

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL



SECRETARÍA ACADÉMICA
COORDINACIÓN DE POSGRADO
MAESTRÍA EN DESARROLLO ACADÉMICO

“Actividades de representación en primero de secundaria sobre la noción de números enteros, y su suma y resta, en ambiente híbrido de aprendizaje”

Tesis, que para obtener el grado de
Maestro en Desarrollo Educativo
Presenta:

Juan Manuel Robledo Rodríguez

Directora de Tesis:

Dra. Verónica Hoyos Aguilar

Ciudad de México.

Febrero de 2019

ÍNDICE

AGRADECIMIENTOS

| | |
|--------------------|---|
| INTRODUCCIÓN | 1 |
|--------------------|---|

CAPÍTULO I. ANTECEDENTES Y MARCO TEÓRICO

| | |
|---|----|
| 1.1 Antecedentes | 7 |
| 1.2 La teoría sociocultural | 12 |
| 1.3 Teoría de la actividad | 18 |
| 1.4 La teoría de la representación y características del juego en el aprendizaje | 24 |
| 1.5 La perspectiva semiótica y la gesticulación como indicios de aprendizaje | 29 |
| 1.6 Aprendizaje de nociones algebraicas usando ALNUSET | 35 |
| 1.7 Gestión para el desarrollo de Habilidades Digitales | 44 |

CAPÍTULO II. OBTENCIÓN DE DATOS

| | |
|--|----|
| 2.1 Contexto | 51 |
| 2.2 Descripción de las actividades | 52 |
| 2.3 Sujetos | 55 |
| 2.4 Instrumentos | 56 |
| Hoja de respuestas | 56 |
| Secuencia didáctica | 65 |
| Trabajo colectivo en clase | 69 |
| 2.5. Organización del estudio exploratorio | 72 |
| 2.6 Organización de la información | 75 |

CAPÍTULO III. ANÁLISIS

La representación corporal de los números positivos y negativos

| | |
|--------------------------------------|----|
| 3.1 Clase 1. Zombis vs humanos | 81 |
|--------------------------------------|----|

La suma y resta de números con signo, en el ambiente computacional de ALNUSET. Resolución de problemas

| | |
|----------------------------|----|
| 3.2 Clase 2. La suma | 91 |
|----------------------------|----|

| | |
|-----------------------------|----|
| 3.3 Clase 3. La resta | 98 |
|-----------------------------|----|

| | |
|--|-----|
| 3.4 Clase 4. Resolución de problemas | 104 |
|--|-----|

| | |
|--------------------|-----|
| CONCLUSIONES | 108 |
|--------------------|-----|

| | |
|--------------------|-----|
| BIBLIOGRAFÍA | 114 |
|--------------------|-----|

| | |
|--------------|-----|
| ANEXOS | 116 |
|--------------|-----|

AGRADECIMIENTOS

A Dios, pues sin él nada de esto habría sido posible.

A Gloria, pues sin tu amor, motivación
y acompañamiento, habría sido difícil
culminar este sueño.

A Migue y Fer. Hijos, los esfuerzos siempre rinden frutos.
Arriésguense a ir más allá y a perseguir sus sueños. Nada
los detendrá si están bien enfocados en lo que persiguen.

Madre mía, María Elena, y padre mío, Miguel (qepd)
Este trabajo es un reflejo de lo que me enseñaron desde
niño. Gracias por todas sus enseñanzas y consejos.

Hermanos(as). Sus presiones también jugaron
un papel importante en la culminación de este trabajo.
Gracias por siempre estar ahí cuando los necesité.

A todas esas personas que de una manera u otra
me ayudaron a conseguir este logro, que es tan de uds
como mío. Cada una de uds ha aportado una pequeña
letra en este trabajo que hoy llega a su fin.

A TODOS USTEDES...
¡GRACIAS!

INTRODUCCIÓN

El interés principal que se muestra en este trabajo es el de conocer cómo estudiantes de primero de secundaria se apropian del concepto de números con signo, mediante un ambiente híbrido creado con representaciones (imágenes) y un software interactivo (ALNUSET), así como del conocimiento de la suma y resta con este conjunto de números. Con ello, se espera responder la siguiente pregunta:

- ¿De qué manera influyen las representaciones y el software interactivo en el aprendizaje de números con signo, así como de la suma y resta con números positivos y negativos, para su aplicación en la solución de problemas, en estudiantes de primero de secundaria?

Paralelamente a esta pregunta, también se busca indagar sobre los antecedentes conceptuales numéricos que los alumnos requieren para elaborar las estrategias adecuadas en la resolución de problemas donde se emplean números con signo, y sobre los tipos de intervenciones didácticas que promueven el mejoramiento de las habilidades digitales de los estudiantes que les permitan resolver problemas relacionados con la suma y resta de números con signo.

De manera personal, la experiencia docente obtenida en la enseñanza de las matemáticas en diversos niveles educativos, principalmente en la educación secundaria, ha mostrado que el aprendizaje de los números con signo ocasiona dificultades para muchos estudiantes, especialmente en la suma y resta de este conjunto de números, así como el planteamiento y resolución de problemas empleando las operaciones antes mencionadas.

Este trabajo de investigación plantea los siguientes objetivos:

- i. ¿Cómo puede un alumno comprender el comportamiento de un conjunto de

números menores que el cero?

- ii. ¿Puede el acompañamiento del profesor, el apoyo de un instrumento o una herramienta, y/o la confianza que inspira un compañero facilitar a un alumno la adquisición de las nociones de números con signo?
- iii. ¿Qué tipos de intervenciones didácticas promueven el mejoramiento de habilidades asociadas al reconocimiento de los números con signo?

Para encontrar las respuestas a estas interrogantes, el presente trabajo de investigación se apoya en una intervención didáctica cuyos propósitos son que los estudiantes:

1. Exploren conceptos tales como números positivos y negativos, así como su ubicación sobre la recta numérica mediante la representación (personificación corporal) gráfica apoyada en imágenes.
2. Exploren las operaciones de suma y resta relacionadas con los números con signo, auxiliándose de un software interactivo, denominado ALNUSET.
3. Cuenten con estrategias, lúdicas o mediante el empleo de TIC's, para plantear y resolver problemas, en los que intervengan este conjunto de números.

Desde mi experiencia, el conjunto de los números negativos permite el desarrollo cognitivo de nociones útiles para el conocimiento de conceptos más avanzados, que se relacionan con el lenguaje algebraico, tales como ecuaciones, inecuaciones, fórmulas, funciones, entre otros, y cuya aplicación se distingue en diversos campos de la ciencia y la tecnología, lo que abre paso a ramas más diversa y complejas de la matemática misma.

Un hecho que orilló a considerar el empleo de un software interactivo en este

trabajo, es que en la actualidad vivimos en un mundo donde el uso de la tecnología va avanzando cada vez más. Los estudiantes tienen acceso a ella mediante los equipos de cómputo en casa, en la escuela o en los llamados “café internet” (lugares donde se rentan equipos de cómputo), además de dispositivos móviles como los llamados “*Smartphone*” (o teléfonos inteligentes), tabletas electrónicas, entre otros. Éste acceso a las tecnologías podemos aprovecharlo, si orientamos el interés que tienen los estudiantes hacia este tipo de medios, pues si en vez de ver las TIC como un obstáculo, podemos recurrir a ella como una herramienta en la planeación, ejecución y evaluación de las clases, tanto al interior del aula como fuera de esta, los resultados pueden llegar a ser óptimos. Con ello, abarcamos un área de intervención pedagógica cada vez más amplia que no se limita a un salón de clases, la escuela misma o incluso la comunidad a la que pertenece el estudiante, ya que el uso de este tipo de medios tecnológicos puede trascender fronteras geográficas, de lenguaje, de raza.

Cabe señalar que en esta investigación se le dedicó especial atención a las estrategias que siguieron los estudiantes al plantear y resolver problemas en los que intervinieron números positivos y negativos; así mismo, a los aprendizajes previos que mostraron tanto conceptuales, como procedimentales y actitudinales. Los procedimientos que siguieron los alumnos, así como la manera en que afrontaron las situaciones propuestas para cada sesión de trabajo, sirvieron para identificar los tipos de intervención didáctica que promovieron las habilidades de los estudiantes para trabajar con números con signo.

De acuerdo al modelo educativo de 2011, es imperativo plantear actividades y problemas que permitan a los alumnos desarrollar y comprender las nociones que subyacen en los números con signo y sus operaciones básicas, específicamente la suma y la resta.

Para sustentar lo anterior, la investigación descansa sobre el paradigma socio-histórico de Vygotsky. Dentro de éste, una teoría desarrollada por Luria y Leontiev (entre otros) denominada “Teoría de la Actividad” (T.A.), la cual sustenta el papel que juegan la comunidad, el sujeto y el objeto al emplear un instrumento que medie entre el objeto mismo y el aprendizaje del estudiante. De acuerdo con Vygotsky, el estudiante es capaz de desarrollar su potencialidad (Zona de Desarrollo Próximo –ZDP-) cuando interactúa con alguien que presenta un mayor nivel de dominio del tema, y el aprendizaje (o desarrollo cognitivo) se puede dar mediante la interacción o colaboración social.¹ Dentro del desarrollo de las actividades, particularmente en el empleo del software, el trabajo en pares permitió que existiera una interacción entre ambos y entre éste y el software. De este modo se pudo observar que el estudiante que primero manipula el software (convirtiéndose así en un alumno con mayor conocimiento o habilidad en el manejo del software que su compañero, aunque sea temporalmente) ayuda al otro cuando a éste le toca trabajar en él.

Respecto al enfoque que ofrece la teoría de Vygotsky, en este trabajo se ocuparon, durante cuatro días, una serie de instrumentos con estudiantes de primer grado de secundaria, con quienes se recopiló información referente al aprendizaje de números con signo, y la suma y resta con este conjunto de números. Cabe señalar que la intervención didáctica se llevó a cabo bajo la dirección de quien esto escribe antes de que el profesor titular de la asignatura de matemáticas tratara este tema en clase. La intervención mencionada, más que mostrar una relación entre alguien más capaz (el investigador) con el aprendiz (estudiante), señala la organización con que se llevaron a cabo las actividades. El

¹ Zona de Desarrollo Próximo (ZDP). Distancia entre el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz.

investigador cubre aquí el papel de mediador, más que de profesor. En el trabajo de campo que sustenta a esta tesis se llevó a cabo una exploración en torno al impacto de dos estrategias de enseñanza: para la primera se diseñó una secuencia didáctica en la que se organizó una representación corporal por parte de los estudiantes, de los números positivos y negativos; y en la segunda, se trabajó con un software denominado “ALNUSET” (ALgebra on the NUmerical SETs), particularmente en uno de sus componentes llamado “Línea Algebraica” (L. A.)

El empleo de ambas estrategias permitió indagar hasta qué punto la mediación de un instrumento tecnológico o la representación corporal de las nociones en juego facilitan el paso del estudiante de la Aritmética al Álgebra, pues estamos hablando de conjuntos de números que amplían el campo operativo para la resolución de situaciones específicas.

Es importante mencionar el papel que tuvo, en el aprendizaje de los estudiantes, el que las actividades desarrolladas se presentaran de manera gradual marcando paso a paso los niveles de dificultad para su consolidación.

El presente trabajo de investigación se divide en tres capítulos, que se describen a continuación:

- Capítulo I. Marco teórico. Se habla acerca de los componentes teóricos y conceptuales que dan sustento al desarrollo y análisis del presente trabajo de investigación. Se ofrece un panorama amplio de los componentes del software empleado en el desarrollo de las sesiones (ALNUSET), en particular de la Línea Algebraica (LA). Se presentan también los resultados obtenidos por otros investigadores al usar dicho software. Asimismo, se enmarca el tema que dio origen

al presente trabajo de investigación dentro de la Reforma Integral de la Educación Básica (RIEB) y la importancia que aquí se destaca acerca del uso de las TIC.

- Capítulo II. Obtención de datos. En este capítulo se ofrece un panorama de las condiciones de la escuela donde se llevó a cabo el trabajo de campo de esta investigación, así como de los participantes en la misma (alumnos de primer grado de secundaria) y los instrumentos que se emplearon en el desarrollo de las sesiones.
- Capítulo III. Análisis. En este capítulo se explica la relación existente entre el desarrollo de las actividades que se llevaron a cabo durante las sesiones que constó el presente trabajo de investigación y el respaldo teórico que lo sustenta.
- Conclusiones. Aquí encontraremos los resultados que nos arrojó el trabajo que se presenta, qué nos aporta a la investigación y deja el camino abierto para valorar qué tan viable es abordar otras operaciones con el conjunto de números que aquí se trabajaron: los números con signo.

CAPÍTULO I

ANTECEDENTES Y

MARCO TEÓRICO

1.1 ANTECEDENTES

Las matemáticas han acompañado al hombre desde tiempos inmemoriales. Las necesidades por las que han pasado diferentes culturas han propiciado una parte del desarrollo de la matemática en cada una. Siempre han existido personas a favor, y otras un tanto escépticas a nuevos descubrimientos en el uso de los conceptos matemáticos, y el estudio de los números con signo (más propiamente dicho, el empleo de números negativos) no es la excepción. Éstos son importantes porque nos permiten introducirnos a una rama de las matemáticas que ha sido reconocida con un valor preponderante, debido a su empleo para el planteamiento de problemas de casi cualquier índole: el Álgebra.

En el ámbito educativo, es necesario plantear actividades y problemas que permitan a los alumnos desarrollar y comprender nociones acerca de los números con signo y sus operaciones básicas, lo cual redundará en que su comprensión sea más efectiva. En el presente trabajo de investigación se abordaron las operaciones de suma y resta de números con signo, previa noción y ubicación de los mismos sobre la recta numérica, la cual fue abordada por quien esto escribe acompañando el trabajo de los alumnos, en el aula primero con la representación corporal por parte de los alumnos, en el salón de computación después con la “*Línea Algebraica*”, apoyándonos con el empleo del software ALNUSET, que es el software interactivo en el que trabajamos, y en el que se buscó que los estudiantes encontraron un instrumento de apoyo para resolver operaciones de suma y resta con números positivos y negativos, así como la resolución de problemas con dicho conjunto de números.

El aprendizaje de los números con signo ha sido reconocido, en diversas investigaciones, como un problema didáctico considerado relevante en las instituciones

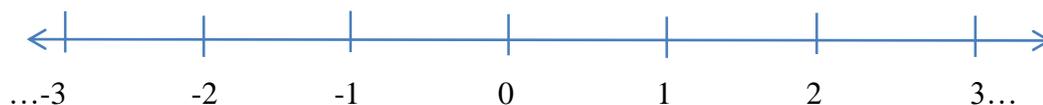
educativas en general, en diversos niveles. Gallardo, en Parra (2005), señala que esta problemática se ha abordado en tres direcciones:

1. Desde una perspectiva teórica (destacando las investigaciones llevadas a cabo por Piaget, 1991).
2. Desde una visión con carácter experimental (entre las que sobresalen las obras de Vergnaud, 1997).
3. Desde su enseñanza (donde han sido importantes los trabajos de Bruno y Martínón, 1997, entre otros). (Parra, en ALME 2005, p. 385)

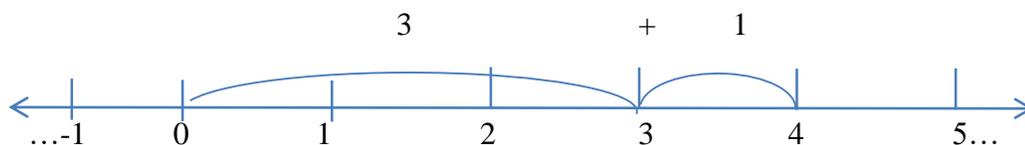
En el presente trabajo, se retoman experiencias vertidas por Pedemonte y Chiappini (2008), y Angelini (2012) referentes al uso del software ALNUSET en diversos campos del álgebra.

Una forma de abordar la problemática previamente mencionada, es tener un plan de clase diseñado que considere diversas situaciones en el desarrollo de una clase. Rico (2001) denomina organizadores del currículo a todos los aspectos que el profesor ha de considerar en el momento de planificar la clase de matemáticas. Él nos dice que los organizadores del currículo son siete:

- a. *La fenomenología.*- Conjunto de fenómenos a los cuales un concepto matemático está relacionado. También hay quienes los denominan historia, situaciones aditivas simples o situación-problema. No confundir este organizador con el de la “*Historia de las matemáticas*”. Éste se explica más adelante, y se define particularmente.
- b. *Sistemas de representación.*- Son los símbolos y gráficos mediante los cuales se expresan diferentes conceptos y procedimientos matemáticos, tales como los números enteros que representan un número “n” cualquiera, o la recta numérica:



- c. *Modelos.*- Muestran la relación que existe entre los fenómenos y los conceptos. Por ejemplo: “*La mamá de Carlos le dio tres carritos por su cumpleaños. Su papá le regaló uno más por sus buenas calificaciones. ¿Cuántos carritos tiene ahora Carlos?*”



- d. *Materiales, medios o recursos.*- Herramientas que le permiten al docente facilitar el logro de los propósitos que aspira obtener, desde una perspectiva donde el alumno juega un rol participativo en el proceso de enseñanza y aprendizaje. (Pueden ser materiales concretos como fichas o tarjetas, así mismo, puede tratarse de un recurso virtual, como es el software interactivo empleado en el desarrollo de la investigación).
- e. *Posibles errores y dificultades.*- Aquéllos imprevistos que pudieran generarse durante el transcurso de la clase, y que puedan representar un obstáculo para alcanzar los logros esperados.
- f. *Historia de las matemáticas como elemento orientador del proceso de enseñanza.*- Que le permita al estudiante tener una mayor visión del conocimiento matemático como producto cultural de la humanidad.
- g. *Resolución de problemas.*- Aplicación de todos los elementos que contempla una planeación escolar.

No se debe pasar por alto que la organización del currículo que se describió previamente, fungió como guía en el proceso de aprendizaje de los alumnos, al plantearse actividades enfocadas a la adquisición de la noción de números negativos en los estudiantes, y la manera en que se llevan a cabo las operaciones de suma y resta con este conjunto de números (positivos y negativos).

Cuando se introduce la tecnología en el campo educativo, se habla de “tecnificar la educación” y, a la par de esta, a la sociedad. La tecnificación puede traer ciertos efectos para las personas involucradas. Salomon, Perkins & Globerson (1991), en Ballesteros (2007), mencionan dos tipos de efectos cognitivos sobre la inteligencia derivados del uso de la tecnología:

“El efecto ‘con’ tecnología obtenido durante la participación intelectual de la sociedad con ella, y el efecto ‘de’ en términos de la transferencia de residuos cognitivos que la sociedad deja atrás en términos de un mejor dominio de las habilidades y estrategias”.

De lo anterior se puede concluir que el efecto “con” es consecuencia del análisis realizado con el apoyo del artefacto. La sociedad se tecnifica y las personas aprenden a

emplear, cada vez mejor y de manera más autónoma la tecnología. Esto convierte a la tecnología en un elemento de suma importancia para la sociedad misma.

Los procesos intelectuales mencionados, más los procesos de discusión, investigación, generación de conocimientos, etcétera, están íntimamente relacionados con la intervención de la tecnología, la cual ha permitido a la sociedad incrementar potencialmente el conocimiento en diversos ámbitos científicos y sociales. La tecnificación social es lo que hace que los sujetos tengan que “actualizarse” para poder coexistir de forma eficiente dentro de la sociedad. Esto es también parte del efecto “con” tecnología.

Posterior al efecto “con”, puede surgir el efecto “de”. En éste se aprovecha el uso de la tecnología para hacer una reflexión cognitiva sobre lo que se está trabajando mediante los instrumentos. El uso de la tecnología como apoyo al quehacer humano puede ayudar a la transformación de esquemas mentales. A diferencia del efecto “con”, el efecto “de” produce un cambio más “dentro” del individuo, un cambio de tipo personal mediado por factores del entorno. El efecto “de” la tecnología es propio de cada persona, es el resultado de la funcionalidad tecnológica como instrumento material o instrumento psicológico.

Lo anteriormente expuesto nos permite señalar que el empleo de los entornos tecnológicos de aprendizaje puede ser un auxiliar en la clase. No es intención de la investigación que dichos entornos se vean como la solución a la problemática educativa en matemáticas. Sí se espera, sin embargo, que favorezcan el aprendizaje en los estudiantes, apoyado también por sus pares, los cuales deben estar en un nivel de conocimiento o comprensión mayor.

