante, es decir, alguna propiedad que se verifique en cualquier configuración, o bien que se verifique con cualquier par de puntos correspondientes bajo la transformación.

a) Coloca un punto sobre unos de los objetos trazados. ¿Cómo encuentras o trazas, **sin utilizar la máquina**, el punto imagen?. Describe tu procedimiento.

b) Escribe la propiedad o las propiedades identificadas. ¿Por qué consideras que esa o esas propiedades se verifican siempre en la máquina? Trata de encontrar argumentos matemáticos para esto.

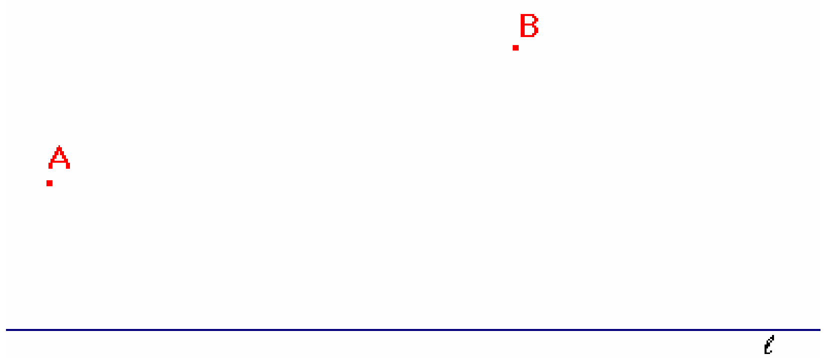
c) Trata de construir una prueba teórica de que tu procedimiento de trazado o de construcción es correcto.

5) Has una descripción de la transformación geométrica que trabajaste con la máquina de tal manera que quién lea tu descripción pueda encontrar la imagen de un punto cualquiera o de otro objeto geométrico, bajo la transformación en juego.

APÉNDICE V
PROBLEMAS

Nombre: ____ Edad: _________
Fecha: ____________

1. En la siguiente figura se tiene dos puntos, A y B, de un mismo lado de la recta ***l***. Se trata de encontrar el punto C sobre la recta ***l*** para el cual la trayectoria ACB: AC + CB, es la más corta posible.



- ¿Cuál supones que es la solución?

- ¿En qué fundamentas tu conjetura?

- ¿Qué transformación geométrica puede ser utilizada para resolver el problema?

- ¿ Por qué supones que esa transformación es útil para resolver el problema?

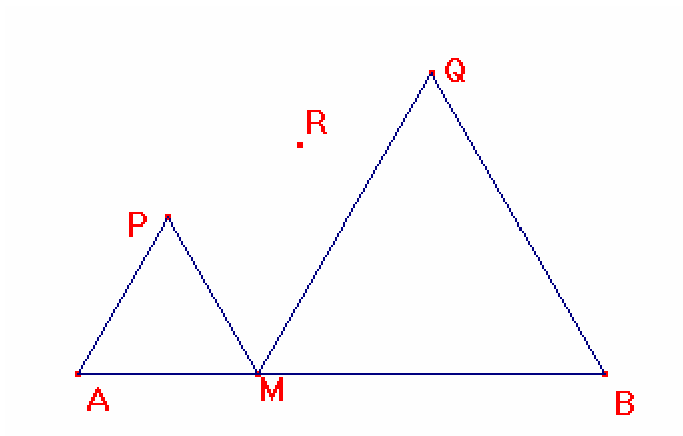
- Pon en práctica el procedimiento de resolución que has previsto para este problema. Þ Trata de verificar tu solución en relación a la condición fundamental que se señala en el enunciado.

- ¿Cómo has verificado que tu solución es correcta?

- Elabora una prueba teórica que le de validez a tu solución. Þ Trata de argumentar relacionando o conectando las propiedades geométricas de la transformación utilizada para resolver el problema.

Nombre: ____ Edad: ________
Fecha: ____________

2. Construye un segmento AB y un punto M sobre el segmento AB. Construye los triángulos equiláteros AMP y MBQ, y el punto R como el punto medio del segmento PQ.



- ¿Cuál supones que es el objeto geométrico que describe R cuando M se desplaza sobre AB?

- ¿En qué fundamentas tu conjetura?

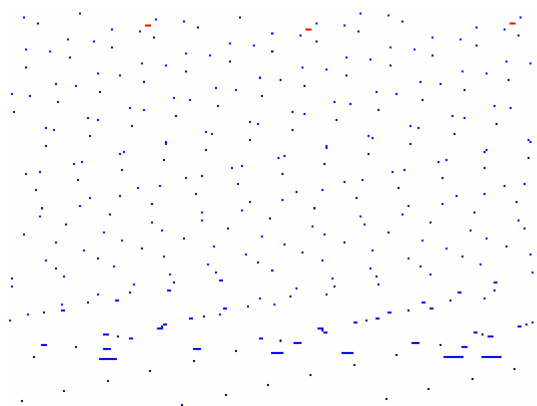
- Verifica tu conjetura. ¿Es correcta? ....

- ¿Cómo has verificado tu conjetura?

- Elabora una prueba teórica que le de validez a tu solución. Þ Trata de conectar o de relacionar las propiedades geométricas involucradas en la transformación utilizada de manera que expliquen y que justifiquen por qué tu solución es correcta.

Nombre: ____ Edad: _________
Fecha: ____________

4. Se dispone de una circunferencia, de una recta y de un segmento AB. Construye un paralelogramo ABCD de tal manera que C y D estén uno sobre la recta y el otro sobre la circunferencia. Indagar acerca de la posibilidad de diferentes soluciones.



a) ¿Cuál de las transformaciones geométricas revisadas es adecuada para resolver el problema?

b) ¿Por qué supones que esa transformación es conveniente para resolver el problema? Þ Trata de argumentar a favor de tu conjetura.

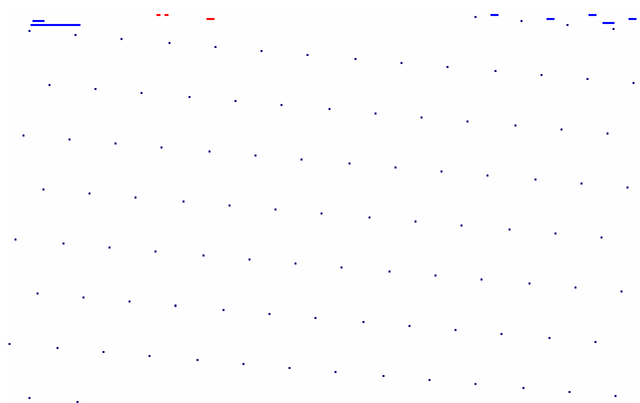
c) Pon en práctica la solución que has previsto para resolver el problema. Þ ¿Te permite resolverlo de manera que satisface las condiciones planteadas en el enunciado del problema?

d) Una vez que has encontrado una solución, trata de hacer explícitas las propiedades o los conceptos matemáticos involucrados en ella y que hacen que sea correcta.

e) Trata de conectar estas afirmaciones o argumentos a fin de construir una prueba matemática.

Nombre: ____ Edad: ________
Fecha: ___________

5. Se dispone de una circunferencia, de una recta y de un punto O. Construye el segmento AB de tal manera que O sea el punto medio de AB y que A esté sobre la circunferencia y B sobre la recta..



a) ¿Cuál de las transformaciones geométricas revisadas es adecuada para resolver el problema?

b) ¿Por qué supones que esa transformación es conveniente para resolver el problema? Þ Trata de argumentar a favor de tu conjetura.

c) Pon en práctica la solución que has previsto para resolver el problema. Þ ¿Te permite resolverlo de manera que satisface las condiciones planteadas en el enunciado del problema? Indaga acerca de la posibilidad de diferentes soluciones.

d) Una vez que has encontrado alguna solución, trata de hacer explícitas las propiedades o los conceptos matemáticos involucrados en ella y que hacen que sea correcta.

e) Trata de conectar estas afirmaciones o argumentos a fin de construir una prueba matemática.

APÉNDICE VI:
MÁQUINAS MATEMÁTICAS PARA TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Nombre: ____ Edad: _________
Fecha: ______________________

1) ¿Qué es lo que hace la máquina matemática con la que estás trabajando?. Þ Describe la transformación geométrica que produce.

2) ¿Cuál es la composición de transformaciones en juego? Þ Trata de especificar lo mejor posible las transformaciones que intervienen en la composición, así como el resultado de esta.