La presencia de la tecnología en la clase de matemáticas, permite organizar dinámicas que promuevan en el estudiante actitudes de indagación, interacción y socialización del conocimiento matemático. Entre otras cosas, brinda la posibilidad a los alumnos de ver de

otra forma los instrumentos tecnológicos. A la par del uso de procesadores de texto y hojas de cálculo (los paquetes más comúnmente usados en las escuelas); de navegar en internet o chatear en las redes sociales, se espera que los alumnos reconozcan que la computadora, mediante el uso de diversos softwares, también les puede llevar a otros entornos de la tecnología tales como manipular objetos geométricos, modelar fenómenos y/o conjeturar generalizaciones, entre otros, que de otro modo serían muy difíciles de lograr empleando simplemente lápiz y papel, u otro tipo de material concreto.

1.2 LA TEORÍA SOCIOCULTURAL

Lev Semiónovich Vigotsky creó y encabezó el paradigma psicológico llamado sociocultural, también denominado sociohistórico o históricocultural por otros autores. Él estuvo interesado desde un principio en aspectos educativos y cómo favorecer el aprendizaje en los estudiantes desde una perspectiva interpersonal y con mayor énfasis al medio (y dentro de éste, los medios instrumentales). Al respecto, en el presente capítulo, se retoma la idea principal de Vigotsky referente a que el aprendizaje se construye de manera social. En sus escritos, este autor apoya la idea del proceso social como un factor esencial para el desarrollo del individuo. Uno de sus principales intereses fue reconocer la influencia que ejerce sobre el sujeto la utilización de instrumentos o artefactos –como los llamó el propio Vigotsky-, sean éstos de origen humano (psicológicos) o materiales.

La propuesta de Vigotsky va encaminada a ofrecer una explicación respecto a la relación que se establece entre el sujeto, el objeto y los artefactos o instrumentos. Cole, en Hernández (2012), nos dice que la relación epistémica sujeto-objeto (...) *“se convierte en un triángulo abierto en el que los vértices representan al sujeto, el objeto y los artefactos o instrumentos socioculturales”*.

SUJETO ↔ OBJETO

Imagen 1. Primera representación de la relación entre el individuo y el objeto de conocimiento.

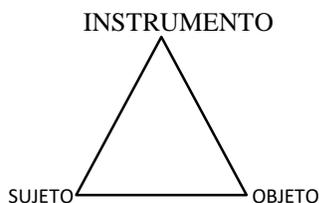


Imagen 2. Propuesta por Cole de la interrelación entre el sujeto, el objeto de conocimiento y el instrumento de mediación. También es reconocida como la primera versión de la Teoría de la Actividad.

Imágenes 1 y 2: Relación entre el sujeto, el objeto y los artefactos o instrumentos, según Cole (en Hernández, 2012, p.220)

El medio sociocultural pasa a desempeñar un papel trascendental en el sujeto, quien no recibe pasivamente su influencia, sino que la reconstruye activamente. Siendo parte de esta reconstrucción la mediación, concepto fundamental de la psicología socio-histórica, que orienta la construcción teórica de Vigotsky.

En el planteamiento vigotskyano se identifican dos formas de mediación social:

- a) La intervención del contexto sociocultural en un sentido amplio.
- b) Los artefactos socioculturales que usa el sujeto cuando conoce al objeto.

Para realizar un acercamiento a un concepto que dé indicios del conocimiento real de un niño y la intervención del contexto sociocultural, Newman, Griffin y Cole. (1991) indican que la expresión '*cambio cognitivo*' puede usarse para caracterizar un proceso que supone una interacción entre el mundo social y el cambio individual. En este proceso, se incluyen las nociones de reestructuración, invención y direccionalidad que implica dicho desarrollo. De acuerdo con los mismos autores, la creación de un término nuevo constituye una forma de indicar que los fenómenos ya conocidos se reconceptúan.

De esta forma, Vigotsky –en su libro "*Pensamiento y lenguaje*"–, reconoce tres niveles o zonas de desarrollo, a saber: el Nivel de Desarrollo Real (N. D. R.) del niño; el Nivel de Desarrollo Potencial (N. D. P.) y la Zona de Desarrollo Próximo (Z. D. P.). Es decir, no toma en cuenta el proceso mediante el cual el niño pasa de resolver problemas de un nivel de complejidad bajo (N. D. R.), para lo cual requiere sólo de los conocimientos previos con los que cuenta, a resolver problemas más difíciles con la ayuda de alguien más (N. D. P.) o con el empleo de algún instrumento que medie para lograr tal fin. Ha de señalarse que los problemas propuestos no deben ser demasiado fáciles como para que el niño se aburra, ni

demasiado difíciles como para que el niño no logre comprender el proceso de resolución aún con ayuda, y desista en su resolución.

Al trabajar con la resolución de un problema, las interacciones entre personas con diferentes propósitos adquieren relevancia, puesto que las diferencias de interpretación sientan las bases para la construcción de nuevos conocimientos. Los cambios tienen lugar en las interacciones socialmente mediadas (las que Vigotsky denomina Zona de Desarrollo Próximo).

Vigotsky hace una crítica a las posiciones teóricas según las cuales el aprendizaje está relacionado al nivel evolutivo del niño. Sin embargo, de acuerdo con Osorio (2011), Vigotsky sí relaciona el desarrollo y el aprendizaje en tres posiciones teóricas:

1. La suposición de que los procesos del desarrollo en el niño son independientes del aprendizaje.
2. El aprendizaje es desarrollo.
3. El desarrollo se basa en dos procesos distintos, pero relacionados entre sí. Por un lado, la maduración, que depende directamente del desarrollo del sistema nervioso. Por el otro, el aprendizaje que es a su vez un proceso evolutivo. El proceso de evolución prepara y posibilita un proceso de aprendizaje y el proceso de aprendizaje prepara y estimula el proceso de maduración en una relación cíclica.

Sin embargo, no se queda sólo en la determinación de los niveles evolutivos para hallar las relaciones verdaderas entre desarrollo y aprendizaje. Vigotsky plantea una relación donde ambos se influyen mutuamente. Esta idea la retoma del constructo teórico de la Z.D.P.

El cambio cognitivo en el niño no aparece únicamente como una función psicológica independiente en la que se le atribuya al “novato” lo que los participantes realizan entre sí, sino cómo lo efectúan. La interacción mediada por la cultura entre las personas que se hallan en la zona se interioriza, convirtiéndose de esta forma en una nueva función del individuo. Es decir, lo interpsicológico (hacia “afuera” del niño) se convierte también en intrapsicológico (hacia “adentro” del niño).

La interiorización de significados que va adquiriendo el niño se desarrolla mediante una actividad cerebral superior. Esta actividad esta mediada por instrumentos o signos, de los cuales, para Vigotsky, el lenguaje es el principal mediador. El lenguaje comprende varias formas de expresión (no sólo verbal) tales como oral, gestual, escritura, artística, musical y matemática.

Wertsch 1988, p. 42 (en Hernández, 2012) propone cuatro criterios que distinguen las funciones psicológicas superiores:

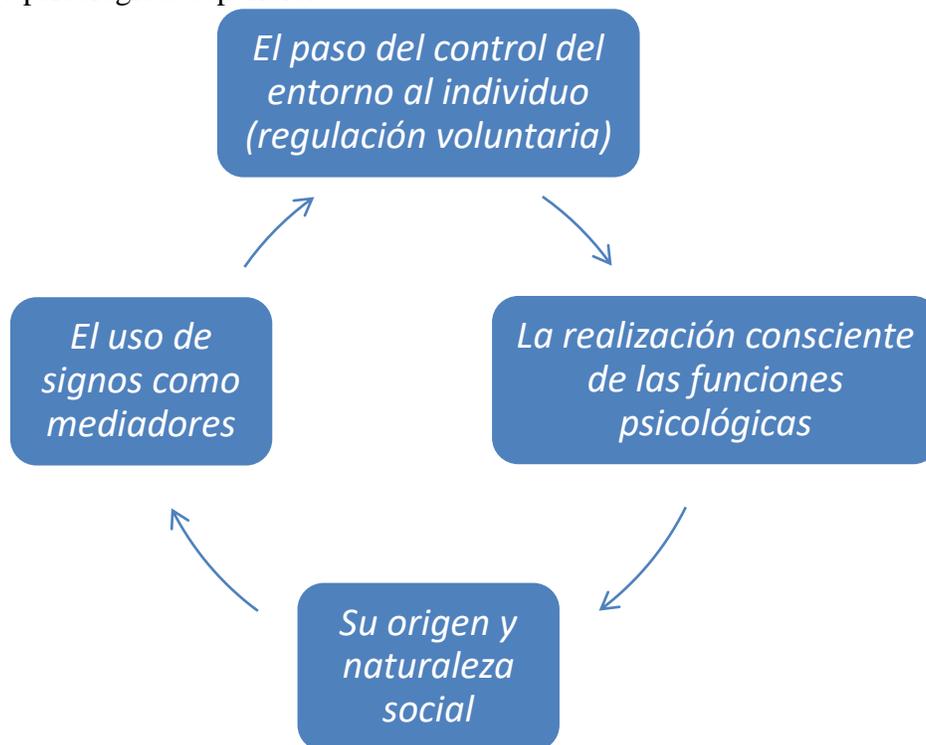


Imagen 3. Criterios que distinguen las funciones psicológicas superiores, Wertsch 1988.

De acuerdo con Vigotsky, (en Ballester, 2007. p. 128), las funciones psicológicas superiores se consideran funciones de la actividad mediada, para lo cual establece tres clases de mediadores:

- 1. Instrumentos materiales: Sólo tienen una influencia indirecta sobre los procesos psicológicos humanos, porque se dirigen a procesos de la naturaleza. No existen como utensilios individuales; presuponen un empleo colectivo, una comunicación interpersonal y una representación simbólica.*
- 2. Instrumentos psicológicos: Mientras que los instrumentos materiales se dirigen a objetos de la naturaleza, los instrumentos psicológicos median entre los propios procesos psicológicos de los seres humanos.*
- 3. Mediación de otras personas: Se proponen dos enfoques posibles. El primero se expresa en la afirmación de que “en el desarrollo cultural del niño, cada función aparece dos veces: primero en el nivel social y después, en el nivel individual. Primero entre personas (nivel interpsicológico) y después dentro del niño (nivel intrapsicológico)”. El segundo enfoque centra el papel de la otra persona como mediadora de significados.*

El empleo de instrumentos en la educación fue reconocido y promovido por Vigotsky. La teoría sociocultural sentó las bases para futuros desarrollos de otras propuestas teóricas, enfocadas a la instrumentación en el proceso enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (entre otras ramas del conocimiento). En el presente trabajo de investigación, se centró el interés en el proceso de aprendizaje de los números positivos y negativos mediante el empleo de determinados instrumentos.

Lo que se conoce como “instrumento material”, son todas aquéllas herramientas de las que se puede echar mano para la consecución de un objetivo. Entre estas, encontramos materiales manipulables o virtuales (que no por ello dejan de ser manipulables). Son empleados por los estudiantes o por el profesor, de manera individual o en grupos, según como las actividades estén diseñadas y el fin que persigan, de este modo, en la presente investigación, se propuso el empleo de dos tipos de instrumentos: uno, las imágenes que se emplearon para representar corporalmente el conjunto de los números positivos y negativos.

Dos, un software diseñado para trabajar temas algebraicos, específicamente para la suma y resta de este mismo grupo de números, el cual fue manipulado por los propios estudiantes.

Con la mediación de los instrumentos, se espera que el estudiante logre acceder a la interiorización de un nuevo conocimiento. Por ejemplo, puede llegar al resultado de una operación, si previamente ha comprendido qué se debe hacer. Retoma los conocimientos con los que cuenta al momento de iniciar la resolución de una actividad. Posteriormente, si no es capaz de lograr resolverla por sí mismo, puede recurrir al apoyo del profesor, de un compañero que ya ha entendido lo que se debe de hacer, o apoyarse en el instrumento para resolver la actividad. Cualquiera que sea el caso, tal y como lo propone Vigotsky, habrá un mediador que le facilitará la tarea.

De esta forma, cerramos el presente apartado indicando la concordancia entre la teoría sociocultural de Vigotsky y el proceso de adquisición de nociones algebraicas, particularmente el conjunto de números con signo, así como la suma y resta de este tipo de números.

1.3 TEORÍA DE LA ACTIVIDAD

Lev S. Vigotsky desarrolló el paradigma sociocultural en el campo de la Psicología. Junto con dos de sus principales colaboradores (Luria y Leontiev), ponen en dicho paradigma un marcado énfasis en los estudios de la mediación que señalan el papel y la importancia de los instrumentos en el desarrollo del pensamiento del estudiante. La teoría vigotskyana ofrece un alto grado de generalidad respecto al uso de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje. Sus trabajos han influenciado a investigadores recientes a retomar la teoría de los instrumentos psicológicos como la base de una teoría educativa actual. Sentó las bases para el florecimiento de otras propuestas teóricas, enfocadas a la instrumentación en el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

La teoría desarrollada propiamente por Luria y Leontiev (retomando algunos conceptos vigotskyanos), a la que denominaron “*Teoría de la Actividad*”, considera como elemento primordial el nivel de desarrollo psíquico de los niños (Petrovsky, 1985) a partir de su experiencia cultural (Vigotsky, 1978) aunado a su nivel de interiorización y conformación de sus acciones mentales (Ortíz y Chávez, 2008, p. 2).

Los trabajos de Vigotsky, en sí mismos, no forman parte de la teoría de la actividad. Sin embargo, fue él quien amalgamó lo social con lo individual y determinó que para la comprensión del fenómeno psíquico, era necesario dirigirse a la vida del hombre en sociedad. Uno de los principales intereses de la llamada “escuela de Moscú” fue reconocer la influencia que ejerce sobre el sujeto la utilización de instrumentos o artefactos –como los llamó el propio Vigotsky-, sean éstos de origen humano (psicológicos) o materiales. Según Vigotsky (en Ballesteros, 2007), los instrumentos intervienen directamente en el desarrollo de las

funciones psicológicas superiores. La mediación de un instrumento en el desarrollo del pensamiento del estudiante puede abarcarse desde esta perspectiva teórica.

Habría que destacar que, pese a las limitantes de los trabajos de Vigotsky, los principios que empezó a trazar resultaron de gran importancia para la conformación de la teoría de la actividad y su posterior empleo psicopedagógico (Leontiev, 2005); siendo entonces Rubinstein (citado por Talízina, 2002) quien propuso examinar la actividad como objeto de estudio de la psicología.

Considerando la Teoría de la actividad como una aplicación al campo de la educación, el objeto de una actividad es el aprendizaje de un conocimiento dado o el desarrollo de una capacidad determinada; es decir, el motivo por el que se desarrolla tal o cual actividad en el salón de clases, es la adquisición por parte de los estudiantes de un conocimiento o esa habilidad.

El modelo representado en la imagen 4 también muestra que cada entidad media todas las relaciones descritas en el modelo. Los artefactos utilizados en la actividad no sólo median la relación entre el Sujeto y el objeto, sino también entre el sujeto y la comunidad y entre la comunidad y el objeto. Por otra parte, las entidades de mediación no son mutuamente independientes, sino más bien ejercen influencia una sobre otra. Por ejemplo, la introducción de un nuevo artefacto en una actividad influye tanto en las normas que regulan la interacción de los participantes en la actividad como en los roles que los participantes pueden asumir.

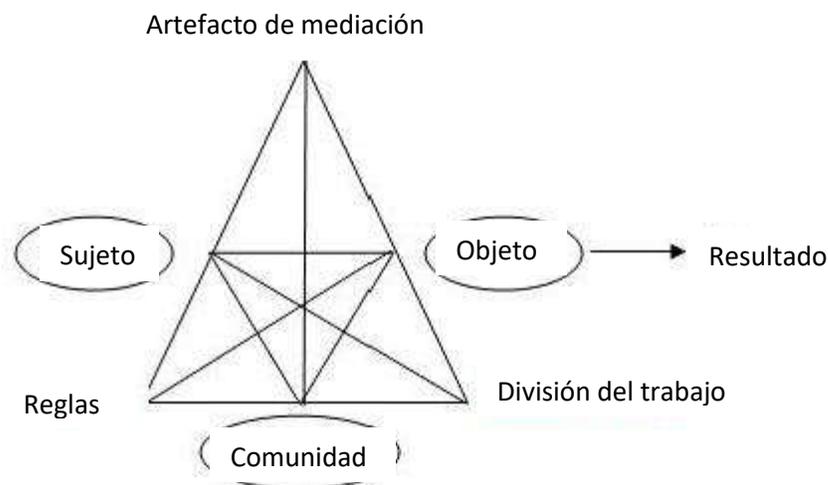


Imagen 4. Modelo de la segunda generación de la teoría de la actividad, según Engeström

Para poder entender a qué se refieren cada uno de los elementos que conforman el modelo, habrá que considerar los siguientes conceptos:

- *La comunidad es el conjunto de individuos que van a realizar una experiencia colaborativa. Estos individuos se organizan en subgrupos a partir del concepto de rol, descrito como otra dimensión de la actividad.*
- *La división del trabajo aglutina la descripción del conjunto de tareas que se van a llevar a cabo y la organización en roles de la comunidad. Además, si para cada rol se realizan tareas diferentes, también se especifica aquí la división del trabajo requerida.*
- *Las normas de la comunidad definen la forma en que trabaja el grupo y cómo se tienen que concretar los acuerdos.*
- *Las herramientas constituyen la manera de expresar todo el material que se proporciona al grupo, tanto textual, como los medios que permiten llevar a cabo las tareas, la comunicación, la compartición de información, la consecución de acuerdos, etc.*
- *El objetivo de la experiencia colaborativa se indica en términos de objetivos instruccionales y/o en términos del tipo de destrezas o habilidades que se pretenden conseguir junto con una descripción clara de qué se pretende con la actividad.*
- *El resultado, por último, se declara el resultado esperado (y su tipo, si procede). (Barros, Vélez y Verdejo. 2004, p. 69).*

Este modelo nos permite analizar el papel desempeñado por el instrumento de mediación durante las actividades en el aula. En el caso del trabajo de campo llevado a cabo en el desarrollo de las actividades de la presente investigación, los instrumentos fueron las imágenes de zombis y humanos, y ALNUSET. En particular el componente de la línea algebraica (LA). Este componente y su integración a las acciones del estudiante asocian la

actividad al objeto. El siguiente modelo (empleado por G. P. Chiappini, B. Pedemonte, E. Robotti, F. Vannucci, 2013) muestra gráficamente la relación existente entre la solución a lápiz y papel de una operación, y la solución mediante el manipulador algebraico de ALNUSET.

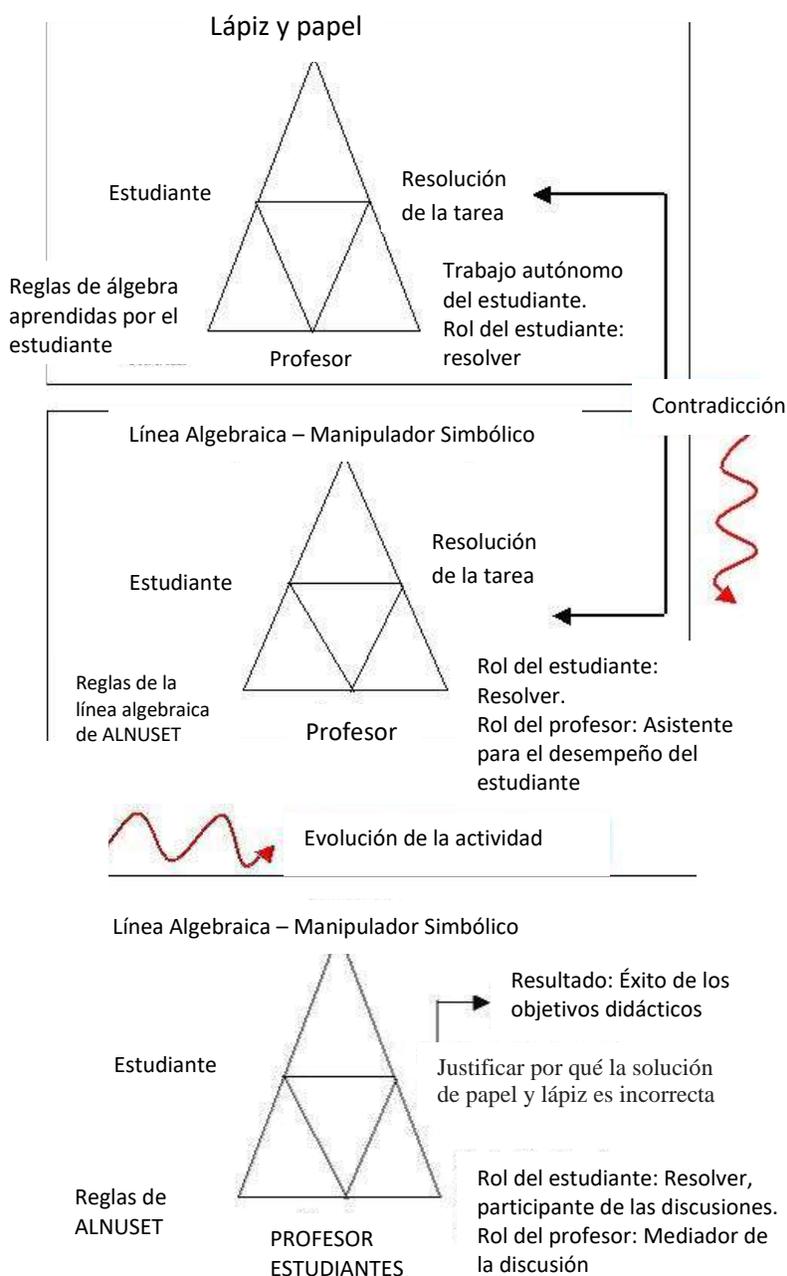


Imagen 5. Modelo comparativo de la solución con lápiz y papel de una actividad algebraica, y la solución empleando ALNUSET, donde describe, además, el rol que llevan alumnos y profesores en ambos casos

La Teoría de la Actividad considera el nivel de desarrollo psíquico de los niños partiendo de su experiencia cultural, aunado a su nivel de interiorización y a la conformación de sus acciones mentales. La propuesta de trabajar por etapas demuestra el vínculo entre la actividad externa (social) y la actividad interna (cognitiva) del estudiante. Se reconoce la conformación del plano interno como la transformación de objetos materiales de la actividad externa hacia la forma interna. Destaca el papel del profesor como orientador del estudiante en el proceso de formación. Ya no es aquél docente encargado de vaciar toda la información a los estudiantes y que esperaba respuestas tal como las había explicado. Ahora, el papel del alumno es más dinámico, de mayor comunicación con sus pares y con un mayor dominio de la tecnología digital, lo que lo puede hacer más crítico, reflexivo e independiente.

De acuerdo con Angelini (2012, pp. 4-5), el propósito del maestro que utiliza un artefacto, concreto o digital, es la *“construcción de una relación entre los dos sistemas de signos producidos, que realiza la evolución de las señales situadas en los signos matemáticos”*. Este desarrollo se favorece por el maestro principalmente a través de la discusión en clase. El maestro entonces asume el papel de mediador cultural que utiliza el artefacto como una herramienta de mediación semiótica.

Por lo tanto, en esta teoría, el maestro tiene la tarea de guiar la evolución de los signos de artefactos en signos matemáticos, utilizando en la discusión, una tercera categoría de signos, definido de pivote. Este último puede referirse tanto a la actividad con el artefacto como al conocimiento matemático. Por lo tanto, los alumnos poseen la polisemia (pluralidad de significados en una misma palabra) *“que caracteriza el artefacto y se puede utilizar como un medio para promover la evolución de signos de artefactos en los signos matemáticos. Estas son a menudo señales que se producen con el uso de términos híbridos, que*

representan una ruptura con el artefacto y la tarea. Las actividades de producción de signos mediante el uso de un artefacto y de la evolución social llevada a cabo por el profesor con los signos y significados culturalmente compartidos, se disponen en secuencias que los autores definen como ciclos didácticos”. (Angelini. 2012, pp. 4-5)

1.4. LA TEORÍA DE LA REPRESENTACIÓN Y CARACTERÍSTICAS DEL JUEGO EN EL APRENDIZAJE

Bruner ofrece una explicación detallada sobre las características que tiene el juego para los niños preescolares. En el presente trabajo de investigación se considera que este sustento teórico se puede aplicar a estudiantes de primaria y secundaria. Este autor afirma que la relación que hay entre el juego, el lenguaje y el pensamiento infantil puede ayudar a desarrollar sus potencialidades, y a vivir de un modo más pleno.

De acuerdo con Bruner (1984, Pp. 211-212), las funciones fundamentales del juego son:

1.- Reduce las consecuencias frustrantes del niño. Le sirve de medio para poder explorar, pues se trata de una actividad para sí mismo, no para los otros.

2.- Existe una ruptura del vínculo entre los medios y los fines, ya que se dan cambios o modificaciones entre éstos muy a menudo, como consecuencia de la búsqueda de la satisfacción que proporciona el juego. Además, el juego no es sólo un medio para la exploración, sino que lo es también para la innovación. Se ponen en juego las capacidades combinatorias del niño, que más adelante le serán de utilidad para el aprendizaje del lenguaje y de otros elementos que irán surgiendo con su desarrollo.

3.- El juego no sucede al azar o por casualidad. Se desarrolla dentro de un “escenario” propiciado por los niños. Es una forma de “idealización” de la vida.

4.- Se dice que el sujeto es una proyección de su mundo interior y se contrapone al aprendizaje. En el juego se interioriza el mundo externo hasta llegar a hacerlo parte de uno mismo.

5.- Finalmente, algo que es absolutamente fundamental, es que el juego proporciona placer, incluso cuando se superan los obstáculos que se le van presentando al niño en el propio juego, ya sea por las características del mismo, o como un revulsivo al propio juego para que el niño le encuentre más interés y no se aburra.

Por la experiencia personal lograda del trabajo con estudiantes de secundaria, se ha identificado que ellos también caen fácilmente en frustraciones cuando no obtienen las respuestas que el profesor (y el propio estudiante) esperan. También se ha notado que al abordar diferentes temas de una manera lúdica, se despierta el interés del estudiante, se atreve a participar, a involucrarse, a interactuar sin el temor de ser señalado cuando no da con los resultados esperados.

Los niños idealizan, imaginan, interiorizan los escenarios donde se desarrollan las actividades y se apropian de él. Es una representación de su propio mundo en el cual las acciones que se llevan a cabo tienen un fin específico, no siempre indicado expresamente. Cada vez que se topan con una adaptación en las reglas del juego, o cuando logran superar un problema particularmente difícil, les motiva a seguir adelante.

Las características y ventajas que Bruner ve en el juego, y que le permiten al estudiante alcanzar ese éxito en el desarrollo de las actividades, o solución de problemas, son:

- El uso que se le da. Es frecuente que haya otros fines detrás del propio juego;
- El juego es un agente de socialización de forma espontánea;
- Tiene un valor terapéutico;
- Lo ve como un medio para poder mejorar la inteligencia;

- No se derivan consecuencias graves de los errores que se puedan cometer, pues no se está evaluando o calificando una respuesta específica;

Pero llevar a cabo una actividad lúdica no es cualquier cosa. Antes que nada deben planearse muy bien las actividades, y el fin que se persigue con éstas. Relajar demasiado el ambiente puede resultar contraproducente si los alumnos no reconocen límites establecidos. Deberá procurarse que el juego motive al alumno en su concentración, y tener disponibles los materiales, tanto concretos como virtuales y de cualquier otro tipo, para que se generen ambientes de aprendizaje. *“Para que el estudiante logre fomentar y mejore su concentración, habrá que buscar la manera de mejorar los materiales y la atmósfera del juego”*. (Bruner, 1986. p. 218)

Hay que reconocer que el juego no es exclusivamente para los niños. Es más, ni siquiera es limitativo a ellos. El juego se presenta a cualquier edad, en cualquier momento y con diferentes intencionalidades. Bruner (1986, p. 219) al respecto, dice que *“el juego no es sólo juego infantil. Jugar, para el niño y para el adulto..., es una forma de utilizar la mente e, incluso mejor, una actitud sobre cómo utilizar la mente”*.

Bruner ve en la relación entre el juego, lenguaje y pensamiento el modo en cómo la organización del juego en los grupos infantiles les ayuda a desarrollar sus potencialidades y a vivir en un mundo más pleno su vida.

Mediante observaciones, audio grabaciones y otros medios de recopilación de datos, se analizaron los resultados obtenidos en algunos experimentos llevados a cabo entre el propio Bruner, junto con K. Sylva y P. Génova, entre ellos el siguiente:

Para resolver un problema donde los niños debían alcanzar una tiza de color que estaba dentro de un recipiente transparente, se dividió al grupo de estudio en tres. El primero de ellos, al que llamaron ‘verdaderos jugadores’, se les permitió un período de juego antes de iniciar con la tarea, en el que tuvieron la oportunidad de manipular las varas, las cuerdas o las pinzas que iban a ser utilizadas del modo que quisieran. Al segundo grupo se le proporcionó una pequeña demostración pedagógica, explicándoles que se podían unir dos varas mediante una cuerda o una pinza. El tercer grupo se familiarizó sencillamente con el material con el que iban a jugar después, y se les proporcionó alguna pequeña demostración de cómo era dicho material. (Bruner, 1986, pp. 213-215)

Dentro de los resultados que se obtuvieron, identificaron que el grupo de los “verdaderos jugadores” solucionó mejor el problema con respecto a los otros dos grupos. Se reconoce la ventaja de conocer y manipular con antelación el material empleado. Buscan otras opciones si no obtienen resultados pronto, pues ya conocen el material y saben lo que pueden hacer con él. Además, muestran mayor apertura a las opiniones y sugerencias que se les brindan. Más que como una situación frustrante, vieron el problema como una “invitación” a jugar. En cambio, los otros dos grupos mostraron mayor dificultad al resolver el problema, pues no tuvieron ese acercamiento ni reconocimiento del material que tuvo el primer equipo. De hecho, el tercer grupo de alumnos, a quienes sólo conocieron el material momentos antes de que se les planteara el problema, fueron quienes mostraron una mayor dificultad a la resolución misma, quienes no aceptaron tan fácilmente propuestas sugeridas y quienes abandonaron rápido el intento por darle solución.

La dificultad por resolver el problema fue gradual, del primer equipo al tercero, lo que refuerza la idea de que entre mayor sea el conocimiento, reconocimiento y manipulación

de los instrumentos a emplear, menor será la posibilidad de abandono o deserción de las actividades por parte de los alumnos.

Bruner es retomado en un artículo de Angelini (2012), en el que le dan un valor sobresaliente al análisis de las respuestas escritas por los estudiantes en las hojas de trabajo. En este trabajo de investigación, una manera de recopilar información de campo ha sido mediante los resultados obtenidos y las anotaciones hechas por los estudiantes en sus hojas de respuesta.

Bruner (1966, p. 59) habla de tres formas de representación por las que pasa un aprendizaje, que sirven como referencia para las actividades que se llevaron a cabo con los estudiantes en la fase experimental del presente trabajo. Estas son:

- *Enactiva.- Aprendizaje mediante una acción determinada, sin palabras. Mediante un conjunto de acciones apropiadas para alcanzar cierto resultado. (representación prescriptiva).*
- *Icónica.- Representación, tanto por medios perceptibles, como una imagen. Mediante una serie de imágenes o gráficas sumarias que representan un concepto sin definirlo cabalmente.*
- *Simbólica.- Se da a través de un esquema abstracto que puede ser el lenguaje o cualquier otro sistema simbólico estructurado. Es la traducción de la experiencia en palabras que permiten otro tipo de transformaciones más complejas, mediante una serie de proposiciones lógicas o simbólicas derivadas de un sistema simbólico gobernado por reglas o leyes para formar y transformar las proposiciones.*

Las tres formas de representación aquí mencionadas, se reconocieron en el análisis de las sesiones trabajadas en la fase experimental.

1.5. LA PERSPECTIVA SEMIÓTICA Y LA GESTICULACIÓN COMO INDICIOS DE APRENDIZAJE

Cuando se trata de comprender el proceso que se lleva a cabo en la resolución de algún problema, o se siguen indicaciones escritas para lograr el entendimiento de un tema, generalmente se expresan ciertos gestos que indican o la comprensión de dicho proceso, o la duda en cuanto al desarrollo del mismo. La importancia que representa en un trabajo de investigación identificar y reconocer las expresiones que hacen los sujetos estudiados ha llevado a grupos de investigadores a analizarlos y establecer una serie de características, en las cuales pone de manifiesto la importancia de saber observar los gestos, ritmo de voz, y otros signos corporales que presentan los sujetos en observación cuando van construyendo su propio conocimiento.

Para tratar de entender la influencia semiótica de los artefactos, y de la socialización en el proceso de aprendizaje, Radford (2006, p. 7) identifica tres tradiciones semióticas claramente diferenciadas: “(1) *La tradición Saussureana, iniciada por el suizo Ferdinand de Saussure (1857-1913) en una serie de cursos dictados entre 1907 y 1911, tradición que emplea el término semiología;* (2) *la tradición Peirceana, iniciada por el estadounidense Charles Sanders Peirce (1839-1914) quien acuñó el término semiótica;* (3); *la Vygotskiana, iniciada por el psicólogo ruso Lev S. Vygotski (1896-1934)”*.

Los antecedentes teóricos mencionados, nos ofrecen una dirección hacia la concepción de semiótica que aterriza en los análisis de las prácticas llevadas a cabo por Koukkoufis y Williams, quienes según Radford (2006, p. 15) “*aplicaron ciertos conceptos de la teoría de la objetivación para estudiar la manera en que los alumnos generalizan, en el aprendizaje de la aritmética, ciertas relaciones numéricas. Los autores examinan en*

detalle el papel que desempeña el ábaco como artefacto de mediación y efectúan un análisis fino del papel del lenguaje y los gestos en procesos de reificación (en el sentido de Sfard, 1994), procesos que preparan el camino a conceptualizaciones numéricas claves en las operaciones con números enteros”.

“Ha habido una toma de conciencia progresiva del hecho de que, dada la generalidad de los objetos matemáticos, la actividad matemática es, esencialmente, una actividad simbólica”, Radford (2006, p. 7).

Radford (2006, p. 2) se refiere a que *“Es evidente que el pensamiento algebraico es una forma particular de reflexión matemática. Pero, ¿qué es lo que hace al pensamiento algebraico distintivo? Durante el desarrollo de una de sus investigaciones, llega a la caracterización de su trabajo mediante tres elementos interrelacionados:*

- La primera de ellas se refiere a una sensación de indeterminación que es propio de los objetos algebraicos básicos como incógnitas, variables y parámetros (...)*
- En segundo lugar, los objetos indeterminados se manejan analíticamente (...)*
- En tercer lugar, que lo que hace pensar de forma algebraica es también el modo simbólico y peculiar que tiene de designar a sus objetos (...) Estos signos pueden ser letras, pero no necesariamente. El uso de las letras no equivale a hacer álgebra).*

Este autor también afirma que el álgebra no se reduce al empleo de literales exclusivamente. Puede practicarse álgebra, al menos en su introducción con el empleo de otros sistemas semióticos por ejemplo, fichas de colores y dibujos geométricos.

De una concepción de signos, pueden investigarse el empleo de los mismos y los procesos de producción de significados que estos presentan en el álgebra de los estudiantes.

El interés suscitado en los años 90's por la comprensión de la comunicación en el salón de clase evidenció la importancia que tiene comprender la naturaleza del discurso matemático. La semiótica aparece como la teoría apropiada para intentar dar cuenta de la complejidad discursiva.

Cuando los estudiantes registran en sus hojas de trabajo, o en la interacción con el software en el equipo de cómputo, o al comunicar con su compañero de trabajo las estrategias que ha llevado a cabo para llegar al resultado de una suma o una resta planteada, es un acto perceptual que ha sido denominado por Radford (2006,) como "*procesos de objetivación*". Las actividades multisemióticas que ha ido realizando el estudiante mediante palabras habladas, gestos, dibujos, fórmulas, etc. son referidas como parte de ese proceso de objetivación, y han sido definidos, también por Radford, como "*medios de objetivación*". El conocimiento esperado empieza a surgir progresivamente cuando el estudiante ha objetivado los procesos mediante la instrumentación o la socialización de sus aprendizajes.

La semiótica parece ofrecer conceptos capaces de ayudar al didáctico en su tarea de entender el papel cognitivo que desempeñan los artefactos, ya que el uso de artefactos tecnológicos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es cada vez mayor.

En un ejemplo de objetivación mediante una estructura matemática, Radford nos indica que el sujeto en cuestión recurrió a dos medios semióticos de objetivación: palabras y gestos. El grupo de investigadores reconoció un patrón en la repetición rítmica de gestos, lo

cual permitió al sujeto investigado expresar la idea en algo general, “*algo que sigue más y más en el espacio y en el tiempo*” (Radford, 2006. P. 7).

Se puede tratar con más de un sistema semiótico. Radford expresa que “*Un sistema semiótico nos proporciona maneras específicas para significar o decir ciertas cosas, mientras que otro sistema semiótico nos ofrece otras formas de significación.*”. Es decir, no es la misma representación o significación la que se da con una expresión algebraica que con la gráfica que le corresponde ni la que se da en una tabulación. Así mismo, la representación de una operación algebraica como lo es una suma o resta de números con signo, no es igual al resultado que se obtiene de ellas. Es decir, la suma de $4 + (-7)$, aunque su resultado es (-3) y su ubicación sobre la recta numérica tanto de los sumandos como de la suma, semióticamente son tres representaciones distintas. Son sistemas independientes, y al mismo tiempo relacionados, pero con una información particular de cada uno.

Toda discusión sobre la representación tiene que distinguir entre dos entidades: el mundo de representación y el mundo representado.

Siguiendo a Radford (2006. p. 6), él nos dice que “*la objetivación del conocimiento es una construcción teórica para dar cuenta de la forma en que los estudiantes se involucran con algo con el fin de observar y hacer sentido de ella*”. Las aulas son vistas como zonas de interacción de actividades mediadas. Estas actividades refieren no sólo a los objetos del conocimiento, sino también a otros estudiantes a través de acciones comunicativas en sus diferentes modalidades (presenciales o a distancia).

Una condición que debemos esclarecer en el trabajo con los alumnos dentro el salón de clases, es que establezcamos cómo vamos a interpretar el uso de los términos a emplear,

pues mientras para unos un término tiene un significado, para otros ese mismo término tiene otra interpretación. Esta especificación no solo va en el uso de términos, sino al momento de emplear cualquier elemento de significación, sea este material o no. Radford explica esto cuando dice que *“el hecho de que los artefactos y los signos son portadores de convenciones y formas culturales de significación, hacen de la semiótica un campo muy bien situado para entender las relaciones entre los signos a través de los cuales piensan los individuos y el contexto cultural”*.

En otro ejemplo de un estudio llevado a cabo, los investigadores reconocen que los gestos de la persona estudiada acompañaron la estructura de su oración. Mientras la persona hablaba, los movimientos de sus manos, sus brazos, la coordinación con los gestos y las palabras le permitieron trasladarse de un campo particular a uno general.

El acompañamiento del habla con la gesticulación, permite al estudiante perfeccionar sus conocimientos de generalización, pues *“estos gestos significaban las filas que no se podían ver. Los gestos ayudaron a los estudiantes a visualizar (Presmeg, 2006, en Radford, 2006, p. 15) y por este medio llegaron a llenar el vacío dejado por la imposible percepción directa. En términos generales, los gestos no se limitan a llevar a cabo las intenciones o información; son elementos clave del proceso de objetivación del conocimiento”*.

En el desarrollo de las actividades, se reconoce la importancia de la comunicación entre los miembros de un equipo de trabajo, y dentro de ésta, la simbología que se desprende en las intervenciones de los estudiantes (ritmo de voz, gestos faciales y corporales). Lograr identificar lo que dichos gestos involucran (como una visualización de elementos) sería práctico de trabajar si se construyeran todos los arreglos esperados. En el presente trabajo, la

comunicación verbal y gesticular entre los estudiantes se hizo presente principalmente en el trabajo con el software. Durante la representación corporal se presentaron otro tipo de elementos de comunicación, como la corporal en sí misma, y la visualización de elementos, al reconocer las imágenes mostradas por unos alumnos al resto del grupo. Por lo tanto, podemos afirmar que los arreglos mencionados anteriormente sí se hizo presente en el desarrollo de las actividades.