3) Trata de justificar tu afirmación acerca del resultado de la composición de transformaciones representada en la máquina matemática. Þ ¿Qué argumentos puedes presentar para convencer a tus compañeros de que el resultado de esa composición es el que tu supones? Anótalos de la manera más clara que te sea posible y has un esquema o un dibujo si consideras que te puede ser útil en esta tarea.

4) Considerando los argumentos que has presentado para explicar el resultado de la composición que realiza la máquina, trata de elaborar una prueba de esta afirmación, es decir, trata de organizar tus argumentos de manera que el texto producido explique satisfactoriamente la afirmación que has hecho.

APÉNDICE VII
Afinar y demostrar una conjetura

Nombre: ____ Fecha: ______________

Considerando la afirmación que ha hecho su compañera o compañero en relación con la transformación geométrica, o con la composición de transformaciones, que produce la máquina articulada correspondiente, traten de elaborar una demostración matemática de que tal afirmación es válida.

Para esto, primero revisen lo que Uds. mismos hicieron en el caso de la actividad con esa máquina y afinen lo mejor posible la afirmación de manera que quede expresada como un teorema (hipótesis y tesis), es decir que se establezcan o se especifiquen las condiciones bajo las cuales es válida la afirmación. Después traten de elaborar la demostración correspondiente. Pueden utilizar nuevamente el software o la máquina misma.

Teorema:

Argumentos que llevan a proponer este teorema:

Construcción de una demostración:
(Consideren la posibilidad de hacer un esquema y hacer trazos auxiliares.)

Nombre: Ma. Trinidad Valdovines Alcalá Fecha: 22/11/02

Considerando la afirmación que ha hecho tu compañera o compañero en relación a la transformación geométrica o a la composición de transformaciones que produce la máquina articulada correspondiente, traten de elaborar una demostración matemática de que tal afirmación es válida.

Para esto primero revisen lo que Uds. mismos hicieron en el caso de la actividad con esa máquina y afinen lo mejor posible la afirmación de manera que quede expresada como un teorema (hipótesis y tesis), es decir que se establezcan o se especifiquen las condiciones bajo las cuales es válida la afirmación.

Después traten de elaborar la demostración correspondiente. Pueden utilizar nuevamente el software o la máquina misma.

Teorema:

Dos simetrias axiales con ejes coincidentes equivalen a una rotación del doble del ángulo formado entre los ejes coincidentes tomando como centro de rotación la intersección entre los dos ejes.

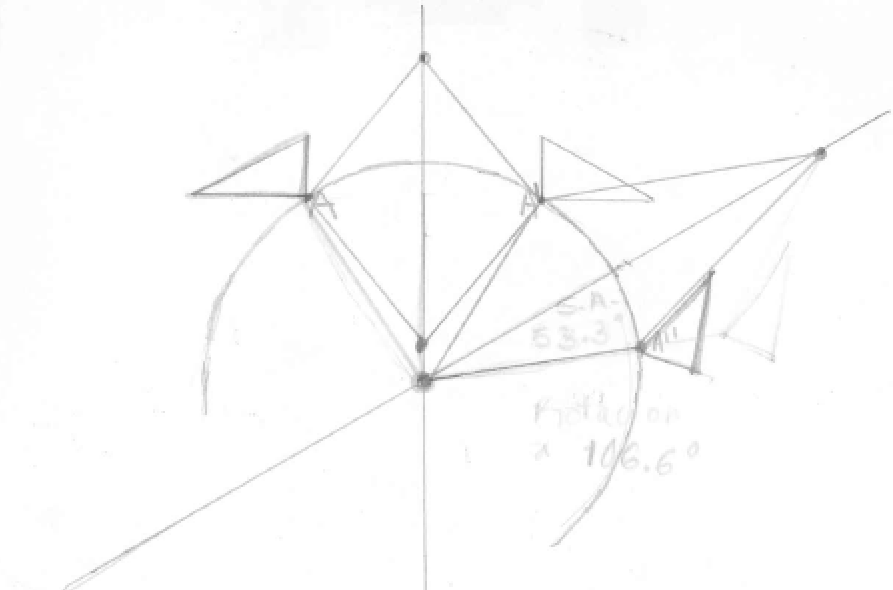
Argumentos que llevan a proponer este teorema:

La orientación de la 1ª figura se sigue conservando en la 3ª figura de la 2ª transformación.