1.6 APRENDIZAJE DE NOCIONES ALGEBRAICAS USANDO ALNUSET

En el trabajo de investigación que se describe en el presente documento, se considera el aprendizaje de la suma y resta de los números con signo, tema que se ubica dentro de los programas de estudio de la SEP (SEP, 2011. Pp 34, 35) en el primer grado, en los bloques IV y V. Pedemonte y Chiappini (2008) mencionan que de acuerdo con los resultados de numerosas investigaciones, varios de los problemas que se han identificado respecto al aprendizaje del Álgebra, tienen su origen en el paso de la Aritmética al Álgebra misma. En esta transición, los estudiantes deben superar obstáculos que han sido relacionados históricamente con los que enfrentaron los matemáticos durante el siglo XVIII y la primera mitad del siglo XIX: el desarrollo del Álgebra simbólica.

Durante mucho tiempo se ha buscado la mejor manera de separar la Aritmética del Álgebra, ya que el campo de trabajo de la primera impide llevar a cabo operaciones tales como $a - b$, con $b > a$. Para encontrar una solución que resuelva este tipo de problemáticas, Peacock (en Chiappini, 2011) logra diferenciar entre “Algebra Aritmética” y “Algebra Simbólica”. Según Peacock, el Algebra Aritmética se distingue de la Aritmética por el uso de literales que permiten operar en valores no determinados, es decir, en cantidades cuyo valor no se ha especificado. En esta clase de Algebra, sin embargo, las operaciones aritméticas presentan las mismas limitaciones naturales como las mencionadas renglones atrás. Es decir, una expresión como $a - b$ tiene un sentido (en Aritmética) sólo para $b < a$.

Con el Álgebra Simbólica, los símbolos adquieren un significado que entra en funcionamiento, es decir, queda definido según la operación funcional (y sus propiedades).

En el Álgebra Simbólica, los símbolos (las letras) pueden representar cualquier valor. En adelante, para cuestiones de referencia del instrumento que empleamos en las sesiones con un grupo de primer grado de secundaria, asociaremos el Álgebra Aritmética con el Álgebra de las Cantidades y al Álgebra Simbólica con el Álgebra de las Operaciones. Se reconocen como *Álgebra de las cantidades* al empleo de números dentro del lenguaje algebraico. El *Álgebra de las operaciones* será aquella en la que se empleen primordialmente letras. Al distinguir entre estos dos tipos de Álgebras, se está reconociendo que se pasa de un tipo de trabajo con números naturales (propio de la Aritmética), al empleo de números con signo (lo que algunos conocen como “pre- Álgebra”).

Menghini (en Chiappini, 2011) destaca la importancia del trabajo de Peacock en la presentación de Álgebra como herramienta para interpretar cuantitativamente situaciones del mundo real. Realza la necesidad de un enfoque axiomático (basado en preguntas dirigidas) para que los alumnos asimilen e interioricen los principios de *Álgebra Aritmética* (AA) y *Álgebra Simbólica* (AS) desarrollados por Peacock. Con ello se busca que den el salto que se produce en el paso de la Aritmética al Álgebra y desarrollen el conocimiento y control de habilidades que son específicos del Álgebra simbólica. Por ejemplo, al pasar de la Aritmética al Álgebra, es importante entender que los símbolos algebraicos pueden representar no sólo los números utilizados en la Aritmética, sino también otros, tales como los números negativos. También habrá que entender que las operaciones de la Aritmética no sólo se transfieren a un nuevo sistema de signos del Álgebra, sino que su significado y ámbito operativo se podrán ampliar.

En mi experiencia personal, la enseñanza tradicional del Álgebra (el profesor explicando y el alumno siendo sólo un mero receptor) generalmente no promueve algún tipo

de desarrollo conceptual para un porcentaje significativo de estudiantes. Las causas pueden ser diferentes y muy variadas. El desarrollo esperado no se puede alcanzar mediante ejercicios mecánicos y repetitivos comunes de la didáctica tradicional, es necesario promover que los estudiantes lleven a cabo experiencias significativas de contenidos y conceptos algebraicos en un laboratorio de didáctica de las Matemáticas, ya que sólo el uso de herramientas apropiadas puede ayudar a la estructuración de ideas y conceptos. El sistema ALNUSET destaca algunas prácticas centradas en su uso que pueden facilitar el desarrollo de los dos principios propuestos por Peacock respecto al Álgebra Simbólica.

El presente trabajo de investigación busca ofrecer una opción para favorecer ese salto, de lo aritmético a lo algebraico, mediante el uso de ALNUSET. Se busca que el estudiante logre asimilar y reconocer el papel que juegan los conjuntos numéricos en la resolución de problemas y ejercicios específicos. El software que empleamos se denomina ALNUSET (*ALgebra on the NUmerical SETs*).

ALNUSET se desarrolló en el contexto de REMATH (IST- 4-26751). Proyecto de la CE y es diseñado para los estudiantes de los niveles básicos y de la escuela secundaria superior (12/13 años a 16/17). Está constituido por tres componentes integrados: el de la Línea Algebraica (L.A.), el del Manipulador Algebraico (M. A.) y el del Plano Cartesiano (P. C.). Los dos primeros componentes fueron diseñados para favorecer el desarrollo de la práctica educativa, respectivamente, del Álgebra de las cantidades y del Álgebra de las operaciones. El tercer componente ha sido desarrollado para favorecer el desarrollo del Álgebra de funciones. (Pedemonte y Chiappini, 2008, p. 3)

El objetivo principal del componente de la L.A. es proporcionar una herramienta para desarrollar el Álgebra de las cantidades, en la cual se centrará la atención de esta propuesta, y por lo que se explicarán sus características y funcionalidad. Chiappini explica que el papel demostrado por las técnicas instrumentadas en los tres entornos de la estructura de Alnuset

(Línea Algebraica, Manipulador Algebraico y Plano Cartesiano) abren un nuevo espacio fenomenológico donde los objetos algebraicos (puntos, literales y operaciones), las relaciones y fenómenos se materializan por medio de eventos representativos que se incluyen en la percepción visual, espacial y motora de los estudiantes y de los maestros (el arrastre de puntos, la asignación de valores numéricos y el despeje de incógnitas). Además, se pone de manifiesto que el espacio fenomenológico determinado por el uso de la técnica instrumentada de Alnuset puede convertirse en una cuestión de investigación.

Pedemonte y Chiappini (2008) sostienen que *“al operar con expresiones numéricas, siempre es posible verificar que dos diferentes expresiones que indican dos secuencias diferentes de las operaciones pueden ser equivalentes mediante la observación de que produzcan el mismo resultado que denotan”*. En este trabajo, cuando se trabajaron las operaciones de suma o resta sobre el ambiente de la L.A., se verificaron que las dos expresiones (la operación misma y el resultado obtenido) fueran expresiones equivalentes, es decir, dos formas de representar un mismo número. Por ejemplo, si escribimos la suma $2 + 4$, sabemos que el resultado es 6. Ambas expresiones representan al mismo número, quieren decir lo mismo, sólo que de diferente forma. De este modo podemos afirmar que son dos expresiones equivalentes. En la L.A. dos expresiones son equivalentes cuando son contenidas en el mismo post-it (una etiqueta que aparece en la pantalla y que nos indica los números con los cuales se está trabajando, así como la operación que están operando entre ellos y el resultado de dicha operación) asociado a un punto, independientemente de los valores de los sumandos de los que dependen (...) es decir, se refiere a un mismo punto en la L.A. que está contenido en el mismo post-it (...).

El trabajo que Peacock ha desempeñado un papel crucial en el desarrollo conceptual de los estudiantes. Ellos se enfrentan a dificultades para extender la noción de la resta hasta los números negativos, lo cual refleja las dificultades que han caracterizado a la conceptualización de estos números en el plano histórico. De hecho, muchos estudiantes muestran dificultades para dar significado y utilidad al signo "-" que se coloca antes de un número, como en -3 para distinguir el significado del opuesto (o antes de una letra, tal como $-a$). Así como en el $2 - 5$, para comprender el significado de la operación. No es fácil ayudar a superar estas dificultades. A continuación pondremos de relieve el papel de la mediación facilitada por la L.A. de Alnuset en el desarrollo de estos significados específicos para el signo "-".

La L.A. se basa en la recta numérica (una representación construida por matemáticos). Explora las propiedades cuantitativas y las características visuales de la recta numérica. La transformación de la recta numérica en la L.A. es posible gracias al aprovechamiento de la tecnología digital, que ha permitido caracterizar la recta numérica con una nueva dimensión operativa y representativa. (Fig. 6).

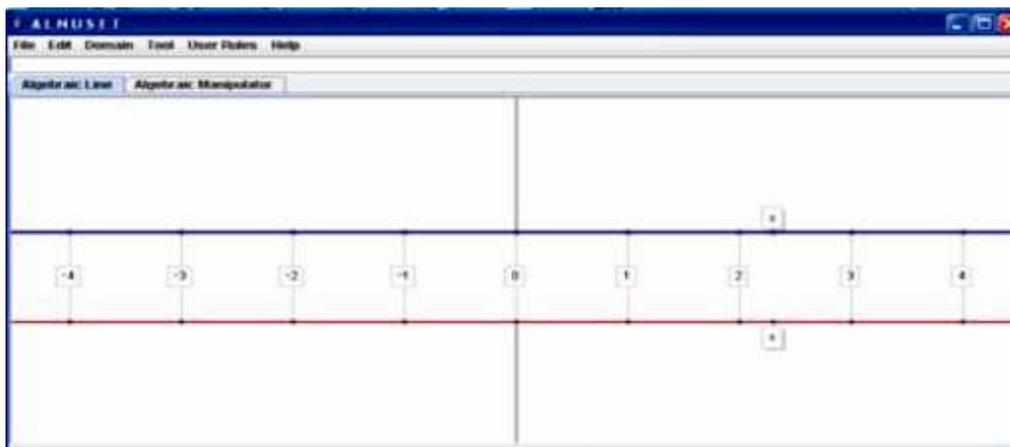


Imagen 6. Representación de la L.A. de ALNUSET.

Como se puede observar en la imagen, aparecen dos líneas rectas horizontales paralelas. La de arriba es de color azul, y la de abajo es de color rojo. Su numeración obedece al orden en que se representa la recta numérica. También se observa otra recta perpendicular a las anteriores (sin numeración), que pasa por el número cero.

Cada expresión puede escribirse por editores específicos (lineales o bidimensionales) o puede ser construido a través de un editor gráfico basado en tres modelos de operaciones (suma/resta, multiplicación/división y potencia entero/racional). En la presente propuesta se empleó el editor de suma/resta. La expresión escrita se asocia a un punto en la L.A. que indica el resultado de las operaciones realizadas en secuencia. Al seleccionar el editor suma/resta, se presentan en el área de trabajo tres puntos verdes, cada uno con una post-it o etiqueta. Dos de esos puntos aparecen sobre la recta azul, y el tercero en la recta roja. El primer punto verde (a la izquierda) sobre la línea azul representa al primero de los sumandos que vamos a introducir. El punto sobre la línea roja será el que corresponde al segundo sumando. El resultado aparecerá sobre el post-it asociado al segundo punto (de izquierda a derecha) sobre la línea azul. El modo en que desplazamos los puntos se abordará más adelante.

Las características operativas y representativas de la L.A. permiten a los estudiantes, a través de su experiencia visual y espacial, manejar lo siguiente:

- Asociar los puntos móviles correspondientes a los sumandos con los que vamos a trabajar.
- Arrastrar los puntos móviles representativos a los sumandos y el movimiento de los puntos de las expresiones con ellos.
- La exploración y la identificación del conjunto de los números con los cuales trabajamos.

Las características generales del componente de la L.A. de ALNUSET muestran como la tecnología digital ha sido explotada para darse cuenta que un artefacto puede apoyar la

integración entre el Álgebra de las cantidades y el Álgebra de operaciones. Dichas características se pueden utilizar para transformar la práctica de la enseñanza actual del pre-Álgebra con el fin de mejorar el aprendizaje en este ámbito, no limitándose a la suma y resta (como es el caso de la presente investigación), sino además, ampliando el espectro operativo a las otras operaciones básicas de la Aritmética (multiplicación, división, potencias y raíces), lo que representaría un alto impacto en los estudiantes.

Angelini ha basado parte de sus trabajos (Angelini, 2012) en dos perspectivas teóricas: la teoría de la “*mediación semiótica*” y el concepto de “*narrativa*” de Jerome Bruner. Ambos permiten evaluar el potencial semiótico del software educativo en relación con el problema didáctico de referencia desde dos puntos de vista complementarios, pues mientras uno es empleado como respaldo teórico para el uso de instrumentos tecnológicos interactivos, el otro permite un análisis posterior a las clases en función a las respuestas escritas de los estudiantes en las hojas de trabajo.

En la actividad con la L.A. pueden surgir algunos fenómenos que buscan favorecer el desarrollo de ciertas capacidades (como la observación, el desarrollo motriz en el estudiante, la visualización del desarrollo de la actividad, entre otras).

El primer fenómeno se refiere a la representación de las expresiones de la L.A. Cada punto de la línea es caracterizado por un post-it que contiene los números que indican el valor de dicho punto. El arrastre del punto móvil asociado a un valor numérico cualquiera puede ser una forma útil de experimentar lo que los números indican (positivo o negativo, según el signo que tenga o la posición en que se encuentre, con respecto al cero en la recta numérica), mientras que otro post-it es una representación útil para explorar el valor del resultado.

En este componente, tres modelos geométricos son aprovechados para construir sumas, multiplicaciones y potencias (y sus respectivas operaciones opuestas) entre números y expresiones ya construidas en la L.A. Mediante estos modelos la operación entre dos números dados en dos puntos sobre la L.A. refleja en la construcción geométrica el punto asociado al resultado de la operación.

Cuando una expresión algebraica está construida y representada en la L.A. y no contiene variable alguna, entonces el punto asociado indica que la expresión está denotada en una forma determinada. La visión permite tener una percepción global en la relación entre los números y el evento matemático de la expresión indicada. Esto ocurre cuando los puntos móviles asociados a los sumandos y el punto móvil asociado a la operación son muy distantes en la L.A.

El ambiente de la L.A. es operativo y representativo para la construcción de expresiones Matemáticas que incluye números y letras definidas en un conjunto específico de números (enteros naturales, enteros relativos, números racionales, números racionales extendidos para las potencias de los racionales) y para la representación de expresiones literales como puntos móviles en la línea. La L.A. ofrece la oportunidad de visualizar los números asociados a los puntos móviles en la línea.

Toda nueva suma construida se asocia con los puntos de los sumandos en la L.A., e indican el resultado de las operaciones que se desarrollaron en secuencia. La L.A. está basada en una representación incorporada por matemáticos bajo cientos de previsiones y es distinta a la recta numérica. Es decir, la naturaleza de la L.A. es el Álgebra, así como la de la recta numérica es la Aritmética. Esta naturaleza algebraica está dada por características operativas y representativas. Por ejemplo, la L.A. es apta para: manejar puntos móviles, variables

algebraicas, manejar la construcción de expresiones literales que incluyen variables y su representación como puntos en la línea, manejar el arrastre de puntos móviles correspondientes a las variables algebraicas y el movimiento de los puntos de expresiones que incluyen esas variables.

Todas estas características son posibles únicamente mediante la tecnología digital. La L.A. puede subsistir únicamente como un artefacto digital.

Se trata de ver si estos instrumentos pueden ser usados para orientar el concepto de número negativo, la suma y resta de éstos y su solución. Para ello se han llevado a cabo actividades educativas de aprendizaje en algunas clases del primer año de la escuela secundaria.

1.7 GESTIÓN PARA EL DESARROLLO DE HABILIDADES DIGITALES

En el año 2011, se presenta en México una reforma educativa, la Reforma Integral de la Educación Básica (RIEB), que trae consigo, entre otros propósitos, un intento por el cual el docente cambie el modo de dar sus clases, y en el que las Tecnologías de la Información y de la Comunicación (TIC) juegan un papel destacado.

Dicha Reforma busca generar estudiantes críticos, autónomos, con acceso a las TIC, y que sepan responder ante situaciones específicas poniendo en juego los conocimientos adquiridos dentro y fuera de la escuela.

Desde el sexenio 2000-2006 empezaron a forjarse las bases para entrar de lleno al uso de las (TIC) en las escuelas primarias y secundarias públicas del país. El gobierno federal instaló equipos de multimedia conocidos como *Enciclomedia*, en grupos de quinto y sexto grados de primaria, así como en los grupos de primer grado de secundaria. Estos equipos constaban de una computadora precargada con materiales digitales diversos y novedosos, un pizarrón interactivo, un cañón de video proyección y una impresora. También se esperaba que tuvieran conexión a internet. El objetivo fue que este equipamiento se empleara en las clases de las diferentes disciplinas del conocimiento con los alumnos. La intención sin duda era buena, pues se estaba en una etapa de transición en muchos sentidos y los profesores debían estar a la vanguardia. Si ha sido aprovechado o no por los docentes en las escuelas, es una cuestión aparte.

La RIEB es un proceso que se ha ido consolidando con el pasar de los años. Entre las tareas implantadas destacan: la articulación paulatina de los libros de texto con los programas de estudio (en la modalidades de secundaria general o técnica públicas no existe un libro de

texto “oficial”. Los libros que se utilizan son seleccionados al interior del plantel por los profesores y/o directivos de cada escuela), el desarrollo de materiales complementarios, el uso de las (TIC) para el desarrollo de portales educativos y la generación de procesos de alta especialización docente.

La generación de ambientes de aprendizaje debe tomar en cuenta las TIC, las cuales están en constante construcción y actualización, y amplían el entorno en el que los alumnos aprenden. En un momento determinado del desarrollo escolar, el docente amplió el espacio áulico al plantel entero, después salió y trató de relacionar las características y necesidades de la comunidad extraescolar con los contenidos escolares con la intención de que los estudiantes encontrasen en ello una motivación práctica para aprender en la escuela. Se buscaba que los aprendizajes fueran significativos para el estudiante, que tuvieran una utilidad para la propia comunidad, y para él mismo. Ahora, además de usarse el espacio del aula, la escuela y la comunidad como entornos de aprendizaje, los espacios distantes pueden ser empleados como parte del contexto de enseñanza. Esto puede hacerse gracias al uso de las tecnologías digitales y entre ellas, al internet.

Para aprovechar este potencial aún no del todo explotado, una de las iniciativas de la RIEB es la integración de aulas telemáticas, que son espacios escolares donde se emplean las TIC como mediadoras en los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Esto no quiere decir que todas las aulas de todas las escuelas estarán habilitadas con equipos de computación y acceso a internet, sino que cada plantel cuente dentro de sus instalaciones con al menos un espacio destinado para ello.

Una adecuada planificación pedagógica debe tomar en cuenta materiales audiovisuales tales como la multimedia o el internet, de tal modo que puedan articularse de manera sincronizada códigos visuales, verbales y sonoros, para generar un entorno variado y

rico de experiencias, a partir del cual los alumnos participan de su propio aprendizaje. Luis Radford ha definido lo anterior como actividades multisemióticas realizadas por el estudiante. Son referidas como parte de un proceso de objetivación, y han sido definidos, también por Radford, como “*medios de objetivación*”.

De acuerdo con Waldegg y Moreno (2004. p. 71):

Los instrumentos computacionales encarnan sistemas de representación que presentan características novedosas: son sistemas ejecutables de representación que virtualmente ejecutan funciones cognoscitivas que antes eran privativas de los seres humanos. Por ejemplo, graficar una función. Es un proceso que el estudiante ve desplegarse en la pantalla (...), sin su intervención directa. Desde luego, esto no convierte al estudiante en ‘desempleado’, puesto que ahora su trabajo consiste en interpretar matemáticamente los fenómenos nuevos que aparecen en la pantalla.

Las planificaciones de las actividades de aprendizaje deben estar bien diseñadas y dirigidas. Que involucren activamente al alumno, de tal modo que le permitan integrarse en su propio proceso de aprendizaje. En muchos casos se ha mal entendido el papel que juegan los instrumentos tecnológicos en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Cualquier software, por sí sólo, no garantiza un aprendizaje efectivo por parte de los estudiantes. Tal como sucede con otros tipos de tecnologías, debe estar bien sustentado y estructurado.

Las TIC han tenido un alto impacto en distintos ámbitos de la vida. Para aprovecharlas, se propusieron ideas, como la de una sociedad de la información. Sin embargo, organizaciones internacionales como la CEPAL y la UNESCO, han puesto el énfasis en los últimos años para transformar la sociedad de la información en una sociedad del conocimiento.

La sociedad de la información está basada en aspectos tecnológicos. Mientras que la sociedad del conocimiento comprende una globalización de las dimensiones social, ética y política más completa.

Las TIC apoyan al profesor en el desarrollo de nuevas prácticas de enseñanza que permiten a estudiantes y maestros:

- *Manifestar ideas y conceptos; discutirlos y enriquecerlos mediante las redes sociales;*
- *Acceder a programas que simulan fenómenos, permiten la modificación de variables y el establecimiento de relaciones entre ellas;*
- *Registrar y manejar grandes cantidades de datos;*
- *Diversificar las fuentes de información;*
- *Crear sus propios contenidos digitales utilizando múltiples formatos (texto, audio y video);*
- *Atender la diversidad de ritmos y estilos de aprendizaje de los alumnos. (SEP, 2011. p. 65).*

En los Programas de Estudio de la SEP (SEP 2011) se establece que para lograr lo anterior, se creó el programa “Habilidades Digitales para Todos” (HDT). Los recursos educativos que se están generando desde este programa son los siguientes:

- *Portal de aula Explora.-* Es la plataforma tecnológica utilizada por alumnos y maestros en el aula. Ofrece herramientas que permiten generar contenidos digitales, además de interactuar con los materiales educativos digitales.

De este modo se promueve en los alumnos el estudio independiente y el aprendizaje colaborativo; en tanto que a los docentes, les da la posibilidad de innovar su práctica educativa e interactuar y compartir con sus alumnos, dentro y fuera del aula.

- *Objetos de aprendizaje (ODA).-* Son materiales digitales para que alumnos y maestros se acerquen a los contenidos de los programas de estudio que promuevan la interacción y el desarrollo de las habilidades digitales, el aprendizaje continuo y logre autonomía como estudiante.
- *Aula telemática.-* Es el lugar donde se instala el equipamiento base de HDT, el hardware, el software y la conectividad del programa. El Aula telemática es el espacio escolar donde se emplean las TIC como mediadoras en los procesos de aprendizaje y enseñanza.

Existe un banco de objetos de aprendizaje propuesto por la SEP al cual puede accederse a través de la siguiente dirección electrónica: <http://www.hdt.gob.mx> (verificado en junio de 2015); o bien, en el portal de Aula Explora.

En la búsqueda de softwares que pudieran ser útiles para los objetivos del presente trabajo de investigación, entré a la dirección electrónica citada y realicé las actividades que ahí se piden. De esta práctica se hicieron las siguientes observaciones:

- La interacción a que se hace referencia no es completa. Mejor dicho, no ofrece una interacción real con el estudiante. Cuenta con actividades previamente cargadas. Sin embargo, al resolverlas no hay ningún tipo de retroalimentación por parte del software.
- Es imposible que el estudiante explore o se pasee por el entorno virtual hasta no haber terminado la actividad.
- Cuando una respuesta del estudiante es incorrecta, sólo aparece esa indicación en el momento de contabilizar el total de errores y de aciertos que se obtuvieron, pero no dice cuáles fueron ni cómo poder corregir dichos errores.
- Al reiniciar la actividad, los ejercicios son los mismos, por lo que no hay una generación de actividades nuevas cada vez. De este modo, el estudiante puede entrar al apartado de resolución de ejercicios cuantas veces quiera, cambiar las respuestas que crea que estuvieron mal, y repetir el procedimiento hasta obtener, por parte del software, el reconocimiento de haber respondido correctamente la batería propuesta pero sin la garantía de que el estudiante realmente haya aprendido algo del tema abordado.

En Sánchez, F. (2012), se encontró una alternativa para complementar el estudio de los números con signo, en la siguiente dirección electrónica:

- <http://www.rena.edu.ve/TerceraEtapa/Matematica/TEMA6/numerosNegativos.html> (verificado en junio de 2015)

Al explorar el sitio donde se encuentra la aportación de este autor, se reconocieron las siguientes características:

- Ofrece un panorama general de lo que son los números negativos, que culturas, desde cuándo y para que empezaron a emplear dichos números. Asimismo, nos muestra algunas situaciones en las que pueden emplearse los números positivos y negativos, su ubicación sobre la recta numérica, orden y comparación, y los primeros intentos de agrupación de números con signos iguales y con signos diferentes. Se apoya mucho en las situaciones de dinero y de negocios. Habla de ganancias y pérdidas, asociándolas a los signos positivo (+) y negativo (-) respectivamente.
- Las actividades propuestas para resolver por parte del estudiante, tienen una “tolerancia” de hasta tres intentos para dar con la respuesta correcta. Al tercer intento fallido, el sistema ya no permite escribir otra respuesta. Sólo aparece la sugerencia de que *vuelva a leer la información*.
- Para intentar escribir las respuestas que se piden, después del fallido tercer intento, se tiene que cargar de nuevo la página, y se tiene la oportunidad de corregir las respuestas que se tuvieron equivocadas. Similar al programa propuesto por la SEP, el estudiante puede entrar al apartado de resolución de ejercicios (aquí se encontró un apartado que dice “*interactividad*”) cuantas veces quiera, cambiar las respuestas que crea que estuvieron mal, y repetir el procedimiento hasta obtener, por parte del software, el reconocimiento de haber respondido correctamente la batería propuesta, pero sin la garantía de que el estudiante realmente haya aprendido algo del tema abordado.

Sánchez, F. (2012), también propone el sitio en línea <http://www.rena.edu.ve/TerceraEtapa/Matematica/TEMA7/sumasRestas.html> (verificado en junio de 2015), como complemento del libro supramencionado, y de las actividades realizadas en la clase. En este acceso se reconoció lo siguiente:

- Da un contexto histórico sobre como algunas culturas empezaron a ver las sumas y restas de números positivos y negativos. Sin embargo, las explicaciones en muchos casos son confusas.
- Aborda la resta como una suma, en la que el sustraendo se sustituye por su simétrico, sin alguna justificación o explicación de por medio. Les ofrece el proceso terminado. Como hubo una transformación de resta a suma, se siguen las reglas para sumar números con signo.
- Para la resolución de ejercicios, también se tienen tres oportunidades para dar con la respuesta solicitada. Las indicaciones con las que se pide resolver los ejercicios no siempre son muy claras.

A diferencia de los sitios señalados en el presente apartado, con ALNUSET el alumno tiene la posibilidad de interactuar directamente con el software. Mediante el desarrollo de las actividades, va construyendo su propio conocimiento y reconoce características del conjunto de números empleado. Reconoce cuando un planteamiento o desarrollo le otorga un resultado esperado o acorde con la situación. En el análisis de las sesiones, retomaremos esta ventaja del software en el aprendizaje de los alumnos referente a los números con signo.

CAPÍTULO II

OBTENCIÓN DE DATOS

2.1 CONTEXTO

La exploración empírica en temas de la utilización de representaciones para el aprendizaje de los números con signo, se llevó a cabo con un grupo de estudiantes de primer grado de la Escuela Secundaria # 99 T. V., “Margarita Maza de Juárez”. El grupo estuvo conformado por 27 estudiantes de entre 12 y 13 años. El investigador que realizó el estudio no fue el profesor titular del grupo, sin embargo se le brindaron las facilidades para llevar a cabo la investigación facilitando su trabajo con el grupo durante los cuatro días en que se llevaron a cabo una serie de actividades con los estudiantes en torno del aprendizaje del tema elegido.

La escuela es una secundaria pública que se encuentra ubicada en la calle Independencia, esquina Guadalupe Victoria, Colonia San Felipe de Jesús, dentro de la Delegación Política Gustavo A. Madero, al norte del Distrito Federal. Colinda con los Municipios mexiquenses Tlalnepantla de Baz, Nezahualcóyotl y Ecatepec de Morelos. De este último Municipio, algunos estudiantes se trasladan hacia esta secundaria. El plantel cuenta con dos salones de cómputo acondicionados para el trabajo de los estudiantes con equipos de cómputo. Uno de ellos se llama Aula Digital GAM y el otro es el que se denomina Laboratorio de Computación. Tres de las cuatro sesiones (cada una de 50 minutos) de trabajo con los estudiantes las que constó el Plan Pedagógico (de la 2 a la 4) se llevaron a cabo en el Aula Digital GAM. Todas las sesiones se realizaron de forma consecutiva a lo largo de una semana. Es de notar que los equipos de cómputo no contaban con el software que se empleó durante el desarrollo de las actividades. Se descargó una versión de 30 días de prueba. Además de que se dotó al plantel de los mouse que se requirieron para poder interactuar con el software, ya que no todos con los que se contaba estaban en las condiciones requeridas.

2.2 DESCRIPCIÓN DE LAS ACTIVIDADES

Antes de iniciar el presente trabajo de investigación en su fase de desarrollo de campo, al presentarme con el profesor titular del grupo le pregunté si ya había trabajado con ellos el tema de números con signo, a lo que me respondió que aún no, que de acuerdo a su planeación, estaba por iniciar dicho tema durante la semana que estaba por solicitarle al grupo de estudio, por lo que se nota que los estudiantes no habían sido introducidos al estudio de los números con signo.

Al presentar el proyecto de intervención al docente titular del grupo, las actividades planeadas y el empleo de un software, novedoso para él, el convencimiento de trabajo fue total. El docente titular confirmó su desconocimiento del software *ALNUSET* (Apartado 1.7 del presente trabajo de investigación. pp. 52-61), cuando al preguntarle si él conocía el software *ALNUSET*, a lo que respondió que no.

Del mismo modo, los alumnos no tenían ninguna experiencia previa de trabajo con el software *ALNUSET*, pues también se les preguntó, durante la segunda sesión (primera en el Aula Digital GAM), si conocían el software en cuestión, a lo que respondieron que no.

Todos los alumnos asistieron durante las primeras tres sesiones. En la última se presentaron únicamente 21, por lo que algunos equipos de trabajo se modificaron respecto a cómo estaban organizados previamente, lo que en realidad no fue significativo en relación con el trabajo y la actividad que se llevó a cabo.

La primera sesión se desarrolló en el salón de clase. Hubo representación mediante imágenes de personajes de una serie televisiva, con lo que se asumían roles de *zombis* o personas *normales*, que representaron números negativos y positivos, respectivamente. Hubo acomodos frente al salón, donde sus compañeros iban diciendo un número y su característica, por ejemplo: *tres, zombi*. Entonces se movían tres zombis al lado izquierdo al frente. Si

decían *cinco, normal*, se movían a la derecha al frente cinco estudiantes con imagen de una persona normal (no zombi). El acomodo de los personajes no fue aleatorio. Fue con la intención de que los estudiantes fueran ubicando espacialmente donde van los números negativos y dónde los números positivos sobre la recta numérica.

También se hicieron agrupaciones de estudiantes normales y zombis. Con estas agrupaciones, los estudiantes empezaron a tener noción de qué operación se lleva a cabo con la adición y sustracción de números con signo.

Durante la primera sesión en el Aula Digital GAM, la proyección del software con el que se trabajó se hizo sobre una pared, pero el exceso de luz exterior, y la distancia del cañón a la pared, hicieron difícil el trabajo. Esta problemática se solventó mediante la explicación verbal del investigador respecto a las características del software, y con el seguimiento de parte de los alumnos en sus equipos. En las siguientes dos sesiones, las proyecciones se hicieron sobre una pizarrón blanco que se colocó para una mejor exposición de las actividades.

Esta primera sesión en el Ala Digital GAM sirvió para que los estudiantes conocieran el software, interactuaran en su entorno y reconocieran los comandos que iba a utilizar durante el desarrollo de las actividades de ese día y los consecutivos. En esta primera sesión el tema abordado fue el de la adición de números con signos iguales, y se buscó que los estudiantes logaran un acuerdo general de qué operación se lleva a cabo cuando sumamos dos o más números con signos iguales, y qué se hace si los signos de los sumandos son diferentes.

Las sesiones 3 y 4 se iniciaron retomando los elementos esenciales de la sesión anterior.

La segunda sesión en el Aula Digital GAM se desarrolló de manera similar a la primera, pero con el tema de sustracción de números con signo. Esta sesión se inició con un recordatorio de cuáles son los números simétricos y cómo se ubican éstos sobre la recta numérica. Este tema se abordó debido a que se consideró necesario para apoyar a los alumnos al momento de trabajar la sustracción de números con signos iguales, y sustracción de números con signos diferentes. Pasaron algunos alumnos a resolver ejercicios en la computadora que estaba conectada al cañón, lo que permitió reconocer que en una sesión, algunos alumnos lograron cierto dominio el software.

La última sesión se aprovechó para que los estudiantes le dieran una aplicación a los temas que se trabajaron en las dos sesiones previas, mediante la resolución de problemas donde se involucraron números con signos y las operaciones de adición o sustracción.

Una explicación de las actividades que se llevaron a cabo se encuentra en el tema “*Instrumentos*” en este mismo apartado.

2.3 SUJETOS

Como ya se mencionó, el grupo con el que se llevaron a cabo las actividades estuvo conformado por 27 estudiantes, cuyas edades oscilaron alrededor de los 12 años (18 de ellos) y los 13 años (9 de ellos).

Es de notar que el grupo de estudiantes con el que se llevaron a cabo las observaciones que sustentan el trabajo empírico de la presente exploración, es un grupo de estudiantes en el turno vespertino, condición que por experiencia docente se sabe que los caracteriza como estudiantes inquietos y que no necesariamente se involucran con el trabajo. El mismo profesor titular del grupo fue quien expresó la dificultad para comprometerse en el trabajo, que presentaba el grupo. Por ello es que llama mucho la atención que en todas las actividades del estudio exploratorio los alumnos se mostraron siempre muy participativos y dispuestos al trabajo.

Debido a las características del grupo, fue que se consideró acertado emplear instrumentos que son del interés de los alumnos: las computadoras. Al salir de un ambiente monótono a otro donde es más dinámico e interactivo, los estudiantes dirigieron su atención al adecuado desarrollo de las actividades que previamente se habían planeado, con la intención de que obtuvieran como producto final de cada sesión un aprendizaje nuevo referente al empleo de los números con signo en dos operaciones básicas (adición y sustracción). Los propios alumnos fueron quienes, al presentarme durante cada día del desarrollo empírico, se organizaron y mostraron buena disciplina en su salón, pues se les indicó que, de lo contrario, trabajaríamos en el mismo salón, sin emplear las computadoras.

2.4 INSTRUMENTOS

Un instrumento utilizado en esta investigación fueron las hojas de respuesta, las cuales permitieron recabar información escrita por los estudiantes. De la misma manera, los recursos que se utilizaron para generar esta información fueron el Plan Pedagógico, las plenarias, las representaciones, el software *ALNUSET*, los cuales se describen a continuación:

- **Hojas de respuestas.** Las hojas de respuesta empleadas fueron diseñadas por el investigador, de tal manera que los estudiantes realizaran las actividades de las cuatro sesiones que constó el Plan Pedagógico, en ellas los estudiantes escribieron sus resultados y explicaron con sus propias palabras el desarrollo que llevaron a cabo para la resolución de los ejercicios o de los problemas planteados. El trabajo se realizó por parejas y, en unos casos, por equipos de tres integrantes. A continuación se presentan un ejemplo del formato de la hoja de respuestas de la sesión 2 vacío, y uno resuelto por una pareja de alumnos.

BLOQUE IV, PRIMER AÑO DE SECUNDARIA: OPERACIONES CON
NÚMEROS CON SIGNO.

Escuela: Secundaria # 99. "Margarita Maza de Juárez". T. V. Fecha: _____

Nombre: _____ Edad: _____

Nombre: _____ Edad: _____

Sesión 2.

Resolución de operaciones –sumas y restas- con números enteros positivos y negativos utilizando el software ALNUSET.

- Ejercicio 1. Suma los números enteros $2 + 5$.
 - Abre el software ALNUSET. Aparecerá una ventana de dialogo que dice "Registrar ALNUSET". Dale clic en "Evaluar". Verás que en la pantalla aparecen dos líneas paralelas, una azul y una roja.
 - Selecciona el comando $a+b$. (Aparecen tres recuadros. Dos sobre la línea azul y uno sobre la línea roja. Cada recuadro tiene asociado un punto verde). Coloca el cursor (la flechita blanca) sobre el primer punto verde, el cual representa al primero de los sumandos. De momento está colocado en un valor cualquiera, aún no en el valor del primer sumando dado. Haz clic con el botón izquierdo del ratón y, sin soltarlo, desplaza el punto sobre la línea azul, verás que en el recuadro aparecen los diferentes valores de las posiciones que van tomando.
 - Abre una página nueva en el software. Haz clic con el botón izquierdo del ratón y, sin soltarlo, desplaza el punto hasta llegar al valor del sumando indicado. En este caso, el número 2 sobre la línea azul.
 - Haz clic sobre el punto verde de la línea roja, y arrástralo hasta recorrer el valor del segundo sumando, en este caso, el número 5.
 - Verás que en la segunda ventana, encima de la línea azul (o en la ventana que tiene dos recuadros), aparece la suma que se desea realizar. El punto verde que queda asociado a dicha suma está ahora colocado en el resultado de la suma, en este caso el número 7.
 - Haz clic sobre el recuadro del resultado. Verás que ahora queda resaltado en amarillo el punto asociado al resultado. Haz clic sobre ese punto. Verás que quedan resaltados tanto la suma dada como el resultado.

- Ejercicio 2. Suma de los números enteros $(-4) + (-1)$.

- Abre una nueva página en *ALNUSET*. Selecciona el comando $a+b$. Coloca el cursor sobre el primer punto verde de la línea azul (el que representa al primero de los sumandos). Haz clic con el botón izquierdo del ratón y, sin soltarlo, desplaza el punto hasta llegar al valor del sumando indicado. En este caso, el número (-4).
- Haz clic sobre el punto verde de la línea roja, y arrástralo hasta recorrer el valor del segundo sumando, en este caso, el número (-1).
- Como en el ejercicio anterior, la posición del segundo punto verde es el que indica el resultado de la operación que se llevó a cabo, la cual en este caso está indicada por -4
+ -1
- Haz clic sobre el recuadro del resultado. Verás que ahora queda resaltado en amarillo al punto asociado al resultado. Haz clic sobre ese punto amarillo. Verás que quedan resaltados tanto la suma dada operación como el resultado de la operación efectuada, esto es: -4 + -1 = -5

- Ejercicio 3. Suma de los números enteros (-2) + (-6).

- Selecciona el comando $a+b$. Coloca el cursor sobre el primer punto verde (el que representa al primero de los sumandos). Haz clic con el botón izquierdo del ratón y, sin soltarlo, desplaza el punto hasta llegar al valor del sumando indicado. En este caso, el número (-2) sobre la línea azul.
- Haz clic sobre el punto verde de la línea roja, y arrástralo hasta recorrer el valor del segundo sumando, en este caso, el número (-6).
- Como en el ejercicio anterior, la posición del segundo punto verde es el que indica el resultado de la operación que se llevó a cabo, la cual en este caso está indicada por _____
- Haz clic sobre el recuadro del resultado. Verás que ahora queda resaltado en amarillo al punto asociado al resultado. Haz clic sobre ese punto amarillo. Verás que quedan resaltados tanto la suma dada como el resultado de la operación efectuada, esto es: _____

- Ejercicio 4. Suma de los números enteros 7 + (-3).

- Selecciona el comando $a+b$. Coloca el cursor sobre el primer punto verde (el que representa al primero de los sumandos). Haz clic con el botón izquierdo del ratón y, sin soltarlo,

desplaza el punto hasta llegar al valor del sumando indicado. En este caso, el número 7 sobre la línea azul.

- Haz clic sobre el punto verde de la línea roja, y arrástralo hasta recorrer el valor del segundo sumando, en este caso, el número (-3).
- Como en el ejercicio anterior, la posición del segundo punto verde es el que indica el resultado de la operación que se llevó a cabo, la cual en este caso está indicada por _____
- Haz clic sobre el recuadro del resultado. Verás que ahora queda resaltado en amarillo al punto asociado al resultado. Haz clic sobre ese punto amarillo. Verás que quedan resaltados tanto la suma dada como el resultado de la operación efectuada, esto es: _____

- Ejercicio 5. Suma de los números enteros $1 + (-5)$.

- Selecciona el comando $a+b$. Coloca el cursor sobre el primer punto verde (el que representa al primero de los sumandos). Haz clic con el botón izquierdo del ratón y, sin soltarlo, desplaza el punto hasta llegar al valor del sumando indicado. En este caso, el número 1 sobre la línea azul.
- Haz clic sobre el punto verde de la línea roja, y arrástralo hasta recorrer el valor del segundo sumando, en este caso, el número (-5).
- Como en el ejercicio anterior, la posición del segundo punto verde es el que indica el resultado de la operación que se llevó a cabo, la cual en este caso está indicada por _____
- Haz clic sobre el recuadro del resultado. Verás que ahora queda resaltado en amarillo al punto asociado al resultado. Haz clic sobre ese punto amarillo. Verás que quedan resaltados tanto la suma dada como el resultado de la operación efectuada, esto es: _____

Suma de los números enteros $(-5) + 7 + (-4)$.