Va girando la figura alrededor del punto de intersección o rotación

A partir de un punto las figuras abc es equidistante.

Construcción de una demostración:
(Consideren la posibilidad de hacer un esquema y hacer trazos auxiliares.)



● Punto de intersección de los ejes y punto O de rotación.

— Ángulo formado por los ejes.

— Ángulo de la rotación, (el doble del ángulo formado por los ejes)

◁ Triángulo A y A' en la rotación

◁ Triángulo A, A' y A'' en la simetría axial

O Los puntos son equidistantes y pasan por una circunferencia.

$\overline{AO} = \overline{A'O}$
$\overline{A'O} = \overline{A''O}$
$\overline{AO} = \overline{A''O}$

Por que son simetricos y el punto O es un punto del eje de simetria.

Tesis: $a\hat{O}a'' = 2D\hat{O}E$

$a\hat{O}a' = 2D\hat{O}a'$; a y a' son simetricos (D)

$a\hat{O}a'' = 2a'\hat{O}E$; a' y a'' son... (E)

$a\hat{O}a' + a'\hat{O}a'' = a\hat{O}a''$

$2D\hat{O}E = 2(D\hat{O}a' + a'\hat{O}E)$

Nombre: Juan Carlos Ortega Galindo Fecha: 22-Nov-2002

Considerando la afirmación que ha hecho tu compañera o compañero en relación a la transformación geométrica o a la composición de transformaciones que produce la máquina articulada correspondiente, traten de elaborar una demostración matemática de que tal afirmación es válida.

Para esto primero revisen lo que Uds. mismos hicieron en el caso de la actividad con esa máquina y afinen lo mejor posible la afirmación de manera que quede expresada como un teorema (hipótesis y tesis), es decir que se establezcan o se especifiquen las condiciones bajo las cuales es válida la afirmación.

Después traten de elaborar la demostración correspondiente. Pueden utilizar nuevamente el software o la máquina misma.

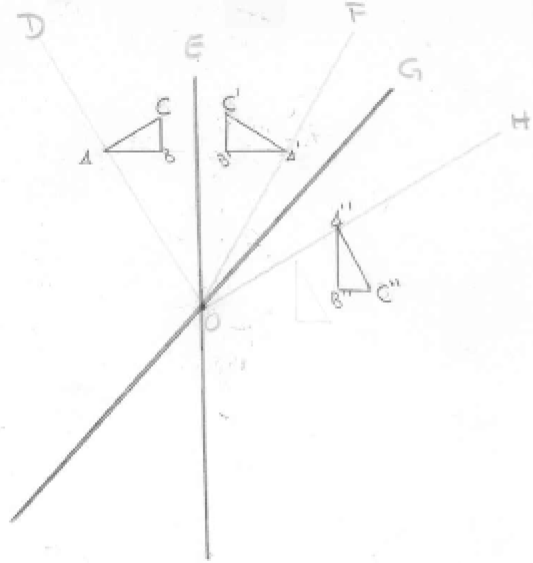
Teorema:

Dos simetrias axiales con ejes coincidentes, equivalen a una rotación con respecto a un angulo al doble del angulo de los ejes coincidentes. Funcionando asi el punto de interseccion como centro de la rotacion.

Argumentos que llevan a proponer este teorema:

- La orientacion de la figura se sigue conservando, puesto que la 3ª imagen resulta ser la misma que el original
- La figura gira al rededor del punto de interseccion de los ejes
- La distancia entre el punto de interseccion a las imagenes y el original es el mismo.

Construcción de una demostración:
(Consideren la posibilidad de hacer un esquema y hacer trazos auxiliares.)



Comos los segmentos A,O y A' O son iguales por ser simetricos, y A'O es igual a A''O, por deduccion AO y A''O tambien lo son.

Lo mismo pasa con los demas puntos y segmetos correspondientes.

Como el angulo $\overline{DOE}$ es la mitad del angulo $\overline{DOF}$ y a su vez el angulo FOG es la mitad del angulo FOH obtenemos que por consecuencia, el angulo DOH es el doble de EOG, esto por que son simetricos con respecto al eje