- Para sumar más de dos sumandos, hay que proceder sumando de dos en dos. Por ejemplo, sume $(-5 + 7) + (-4)$. Utilice *ALNUSET* para llevar a cabo la suma indicada, y reporte enseguida qué fue todo lo que hizo y el resultado que obtuvo.

Suma los números enteros $3 + 4 + (-5)$.

El resultado es: _____

BLOQUE IV, PRIMER AÑO DE SECUNDARIA: OPERACIONES CON
NÚMEROS CON SIGNO.

Escuela: Secundaria # 99, "Margarita Maza de Juárez", T. V. Fecha: _____

Nombre: Olivera Muñoz Fabiola Edad: 12 años

Nombre: Tapia Perfecto Manuel Vives Edad: 13

Sesión 2.

Resolución de operaciones –sumas y restas– con números enteros positivos y negativos utilizando el software ALNUSET.

- Ejercicio 1. Suma los números enteros $2 + 5$.
- Abre el software ALNUSET. Aparecerá una ventana de dialogo que dice "Registrar ALNUSET". Dale clic en "Evaluar". Verás que en la pantalla aparecen dos líneas paralelas, una azul y una roja.
- Selecciona el comando $a+b$. (Aparecen tres recuadros. Dos sobre la línea azul y uno sobre la línea roja. Cada recuadro tiene asociado un punto verde). Coloca el cursor (la flechita blanca) sobre el primer punto verde, el cual representa al primero de los sumandos. De momento está colocado en un valor cualquiera, aún no en el valor del primer sumando dado. Haz clic con el botón izquierdo del ratón y, sin soltarlo, desplaza el punto sobre la línea azul, verás que en el recuadro aparecen los diferentes valores de las posiciones que va tomando el punto.
- Abre una página nueva en el software. Haz clic con el botón izquierdo del ratón y, sin soltarlo, desplaza el punto hasta llegar al valor del sumando indicado. En este caso, el número 2 sobre la línea azul.
- Haz clic sobre el punto verde de la línea roja, y arrástralo hasta recorrer el valor del segundo sumando, en este caso, el número 5.

- Verás que en la segunda ventana de la línea azul (o en la ventana que tiene dos recuadros), aparece la operación de suma que se desea realizar. El punto verde que queda asociado a dicha suma está ahora colocado en el resultado de la misma, en este caso el número 7.

- Haz clic sobre el recuadro del resultado. Verás que ahora queda resaltado en amarillo el punto asociado al resultado. Haz clic sobre ese punto amarillo. Verás que quedan resaltados tanto la suma dada como el resultado de la operación efectuada.

- Ejercicio 2. Suma de los números enteros $(-4) + (-1)$.

- Abre una nueva página en ALNUSET. Selecciona el comando $a+b$. Coloca el cursor sobre el primer punto verde de la línea azul (el que representa al primero de los sumandos). Haz clic con el botón izquierdo del ratón y, sin soltarlo, desplaza el punto hasta llegar al valor del sumando indicado. En este caso, el número (-4) .

- Haz clic sobre el punto verde de la línea roja, y arrástralo hasta recorrer el valor del segundo sumando, en este caso, el número (-1) .

- Como en el ejercicio anterior, la posición del segundo punto verde es la que indica el resultado de la operación que se llevó a cabo, la cual en este caso está indicada por $-4 + -1$

- Haz clic sobre el recuadro del resultado. Verás que ahora queda resaltado en amarillo el punto asociado al resultado. Haz clic sobre ese punto amarillo. Verás que quedan resaltados tanto la suma dada como el resultado de la operación efectuada, esto es: $-4 + -1 = -5$

- Ejercicio 3. Suma de los números enteros $(-2) + (-6)$.

- Selecciona el comando $a+b$. Coloca el cursor sobre el primer punto verde (el que representa al primero de los sumandos). Haz clic con el botón izquierdo del ratón y, sin soltarlo, desplaza el punto hasta llegar al valor del sumando indicado. En este caso, el número (-2) sobre la línea azul.
- Haz clic sobre el punto verde de la línea roja, y arrástralo hasta recorrer el valor del segundo sumando, en este caso, el número (-6) .
- Como en el ejercicio anterior, la posición del segundo punto verde es la que indica el resultado de la operación que se llevó a cabo, la cual en este caso está indicada por: $-2 + -6$
- Haz clic sobre el recuadro del resultado. Verás que ahora queda resaltado en amarillo el punto asociado al resultado. Haz clic sobre ese punto amarillo. Verás que quedan resaltados tanto la suma dada como el resultado de la operación efectuada, esto es: $-2 + -6 = -8$

- Ejercicio 4. Suma de los números enteros $7 + (-3)$.

- Selecciona el comando $a+b$. Coloca el cursor sobre el primer punto verde (el que representa al primero de los sumandos). Haz clic con el botón izquierdo del ratón y, sin soltarlo, desplaza el punto hasta llegar al valor del sumando indicado. En este caso, el número 7 sobre la línea azul.
- Haz clic sobre el punto verde de la línea roja, y arrástralo hasta recorrer el valor del segundo sumando, en este caso, el número (-3) .

- Como en el ejercicio anterior, la posición del segundo punto verde es la que indica el resultado de la operación que se llevó a cabo, la cual en este caso está indicada por: 7 + -3

- Haz clic sobre el recuadro del resultado. Verás que ahora queda resaltado en amarillo el punto asociado al resultado. Haz clic sobre ese punto amarillo. Verás que quedan resaltados tanto la suma dada como el resultado de la operación efectuada, esto es: 7 + -3 = 4

• Ejercicio 5. Suma de los números enteros $1 + (-5)$.

- Selecciona el comando $a+b$. Coloca el cursor sobre el primer punto verde (el que representa al primero de los sumandos). Haz clic con el botón izquierdo del ratón y, sin soltarlo, desplaza el punto hasta llegar al valor del sumando indicado. En este caso, el número 1 sobre la línea azul.

- Haz clic sobre el punto verde de la línea roja, y arrástralo hasta recorrer el valor del segundo sumando, en este caso, el número (-5).

- Como en el ejercicio anterior, la posición del segundo punto verde es la que indica el resultado de la operación que se llevó a cabo, la cual en este caso está indicada por: 1 + -5

- Haz clic sobre el recuadro del resultado. Verás que ahora queda resaltado en amarillo el punto asociado al resultado. Haz clic sobre ese punto amarillo. Verás que quedan resaltados tanto la suma dada como el resultado de la operación efectuada, esto es: 1 + -5 = -4

Suma de los números enteros $(-5) + 7 + (-4)$.

- Para sumar más de dos sumandos, hay que proceder sumando de dos en dos. Por ejemplo, sume $(-5 + 7) + (-4)$. Utilice ALNUSET para llevar a cabo la suma indicada, y reporte enseguida qué fue todo lo que hizo y el resultado que obtuvo.

$$= 9 + 7 = -2$$

agrupo los negativos y luego los sumo con los positivos

abrimos Alnuset y pusimos A+13
después del primer punto verde (azul) lo
arrastramos a -5 y el de la línea roja
al 7 y nos dio de resultado 2
después le dimos click al A+B para
hacer otra suma la cual fue
 $2 + -4$ y nos dio como resultado
Final -2

Suma los números enteros $3 + 4 + (-5)$.

El resultado es: $7 + -5 = 2$

- **Secuencia didáctica.**

Para la primera sesión, se consideraron las aportaciones hechas por Bruner con respecto al juego (reducción de las consecuencias frustrantes en el niño, ruptura entre los medios y los fines, intencionalidad del juego y gusto o placer por realizar las actividades, entre otros) y a la teoría de la representación (enactiva, icónica y simbólica), pp. 27 a 31 de esta tesis. Para que los alumnos tuvieran un acercamiento al concepto de números positivos y negativos con actividades lúdicas específicamente dicho acercamiento se llevó a cabo mediante representaciones de los propios estudiantes, sin la intención de otorgar una validación por parte del investigador a las acciones que se llevaron a cabo. Se les mostraron a los alumnos unas imágenes en hojas de tamaño carta de personas en condiciones “*normales*” (que para la intención didáctica representan números positivos) y otras en condición de “*zombi*” (que para la intención didáctica representan números negativos), como las siguientes:



Imagen 7. Personas en condiciones “*normales*” (que representan números positivos)



Imagen 8. Personas en condiciones de “*zombi*” (que representan números negativos)

Se solicitó a un grupo de voluntarios que pasaran al frente y tomaran una representación de cada una.

A los alumnos que se quedaron en su lugar, se les entregó una hoja con operaciones (que a continuación se muestra) que debían representar quienes pasaron al frente.

REPRESENTACIÓN PICTÓRICA

REPRESENTACIÓN NUMÉRICA

1. 3  + 4  =

$3 + 4 =$

2. 6  + 2  =

$6 + 2 =$

3. 4  + 1  =

$4 + (-1) =$

4. 5  + 6  =

$5 + (-6) =$

5. 2  + 3  =

$(-2) + (-3) =$

6. 5  + 1  =

$(-5) + (-1) =$

7. 4  + 2  =

$(-4) + 2 =$

8. 2  + 5  =

$(-2) + 5 =$

Con base en agrupaciones los alumnos fueron obteniendo los resultados de las operaciones que se les presentaron. De este modo, ya tuvieron un primer acercamiento a los números con signo, lo cual se aprovechó al trabajar con el software.

A manera de inicio, se integró la actividad a desarrollar en el contexto de representación de los personajes de una serie televisiva, con la cual estaba familiarizada la mayoría de los alumnos. El desarrollo de la clase consistió en la representación de los humanos y de zombis, realizando agrupamientos e identificando con los positivos a los humanos y con los negativos a los zombis. La sesión terminó cuando se pasó a representar con números positivos y negativos las personificaciones, y se les ubicó en la recta numérica respecto del cero.

Las siguientes tres sesiones se iniciaron con la exploración del software, específicamente del componente de la Línea Algebraica (L.A., p. 49). Es de notar que la herramienta computacional que aquí se utiliza ya ha sido empleada en otros estudios de investigación para la enseñanza-aprendizaje del álgebra, desde la identificación de la problemática por la que atraviesan los estudiantes al pasar de un tipo de lenguaje (aritmético) a otro (algebraico) y el papel que juega el uso adecuado de la tecnología (particularmente el software *ALNUSET*) teniendo como respaldo un Plan Pedagógico que guíe las actividades de los estudiantes para la obtención de los conceptos algebraicos requeridos, ya que por sí solo cualquier software no garantiza que los alumnos logren adquirir los conocimientos esperados. Entre otros, se han publicado trabajos de Chiappini y Pedemonte (2008), Chiappini (2013) y Chiappini (*“The role of technology in developing principles of symbolical algebra”*. Istituto per le Tecnologie Didattiche – CNR – Genova – Italy. y *“Using Alnuset to construct the*

notions of equivalence and equality in algebra”. Istituto per le Tecnologie Didattiche – CNR. V. De Marini 6, 16149 Genova, Italy.).

Es posible encontrar una fundamentación de las actividades que trabajamos durante las clases en el marco semiótico de Pierce, que enmarca las formas de los objetos matemáticos, sus interacciones representadas en ALNUSET y los modos de representaciones que con *ALNUSET* se pueden hacer (Chiappini y otros, 2013), de la misma forma en que el conocimiento se estudia como resultado de una construcción social, al existir interacciones entre los alumnos con los alumnos, con el software y el investigador, ya que también el propio Pierce nos habla acerca del “*conocimiento matemático como resultado de una construcción social, la cual es llevada a cabo por un continuo diálogo entre los niveles del desarrollo operacional/procedimental de técnicas matemáticas, y su nivel de conceptualización estructural/conceptual*” (Op. Cit.).

También es importante señalar que durante el desarrollo de las actividades, la Teoría de la Actividad y la noción de Plan Pedagógico parecen adecuados para enmarcar la estrategia pedagógica que se empleó en este trabajo al analizar las contradicciones que pudieron surgir en el desarrollo de las actividades didácticas mediadas en el rol de las representaciones en ALNUSET para superarlas.

- **Trabajo colectivo en clase.**

Para compartir o generar lluvias de ideas con respecto al tema.

Una vez llevadas a cabo las representaciones en la primera sesión, se plantearon preguntas que generaron algunas de las ideas relevantes de los estudiantes que aquí surgieron. Las preguntas fueron presentadas a los alumnos como sigue:

- ¿Qué tipo de números representarán los humanos no infectados?
- ¿Qué tipo de números representarán los humanos infectados o zombis?
- Al momento en que se agruparon los conjuntos de humanos no infectados con otros con la misma condición, ¿qué operación se llevó a cabo?, ¿y qué operación cuando juntamos zombis con zombis?
- ¿Qué operación se llevó a cabo cuando se enfrentaron grupos con diferentes condiciones, es decir, humanos con zombis?

Las respuestas a estas preguntas vinieron acompañadas de opiniones, al principio, encontradas. Es decir, mientras algunos alumnos identificaron qué operación se debería llevar a cabo, y daban el resultado, otros alumnos apenas estaban procesando la información y no lograron responder.

A continuación se muestran algunos de los diálogos que se generaron durante la primera sesión, cuando se agruparon conjuntos de humanos y zombis:

Situación 1 (humanos con humanos)

E2: <<Que pasen...>> “El equipo tres, humano (...) y el equipo cuatro, humano.

I: “Primero mencionaron al equipo de tres, y ahora el equipo cuatro. Como ambos están en estado humano, ¿se van a confrontar?”

Grupo: “No”.

I: “Entonces, ¿qué hacemos con el equipo cuatro?” <<espera a que se diga en el grupo alguna respuesta. Como no se da, les dice qué se va a hacer>>. “Los ponemos junto al equipo tres” <<señala al equipo cuatro que se coloque a la derecha del equipo tres>> ¿Cuántos humanos tenemos en este resultado?”

Grupo: "Siete"

I: "Siete. Un equipo de tres y un equipo de cuatro. Como están en el mismo estado, ¿qué hacemos con los representantes <<los integrantes de los dos equipos>>?"

E3: "Unirlos".

E4: "Se suman".

Situación dos (zombis con zombis)

E5 "Equipo dos en estado zombi" (...), equipo tres en estado zombi (...)."

I: "¿Dónde se van a colocar?"

E1: "Allá" <<Señalando a la derecha del equipo dos>>.

I: "Estaban de aquél lado" <<a la derecha>> "cuando estaban en estado humano. Cuando están en estado zombi vamos a ponerlos de este lado" <<señala a la izquierda del equipo dos>> (...) "¿Cuántos son en total?"

Grupo: "Cinco".

I: "Cinco, ¿en estado...?"

Grupo: "Zombi"

I: "¿Por qué son cinco en estado zombi?"

E1: "Porque se...agruparon"

Situación tres (zombis con humanos)

E6: (...) "Equipo cuatro en estado zombi (...), equipo dos en estado normal"

I: "(...) Vamos a empezar de este lado. Como son zombis vamos a empezar de este lado" <<coloca al equipo dos enfrente del equipo cuatro, iniciando de izquierda a derecha>> "¿Cuántos quedan?"

E7: "Dos"

I: "(...) Dos, ¿en qué estado?"

E8: "Humano".

I: "¿En estado humano? ¿Quién ganó, los zombis o los humanos?"

Grupo: "Los zombis" <<Se escuchan otras voces que dicen "los humanos", pero no son muy claras. Se escuchan muy poco. El investigador parece no escucharlas>>

I: "¿Por cuántos?"

Grupo: "Por dos".

En las siguientes tres sesiones, las preguntas fueron enfocadas a retomar los conceptos y operaciones que se realizaron la clase anterior, para partir de ahí y enlazar con el nuevo tema.

Al inicio de la segunda sesión, se reconoció el ámbito de la Línea Algebraica, y el comando a emplear. Posteriormente se llevó a cabo la realización de ejemplos en

las sumas y restas, así como la resolución de problemas que resolvieron por parejas los alumnos, anotando en cada caso los pasos que siguieron para llegar al resultado obtenido.

Las clases terminaron cuando se les pidió a los estudiantes que escribieran una regla, ya sea para sumar números con signos iguales o números con signos diferentes, o para restar este mismo conjunto de números.

- Representaciones: zombis.
- El software que se empleó se llama ALNNUSET (Álgebra de Conjuntos de Números). Se trabajó con este software en modo de prueba, versión que se otorga en línea durante 30 días. Se instaló el software una semana antes del periodo de experimentación para verificar su correcto funcionamiento.

Cabe señalar que se videograbaron todas las sesiones, donde se pueden apreciar las participaciones de los estudiantes en las distintas actividades desarrolladas en las cuatro sesiones que duro la fase empírica.

2.5 ORGANIZACIÓN DEL ESTUDIO EXPLORATORIO

La primera sesión fue en el salón de clases; tuvimos que mover las mesas y hacernos de un espacio al frente, pues hubo representaciones por parte de los estudiantes. El acondicionamiento del salón se muestra en el siguiente esquema:

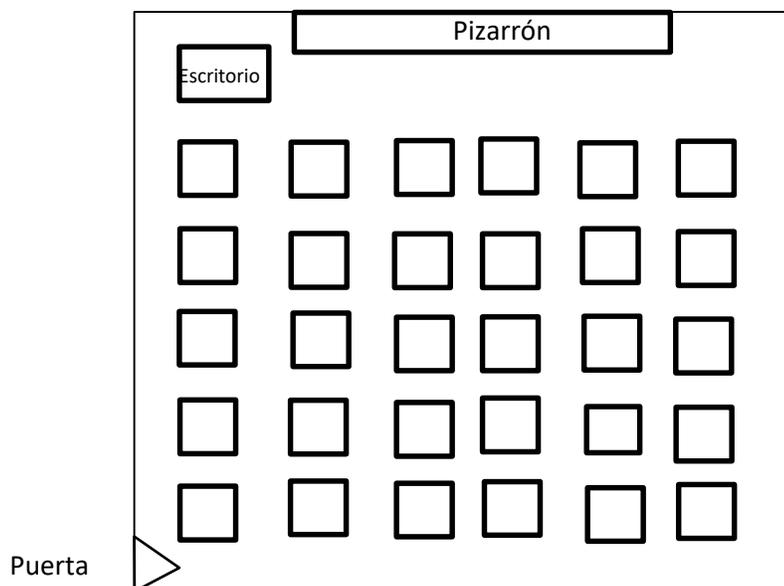


Imagen 9. Organización del aula para la actividad de la representación

Se formaron equipos que representaron los números desde el uno hasta el seis en dos facetas. Tratamos de representar a los números positivos y negativos de una manera indirecta. Aprovechando que están de moda los zombis, se les entregaron dos fotocopias; una donde las personas están en su apariencia “normal” –humana-, y otra en su apariencia “zombi”. Quisimos que los estudiantes pudieran representar los números de una forma diferente a la que acostumbramos poner en lápiz y papel. Ellos, los alumnos, la pasaron bien pues mientras pasaban los equipos a representar los números en sus diferentes representaciones y a modo de juego, empezaron a asimilar que cada número tiene un contrario (que posteriormente conocimos como simétrico y su importancia para ubicarlos en la recta numérica –Línea

Algebraica en ALNUSET- y al trabajar la resta). Del mismo modo, con las actividades realizadas empezaron a tener una idea de qué sucede al agrupar dos conjuntos con representaciones iguales (humanos con humanos, zombis con zombis) y qué sucede cuando agrupamos conjuntos con representaciones diferentes (humanos con zombis).

Las sesiones 2, 3 y 4 se desarrollaron en el Aula Digital GAM, la cual cuenta con 25 equipos de cómputo relativamente recientes (tienen aproximadamente 5 años de antigüedad). Éstos están colocados alrededor del salón, en forma de “U”. En el siguiente esquema se muestra el acomodo de los equipos, y la disposición del salón.

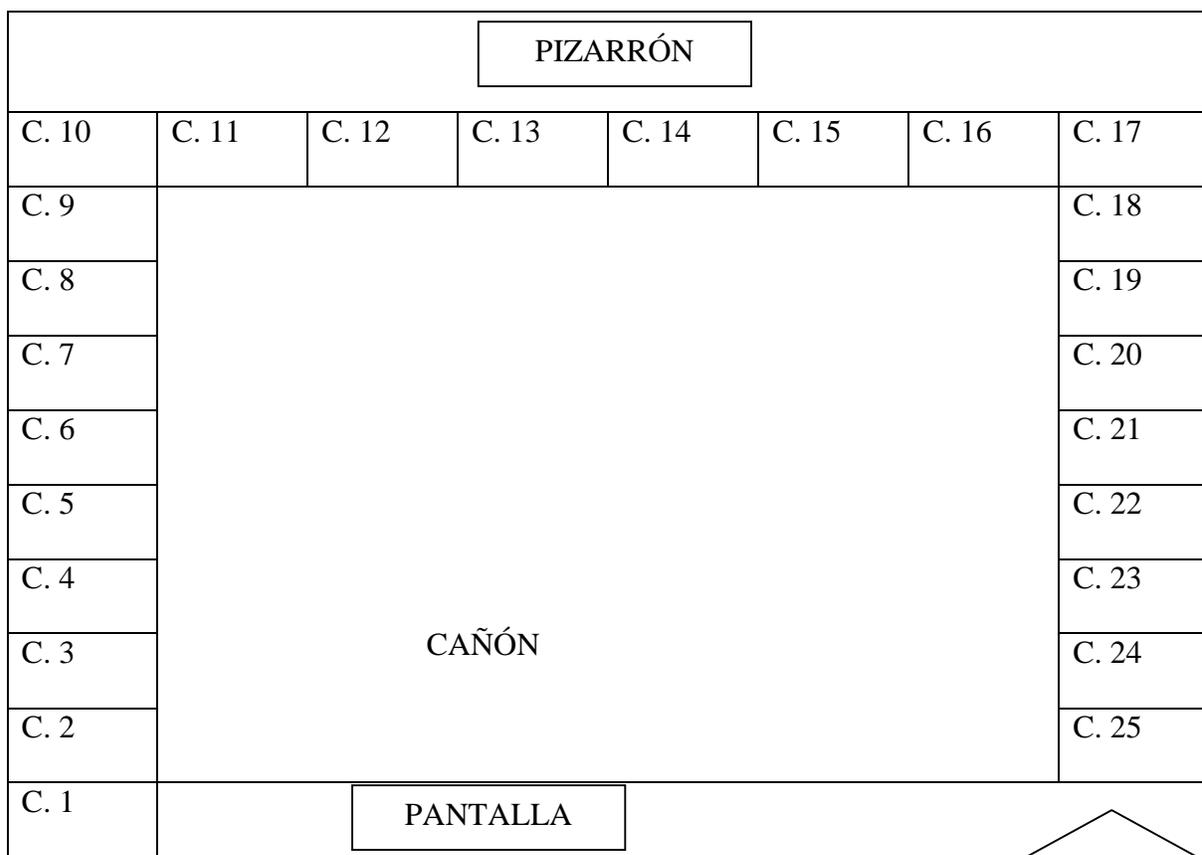


Imagen 10. Organización del aula para las actividades con ALNUSET

Debido a la cantidad de equipos, se asignaron a dos alumnos por computadora; en algunos casos tuvieron que trabajar tres estudiantes en un mismo equipo, pues no todos

funcionaron de manera óptima. Las características del sistema operativo son aptas para trabajar con muchos de los softwares más actuales. Los equipos mostraron, en su gran mayoría, deterioros por falta de mantenimiento. Hubo equipos cuyo sistema operativo, el teclado, el ratón, el monitor o los lectores USB no funcionaban. Esta fue la razón de que, en algunos casos fueran tres y no dos los alumnos que trabajaran en un mismo equipo.

2.6 ORGANIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN

Enseguida se organiza en tablas de datos la información que se obtuvo a partir de la aplicación de los instrumentos.

| <i>Recurso o Instrumento</i> | <i>Sesiones o clases</i> | | | |
|------------------------------|--------------------------|----------|----------|----------|
| | <i>1</i> | <i>2</i> | <i>3</i> | <i>4</i> |
| Representaciones | • | | | |
| Lluvia de ideas | • | • | • | • |
| Hojas de respuesta | • | • | • | • |
| Computadora con ALNUSET | | • | • | • |
| Videgrabaciones | • | • | • | • |

En la tabla se puede observar que en la primera sesión, los recursos que se emplearon fueron las representaciones gráficas mediante imágenes de zombis y personas normales. Además de la lluvia de ideas, que orientó la noción de lo que es un número positivo y un número negativo, su ubicación en la recta numérica y las agrupaciones de los conjuntos que se realizaron. Asimismo, las hojas de respuestas fueron el medio por el que asentaron los resultados obtenidos de las agrupaciones/operaciones indicadas, y donde los estudiantes escribieron los procedimientos o conclusiones a que llegaron en cada clase. Únicamente en la primera sesión, que se llevó a cabo en el salón de clase, no se empleó las computadoras ni el software ALNUSET. Durante las cuatro sesiones de que constó el Plan Pedagógico, las

actividades fueron videograbadas. Durante las sesiones 2 a la 4, las actividades se llevaron a cabo en el Aula Digital GAM con el software ALNUSET.

Para el análisis de la información, se organizará lo obtenido de acuerdo al número de sesión desarrollada y al recurso o instrumento utilizado como se indica a continuación:

| <i>Sesión 1</i> | |
|------------------------------|--|
| <i>Recurso o instrumento</i> | <i>Aspectos o elementos a Valorar</i> |
| Representación. | Se observarán las gesticulaciones, actitud, y disposición al trabajo. |
| Lluvia de ideas. | Claridad en las intervenciones. Reconocimiento de los números positivos y negativos, y su ubicación en la recta numérica. Reconocimiento de la operación llevada a cabo al agrupar. |
| Videograbación | Asociación de las imágenes con los números positivos y negativos. Agrupaciones. |

En la tabla podemos observar que una de las herramientas empleadas para abordar la introducción al tema de números con signo, sirvió además para reconocer los gestos de los alumnos (es decir, desde la expresión de sus caras cuando buscaban cómo manipular el software, las interacciones de los propios alumnos entre sí, con la computadora y el software) y su disposición al trabajo (que fue una de las querellas que expresó el profesor titular del grupo, ante la falta de entusiasmo del grupo a la hora de trabajar). Esto nos muestra que cuando la dinámica ordinaria se ve modificada, y se da un uso adecuado de las TIC, puede causar un impacto favorable en el alumnado. Complementando la actividad con el software, la lluvia de ideas sirvió para llegar a acuerdos en común respecto a la operación que se debe

llevar a cabo en una suma, tanto cuando los sumandos tienen el mismo signo, como cuando éstos son diferentes.

| <i>Sesión 2</i> | |
|--|---|
| <i>Recurso o instrumento</i> | <i>Aspectos o elementos a Valorar</i> |
| Hojas de respuesta | Explicación de cómo obtuvieron los resultados de las sumas planteadas, principalmente las dos últimas, ya que éstas no incluyen la explicación del procedimiento que se debe llevar a cabo. |
| Empleo del componente Línea Algebraica | Ubicación de los números positivos y negativos en la Línea Algebraica. Facilidad en el empleo del software. |
| Videograbaciones | Movimientos, gesticulaciones que indiquen el nivel de comprensión de la suma de números con signos iguales o diferentes. |

En la tabla identificamos que los instrumentos de registro (hojas de respuesta) fueron el medio por el que los alumnos desarrollaron las actividades que a la par fueron resolviendo en la computadora mediante el software ALNUSET. Específicamente la línea Algebraica, uno de los componentes de dicho software. En las hojas de respuesta anotaron los procedimientos que se requirieron para resolver los problemas planteados. En un inicio, se plantearon preguntas que guiaron a los alumnos a obtener los resultados y emplear el software. Cuando se pidió resolver los últimos dos problemas, a diferencia de los primeros, no se les presentaron preguntas que guiaran a los estudiantes a obtener las respuestas. Ellos solos

manipularon el componente de la Línea algebraica y realizaron sus anotaciones y conclusiones en las hojas de respuesta.

| <i>¿Sesión 3</i> | |
|--|---|
| <i>Recurso o instrumento</i> | <i>Aspectos o elementos a Valorar</i> |
| Hojas de respuesta | Explicación de cómo obtuvieron los resultados de las restas planteadas, principalmente las dos últimas, ya que éstas no incluyen la explicación del procedimiento que se debe llevar a cabo. Reconocimiento de la conversión de resta a suma del simétrico del sustraendo. |
| Empleo del componente Línea Algebraica | Números simétricos. Suma de números simétricos. Resta o suma de números con signos iguales o diferentes. Facilidad en el empleo del software. |
| Videgrabaciones | Movimientos, gesticulaciones que indiquen el nivel de comprensión de la resta de números con signos iguales o diferentes. |

La tabla anterior nos indica que, al igual que en la sesión dos, la herramienta empleada para trabajar el tema de sustracción de números con signo, sirvió también para que los alumnos desarrollaron las actividades que fueron resolviendo en la computadora mediante el software ALNUSET. Nuevamente con la línea Algebraica. Inicialmente se trabajó con los números simétricos. Esto, con la intención de que los alumnos tuvieran una idea de cómo

poder abordar el tema de la sustracción, si pudieran cambiarla a una suma del simétrico del sustraendo, y aplicaran a esta las reglas de adición de números con signo que obtuvieron en la clase anterior.

En las hojas de respuesta anotaron los procedimientos que se requirieron para resolver los problemas planteados. En un inicio, se plantearon preguntas que guiaron a los alumnos a obtener los resultados y emplear el software. Cuando se pidió resolver los últimos dos problemas, a diferencia de los primeros, no se les presentaron preguntas que guiaran a los estudiantes a obtener las respuestas. Ellos solos manipularon el componente de la Línea algebraica y realizaron sus anotaciones y conclusiones en las hojas de respuesta.

| <i>Sesión 4</i> | |
|--|---|
| <i>Recurso o instrumento</i> | <i>Aspectos o elementos a Valorar</i> |
| Hojas de respuesta | Explicación de cómo plantearon las sumas o restas de los resultados de los problemas planteados. |
| Empleo del componente Línea Algebraica | Uso de los comandos adecuados para sumar o restar. Facilidad en el empleo del software. |
| Videograbaciones | Movimientos, gesticulaciones que indiquen el nivel de comprensión de las operaciones que se van a llevar a cabo en la resolución de problemas donde intervienen números con signos. |

En esta última tabla, observamos que, al igual que en las dos sesiones previas, la herramienta empleada para trabajar el tema de resolución de problemas mediante la adición y sustracción de números con signo, sirvió también para que los alumnos desarrollaran las

actividades que fueron resolviendo en la computadora mediante el software ALNUSET, auxiliándose igualmente de la línea Algebraica. Lo interesante en esta ocasión fue que los alumnos resolvieron desde un inicio, solos, los problemas planteados. Ellos abordaron los problemas, identificaron los datos ofrecidos así como la estrategia adecuada para su resolución. Como en esta ocasión la magnitud de los números involucrados en los problemas fue mayor a los que estuvieron empleando en las sesiones anteriores, se observó cuál fue la reacción de los estudiantes. Lo sobresaliente fue que identificaron cómo podían manipular la Línea Algebraica para facilitar el manejo de los números en cuestión y poder llegar a la solución buscada.

CAPÍTULO III

ANÁLISIS

La representación corporal de los números positivos y negativos.

3.1 CLASE 1. Zombis vs humanos

El primer acercamiento de los estudiantes a los números con signo se llevó a cabo mediante una actividad lúdica, la cual fue una representación de zombis y de personas normales. Los zombis representaron a los negativos, en tanto que las personas normales representaron a los números positivos. Las representaciones se hicieron mediante el uso de imágenes obtenidas desde internet, y que previamente ya se mostraron. De acuerdo con Bruner, uno de los pasos a seguir por el estudiante para aprender, es que el adulto induzca al niño para que intente hacer él mismo las actividades que previamente el propio adulto llevó a cabo. Para que la actividad se pueda realizar con éxito, se le puede presentar al niño como un juego para así minimizar las posibilidades de error. Ésta idea es una de las características más definitorias del juego para Bruner (1984).

En la secuencia didáctica que se llevó a cabo durante las actividades con los estudiantes, se retomaron seis de los siete organizadores del currículo de Rico (2001) –que ya fueron explicados en el capítulo I-, en las que se consideraron algunas situaciones del desarrollo de las mencionadas clases. Aunque no en la secuencia estricta que propone Rico, los organizadores empleados fueron:

- Fenomenología.- Cuando se relacionaron las imágenes que se les dieron a los estudiantes al inicio de las sesiones, con los números positivos y negativos. Simular y asociar a los personajes con los conjuntos de números a trabajar planteando una situación aditiva simple o una situación-problema a los alumnos.



Imagen 11.- Alumnos con las imágenes de un humano y un zombi, que relacionaron con números positivos y negativos, respectivamente

- **Sistemas de representación.-** Al personificar los números positivos y negativos con las imágenes mencionadas. Posteriormente, en la ubicación de los números en la recta numérica en el salón de clases, o en la Línea Algebraica, cuando se trabajó con el software.



Imagen 12.- Se observa la ubicación, sobre la recta numérica, de los números negativos (zombis) a la izquierda, y de los números positivos (humanos) a la derecha de una línea divisoria, que representa, a su vez, al cero.

- **Modelos.-** Cuando se representaron numéricamente las operaciones (agrupaciones) que se llevaron a cabo en la personificación de los estudiantes, y al trabajar con el software.



Imagen 13.- Se observa una agrupación de números positivos (humanos).

- Materiales, medios o recursos.- Los estudiantes tuvieron una participación activa desde el momento que formaron los equipos para la representación corporal de los números en la primera sesión, y al interactuar con *ALNUSET* en las sesiones 2, 3 y 4.



Imagen 14.- La dinámica propuesta despierta el interés en los alumnos por participar.

- Posibles errores y dificultades.- Siempre se presentan dificultades al poner en marcha un estilo de enseñanza o de aprendizaje nuevo. Con ello vienen errores de conceptos, de procedimientos y de ejecución. Aunque no se especifica en la secuencia didáctica, sobre la práctica se aprovecharon los errores de los alumnos que ellos mismos identificaron, lo que les permitió que replantearan su procedimiento inicial.

- Resolución de problemas.- Como una forma de poner en práctica la aplicación de la suma y resta de números enteros en la última sesión de actividades con los estudiantes, éstos resolvieron una serie de problemas apoyándose del software con el cual trabajaron las sumas y restas.

Cuando se analicen las sesiones 2, 3 y 4 se mostraran imágenes relacionadas a los currículos de Rico con las actividades desarrolladas empleando el software ALNUSET y la Línea Algebraica específicamente.

Recrear una situación, como la noción de números con signo con un tema actual que es del gusto o interés de los estudiantes, como es el de los zombis, sirvió como motivante para captar su atención y poder abordar el tema propuesto. En los programas de estudio de matemáticas (SEP 2011, p. 12) se establece que “la acción de los docentes es un factor clave, porque son quienes generan ambientes propicios para el aprendizaje, plantean situaciones didácticas y buscan motivos diversos para despertar el interés de los alumnos e involucrarlos en actividades que les permitan avanzar en el desarrollo de sus competencias”.



Imagen 15.- Alumnos queriendo participar en las actividades didácticas que se plantearon en el grupo

Retomando a Bruner, él dice que con la educación se favorece el proceso de resolución de problemas, la formación de conceptos, el lenguaje y el significado mediante

actividades secuenciadas, en las que se observa la aparición de una o más de las modalidades: enactiva, icónica o simbólica.

Durante el desarrollo de las actividades de campo en el presente trabajo de investigación, identificamos estas tres formas de representación por las que pasa un aprendizaje (Bruner. 1966, p. 59):

- *Icónica.- Representación, tanto por medios perceptibles, como una imagen. Mediante una serie de imágenes o gráficas sumarias que representan un concepto sin definirlo cabalmente.* Esta representación se dio cuando los estudiantes pasaron al frente con las imágenes de los zombis y de la gente normal. Aún no se establecían los valores de las representaciones, cuando los alumnos ya los intuían.



Imagen 16.- Alumnos pasan al frente a personificar las imágenes de zombis y humanos

- *Enactiva.- Aprendizaje mediante una acción determinada, sin palabras. Mediante un conjunto de acciones apropiadas para alcanzar cierto resultado. (representación prescriptiva).* Los alumnos fueron asociando con agrupaciones uno a uno de zombis y gente normal cuando se les indicó que estaban por enfrentarse ambos grupos. Ha de recordarse que a estas alturas los estudiantes no tenían aún la noción de números positivos o negativos, y menos todavía de las sumas o restas con este conjunto de números.



Imagen 17.- Agrupación uno a uno de cinco humanos con dos zombis

- *Simbólica.- Se da a través de un esquema abstracto que puede ser el lenguaje o cualquier otro sistema simbólico estructurado. Es la traducción de la experiencia en palabras que permiten otro tipo de transformaciones más complejas, mediante una serie de proposiciones lógicas o simbólicas derivadas de un sistema simbólico gobernado por reglas o leyes para formar y transformar las proposiciones.* Cuando los estudiantes ya les asignaron valores a las imágenes (números positivos o negativos), pudieron representar la ubicación de este conjunto de números sobre la recta numérica. Del mismo modo, lograron forjarse una idea de las operaciones a realizar mediante una suma o resta con números positivos y negativos.

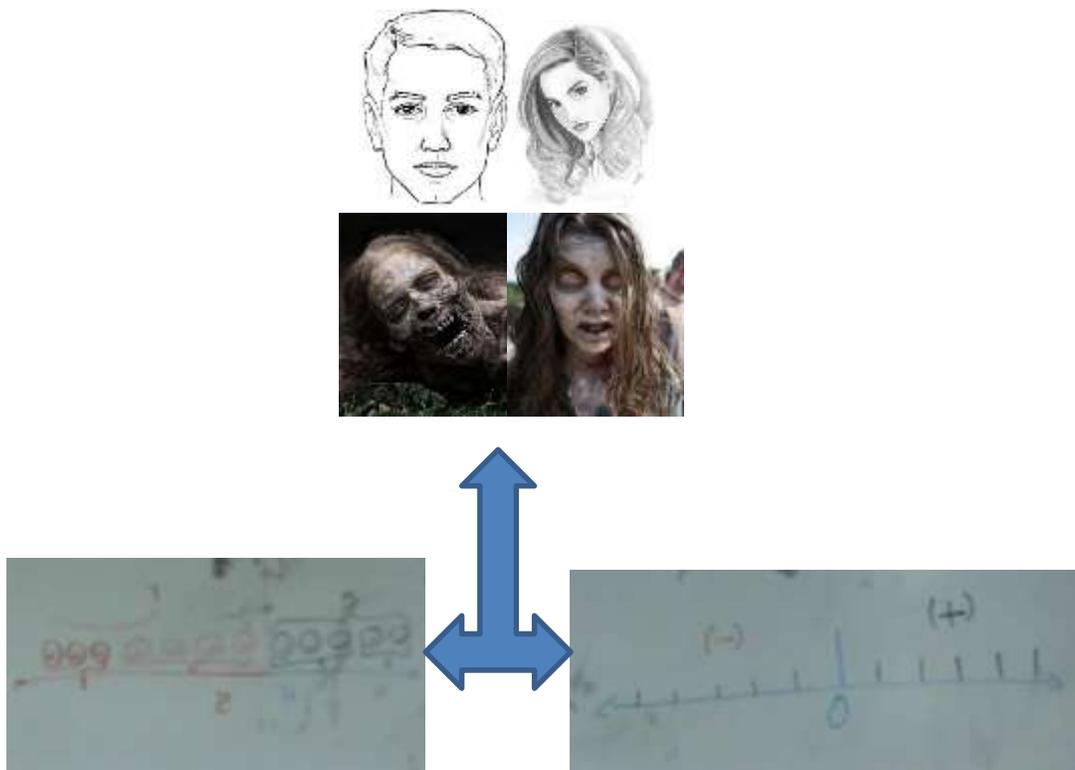


Imagen 18.- Asociación de valores a las imágenes de zombis y humanos, respecto a números negativos y positivos.

Toda actividad lúdica que se trabajó con los estudiantes durante la secuencia tiene este sello característico de Bruner. Trae tras de sí una intención pedagógica, didáctica, en la cual el niño aprende mientras juega. Va sentando las bases para una actividad cognitiva cada vez más compleja y no presenta actitudes de rechazo, común en muchos de los estudiantes, pues se inicia, como se ha dicho, con un juego.

El siguiente fragmento nos ofrece un ejemplo de cómo puede introducirse a los estudiantes en la actividad de reconocer y trabajar los números con signo, mediante una representación. Previamente se formaron equipos que representaron a los números positivos con la imagen de un humano, y a los números negativos con la imagen de un zombi. La actividad indicada nos lleva a uno de los pasos señalados por Bruner para que el estudiante aprenda. ¿Qué hacer cuando los dos conjuntos representan elementos de la misma especie?, ¿qué hacer cuando los dos conjuntos representan números negativos, o cuando los elementos son de dos conjuntos diferentes? Si bien es cierto apenas en esta sesión los estudiantes tuvieron su primer acercamiento a los números negativos de una manera informal, la dinámica en el desarrollo de la clase permitió que éstos empezaran a intuir cómo trabajar con los números positivos y negativos.

E₅ *“Equipo dos en estado zombi” (...), equipo tres en estado zombi (...)*”.

I: *“¿Dónde se van a colocar?”*

E₁: *“Allá” <<Señalando a la derecha del equipo dos>>.*

I: *¿Cuántos son en total?”*

Grupo: *“Cinco en estado Zombi (...) Porque se... agruparon”*

Los estudiantes se enfrentaron a una situación nueva para ellos. La actividad no les exigió una serie de pasos engorrosos o memorísticos que hubieran tenido que hacer con una forma tradicional de abordar el tema. En términos de Vigotsky, los estudiantes habían empezado a movilizar sus conocimientos previos (Zona de Desarrollo Real), como la suma

o resta de números naturales, a la hora de resolver la actividad. Si se les hubieran planteado operaciones de suma de números con signo directa e individualmente, quizás no hubieran logrado dar con el resultado de una forma tan natural, lo cual lograron con la interacción grupal. De este modo ampliaron su Zona de Desarrollo Próximo, ubicándose en una nueva Zona de Desarrollo Potencial.

En el ejercicio que a continuación se muestra, se colocan frente a frente el equipo de cinco humanos y el equipo de dos zombis:

I: *“(...) el confrontamiento es uno a uno y gana (...), ¿quién hubiera ganado, los humanos, o los zombis?”*

Grupo: <<Se escuchan varias voces de los estudiantes que responden>> *“Los humanos”*.

I: *¿Por cuántos?”*

Grupo: *“Por tres”*.

I: *¿Por qué por tres?”*

E₁: *“Porque cinco menos dos son tres”*.

La tarea llevada a cabo en este fragmento de la sesión 1, está enmarcada en las funciones fundamentales del juego que, de acuerdo con Bruner (1984, p. 211) nos dice que *“reduce las consecuencias frustrantes del niño. (El juego) le sirve de medio para poder explorar, pues se trata de una actividad para sí mismo, no para los otros”*. Con la participación abierta del grupo, sin que exista de por medio una calificación, los estudiantes se vieron inmersos en una dinámica de confianza, de explorar respuestas a partir de las representaciones de sus compañeros, lo que les permitió integrarse a las actividades y atreverse a responder.

Durante el desarrollo la de las sesiones trabajadas con los alumnos se identificó la misma estructura propuesta por Bruner. Esto es, la modalidad *enactiva*, la cual se identifica cuando los estudiantes han realizado las representaciones físicas de los humanos y zombis, que a su vez representan a los números positivos y negativos, respectivamente.

Cuando el estudiante ya es capaz de identificar el contexto en que pueden emplearse números positivos o negativos, pero aún sin definirlos, se encuentra ubicado en la modalidad *icónica*, pues la representación de la situación en el modelo matemático correspondiente, es una característica de esta modalidad.

La representación con símbolos convencionales de los números positivos y negativos (la colocación del signo que caracteriza y diferencia a cada uno de ellos), permite el acceso a la modalidad *simbólica*. Al enunciar los números tomando como referencia ya sea su signo, o la posición que dichos números tienen sobre la recta numérica o la línea algebraica, se están llevando a cabo transformaciones cognitivas complejas, lo cual es una característica de la modalidad simbólica, pues cuentan con una extensión conceptual en su repertorio tanto verbal, como cognitivo.

Cuando los estudiantes trabajaron con conjuntos del mismo elemento (humanos con humanos o zombis con zombis), reconocieron el tipo de operación que debían llevar a cabo: un agrupamiento entre ambos conjuntos, manteniéndose el mismo tipo de elemento que lo conformaba. Es decir, si aparecían dos conjuntos de humanos, el resultado es la unión de ambos conjuntos, y seguían siendo humanos en el resultado. Lo mismo sucedía cuando aparecían dos conjuntos de zombis. El resultado es la unión de ambos conjuntos, y seguían siendo zombis en el resultado.

Cuando se presentaron situaciones en las que los elementos de ambos conjuntos fueron distintos, la operación automática llevada a cabo por los estudiantes, sin que mediara la intervención del investigador, fue una resta.

Haber planteado con una actividad lúdica el primer acercamiento a los números con signo, favoreció que existiera un ambiente relajado, participativo y socializante con los estudiantes. La tensión que generalmente se presenta en los estudiantes por no equivocarse y dar con las respuestas que pide el profesor, disminuyó notablemente pues las actividades se desarrollaron siempre dentro del ámbito lúdico.

Podemos afirmar que este tipo de actividades son favorables para iniciar con temas que generalmente no muestran disposición por parte de los estudiantes. Habrá que planear cuidadosamente las actividades para que, tras el juego, venga el propósito matemático encubierto.

La suma y resta de números con signo, en el ambiente de ALNUSET. Resolución de problemas.

3.2 CLASE 2

La suma

La dinámica de trabajo fue una pareja en cada equipo de cómputo. Lo que se observó durante el desarrollo de las sesiones, fue el modo en que reconocieron la utilidad del software. Es lo que Radford (2006) denomina “*procesos de objetivación*”. Parte de ese proceso de objetivación son las actividades multisemióticas que el propio Radford denomina “*medios de objetivación*”, entre las cuales encontramos las palabras habladas, los gestos, operaciones en las hojas de respuestas, o la interacción misma con el software, entre otras.

Iniciamos la sesión dos con una exploración al software ALNUSET. Se eligió un software interactivo dinámico, que permitiera la participación directa del estudiante en el desarrollo de las actividades. Como se mencionó anteriormente, al inicio de este mismo capítulo, Rico (2011) señala siete organizadores del currículo escolar para planear la clase de matemáticas. Entre ellos menciona los materiales, medios o recursos con que cuenta el profesor para facilitar el logro de los propósitos que se esperan obtener, desde una perspectiva donde el alumno juega un rol participativo, no meramente receptivo.

Retomando las definiciones de Peacock (en Chiappini, 2011) de álgebra aritmética y álgebra simbólica, el trabajo con el software ayuda al alumno a ampliar su campo referencial de números como elementos de posibles resultados ante una situación dada. El tipo de álgebra que se aborda en el desarrollo de las sesiones es el del álgebra simbólica, ya que incluye el conjunto de números menores que cero, a diferencia del álgebra aritmética, que únicamente

considera el conjunto de los números naturales como soluciones a situaciones específicas, pero que en expresiones como $a - b$, sólo tienen sentido para $b < a$. Como en el desarrollo de las actividades llevadas a cabo en este trabajo de campo se especifica el empleo de números negativos, será el álgebra simbólica la que consideraremos para que el alumno le encuentre significado a los simbolismos que se emplearán.

Para que los estudiantes se vayan familiarizando con el software “ALNUSET”, específicamente con el componente de la Línea Algebraica, se dio una pequeña introducción en la que se les mostraron los elementos principales de la misma y los comandos a emplear.

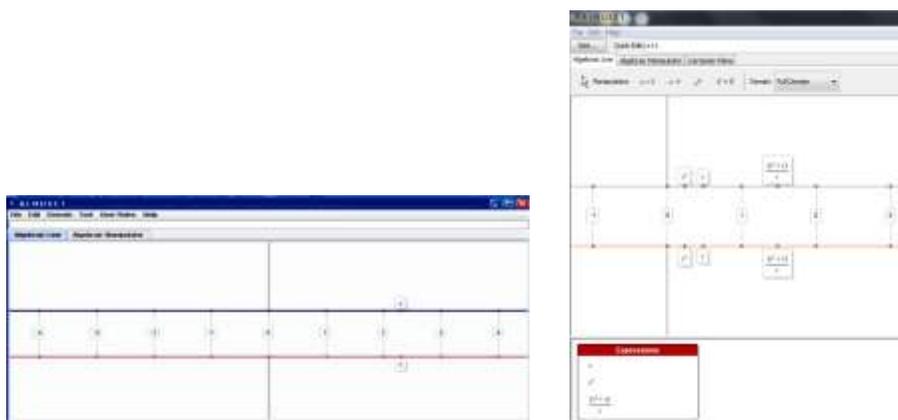


Imagen 19. Representaciones de la Línea Algebraica de ALNUSET.

Los alumnos reconocieron, al manipular los comandos de la Línea Algebraica, que en ésta el arrastre de puntos móviles es un indicio de que podemos emplear cualquier número dentro de un conjunto de números elegido (para el desarrollo de actividades de campo que se describe en este trabajo, se emplearon únicamente números enteros). Esta relación entre la variable y su objeto de referencia colocado fuera del arrastre, pueden ser explotados didácticamente para construir una idea más concreta de la noción de números positivos y

negativos, así como los vínculos que se establecen entre ellos en función a las operaciones básicas de suma y resta.

En este componente, tres modelos geométricos son aprovechados para construir sumas, multiplicaciones y potencias (y sus respectivas operaciones opuestas) entre números y las expresiones ya construidas en la línea algebraica. Por medio de estos modelos la operación entre dos expresiones asociadas a dos puntos en la línea algebraica se refleja en formas icónicas en la construcción geométrica del punto asociado al resultado de la expresión.

El componente de la línea algébrica de ALNUSET provee un comando que permite a los estudiantes encontrar las soluciones a ejercicios de suma o resta de números negativos y positivos. Este comando permite a los estudiantes mantener el control de la técnica con base en su espacio, percepción y experiencia motora. Así mismo, le permite al estudiante explotar la visualización, dinamismo e interactividad propias del sistema para encontrar el valor de las operaciones trabajadas. Un algoritmo del sistema calcula el resultado exacto con base en valores aproximados. Además, este algoritmo provee una retroalimentación dinámica, gráfica y numérica del proceso computacional con su interpretación. El resultado establecido por estos procesos computacionales, es la solución buscada.

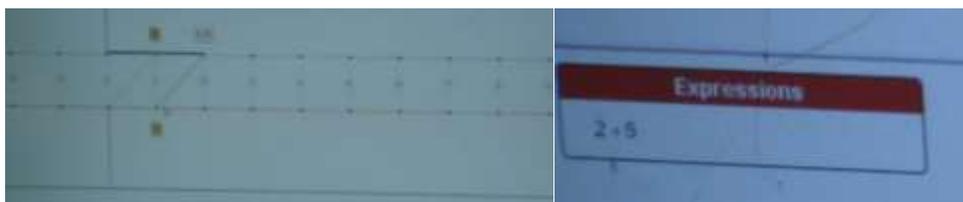


Imagen 20.- Dos formas de mostrar resultados en la Línea Algebraica

No hay que perder de vista que cuando se usa la tecnología en la escuela, no es en sí misma el objeto central de nuestro interés, sino el pensamiento matemático que pueden desarrollar los estudiantes bajo la mediación de dicha tecnología (Moreno y Waldegg, 2004).

De acuerdo con Radford (2006), la actividad matemática es esencialmente una actividad simbólica. Además, con el uso cada vez mayor de artefactos tecnológicos para la enseñanza y el aprendizaje, la semiótica nos ayuda a comprender la interacción entre los alumnos con dichos artefactos. Las parejas de estudiantes con que se trabajó, recurrieron a tres medios semióticos de objetivación: la palabra hablada entre ellos, los gestos de expresión cuando comprendieron el proceso y la ya mencionada interacción con el software.

Mientras que uno de los estudiantes leía la actividad, el otro la seguía desarrollando las acciones. Cuando comprendieron el modo en que se trabaja con el software, ambos trataron de explicarse lo que se veía en el monitor.

Al trabajar la suma de números con signos iguales los estudiantes no presentaron dificultades cuando se trató de agrupar –sumar– dos números con el mismo signo, ni siquiera cuando se sumaron dos números negativos, a pesar de no estar familiarizados con el trabajo de éste conjunto de números. En más de una ocasión los nombraron como a los positivos. Es decir, sin poner énfasis en el “*negativo...*” o “*menos...*” cuando hacían referencia a un número negativo. Por ejemplo, cuando se trató del número (-7), los estudiantes en ocasiones decían simplemente *siete*, en vez de decir *menos siete*, o *siete negativo*.

En el siguiente relato, los estudiantes E_1 y E_2 han seguido la secuencia explicada en las hojas de respuesta para la suma de dos números:

I: “¿*Qué vamos a hacer ahorita?*”

E₁: “(...) *lo pongo en el segundo negativo* <<Se ve en la pantalla el movimiento que hace con el software, recorriendo sobre la línea numérica azul el primer punto verde hasta el número (-2)>> *Luego acá dice más seis negativo. Entonces éste lo voy a... esta línea roja, de acá* <<posición en que estaba el punto verde sobre la línea numérica roja>> *lo voy a pasar hasta el seis negativo. (...) me da dos más seis negativo* <<omite señalar que el primer sumando es negativo, igual que el segundo>>, *y luego le doy en este cuadrito* <<un recuadro que aparece sobre las líneas numéricas que nos señala la operación que se llevó a cabo. En este caso aparece $-2 + -6$ >>, *luego me sale dos negativo más seis igual a ocho*”

I: “¿A ocho qué?”

E₁ y E₂: “Negativo”

I: “¿Será lo mismo ocho que ocho negativo?”

E₁: “Este...no”.

En este segmento los estudiantes omiten en diferente momento, que alguno de los sumandos es negativo, así como que el resultado de la suma también es negativo. A petición directa del investigador, dan clic sobre las Línea Algebraica y los estudiantes observan que aparece en la pantalla la operación desarrollada ($-2 + -6 = -8$).

Después de que en un principio no se dio lectura adecuada de los sumandos ni de la suma, al final de la actividad los estudiantes ya nombraron los números de acuerdo a su signo apoyados en el software.

Otro caso similar se observa en el siguiente desarrollo, en el que para la suma de $7 + (-3)$, la estudiante E₄ primero lee el sumando negativo como positivo, no especifica que sea “menos tres” o “tres negativo”. Después, la misma estudiante E₄ desplaza el punto del primer sumando sobre la línea numérica hacia la izquierda del cero (números negativos), cuando el sumando es positivo, en este caso siete.

I: “¿Qué nos dice?”

E₄: “Siete más tres. Ejercicio de los números enteros” <<Apenas se logra escuchar muy levemente que su compañero E₅ lee en voz alta “Siete más menos tres”, pero parece que E₄ no repara ello. Repite E₄>> “Siete más...tres”.

I: “¿Es tres?, ¿segura que es tres?”

E₄ y E₅ responden al unísono: “es menos tres”.

E₅ lleva a cabo la lectura de la actividad, mientras que E₄ la va desarrollando en el software. Al llegar al primer desplazamiento, mover el punto de la línea numérica azul a la posición del primer sumando (7), E₄ lo hace hacia la zona de los números negativos, y posiciona el punto en (-7). El investigador pregunta si éste es el número 7, a lo que E₄ responde con un “Sí”.

I: “(...) fíjate bien qué número es”
E₄: “siete... ¿menos siete?, ¿sería del otro lado?”
I: “¿Por qué del otro lado?”
E₄: “Porque, ah, ¿es positivo?” <<mientras, va corrigiendo la posición del punto en la línea numérica azul. Mueve el punto hasta llegar al número siete>>
I: “¿Por qué es positivo?”
E₄: “Porque... ¿no lleva el signo?”
I: “¿Y si no lleva el signo se considera que es positivo?”
E₄: “Sí.”

E₅ continúa con la lectura de la actividad, mientras que E₄ la va desarrollando con el software. Los siguientes desplazamientos ya son correctos, y la lectura de los sumandos, así como de la suma, ahora es correcta.

I: “¿A dónde va a estar el menos tres <<segundo sumando>>?”
E₄: “Para acá. (...), del negativo”
I: “¿De qué lado del cero está?”
E₄: “Del izquierdo”
I: “¿Cómo identificamos un número positivo y un número negativo?”
E₄: “Por su signo”

Al término de la actividad, los alumnos van reconociendo los números positivos y negativos ya sea por su signo, o por su ubicación sobre la recta numérica. La interacción entre ellos y con el software ha dado paso a un nuevo aprendizaje, el del conjunto de los números negativos. Los estudiantes lograron llegar de un nivel bajo o nulo en la interpretación de

números con signo, a un nivel de mayor dominio, lo cual les permitió identificar dichos números desde la ubicación en la línea numérica hasta su lectura.

Algunos de los obstáculos a los que se enfrentaron los alumnos durante el trabajo con el software durante la primera sesión en que se empleó, fue la falta de práctica en el uso del mouse, seguir indicaciones escritas. En un principio, no hubo independencia en el trabajo, sino que más bien los estudiantes esperaban la validación del investigador.

Moreno y Waldegg (2004, p. 39), respecto a la interacción entre los individuos, y entre éstos y los instrumentos que le ayudan a alcanzar un nuevo conocimiento, nos dicen que *“el mundo social influye en el sujeto mediante otros sujetos, los objetos socioculturales, las prácticas que han sido creadas por generaciones anteriores. Dos componentes tienen un papel primordial en este proceso: los sistemas semióticos de representación y la interacción social”*. Se observó durante el desarrollo de las sesiones la presencia de dichas relaciones. Primeramente, la mediación entre los alumnos. Desde el momento en que se encuentran dentro de un mismo espacio físico y que comparten intereses se da esa mediación a través de la interacción diaria. Los sistemas semióticos (como la escritura y el habla, entre otros) van implícitos en la interacción y nos ofrece elementos en que valoramos la conveniencia o no de los artefactos tecnológicos en el aprendizaje de los alumnos.

3.3 CLASE 3

La resta

La sesión tres dio inicio con una introducción a los números simétricos, pues interesaba que los estudiantes recordaran este tipo de números para poder acceder a la resta de números con signo de una manera indirecta. Menghini (1994, en Chiappini, 2011, p. 2), pone de relieve *“la necesidad de un enfoque axiomático para que los alumnos interioricen los principios desarrollados por Peacock, para entender el salto que se produce en el paso de la aritmética al álgebra y desarrollar el conocimiento y control de habilidades que son específicos del Álgebra simbólica, de acuerdo con Peacock. Por ejemplo, al pasar de la aritmética al álgebra, es importante entender que los símbolos algebraicos pueden representar no sólo los números utilizados en la aritmética, sino que otros números también, tales como: los números negativos”*.

Los alumnos mostraron cierta libertad de movimiento y de adaptación al software a partir de esta sesión. Después de resolver algunos ejercicios, se preguntó de manera general si identificaban qué tipo de números eran los sumandos que se habían sumado. (Aquéllos cuya característica es que sólo cambian de signo, que se encuentran a la misma distancia del cero, pero en sentidos opuestos). Hubo un periodo de silencio hasta que algunos estudiantes dieron la respuesta. Contestaron entonces que esos números se llaman *simétricos*. Después, se les inquirió respecto al resultado que se obtiene cuando se suman números simétricos. La respuesta (cero) se dio en una participación más colectiva, sin llegar a la totalidad del grupo. El significado de los símbolos es legitimado por las referencias semánticas de la naturaleza numérica (Chiappini, 2011).

I: *“Aquí nos pide que encontremos la suma, ¿de qué números? ¿Qué números anotamos?”*

Grupo: *“Cinco negativo más cinco”. “Menos cinco más cinco”*

I: *“¿Quién quiere pasar?”*

E₁: “Yo”

Pasa el estudiante al frente. Sin necesidad de ayuda, abre de inmediato el comando de suma ‘a + b’ arrastra los puntos que corresponden a cada sumando, al número indicado. Mediante el video proyector todo el grupo logra ver el proceso que lleva a cabo el estudiante. “Cinco negativo, y luego <<alguien responde ‘cinco positivo’>> cinco positivo, ¿cuánto le dio de resultado?”

Grupo: “Cero”



Imagen 21.- Estudiante E₁ pasa a resolver la suma de dos números simétricos sin intervención del investigador.

Durante el desarrollo de las actividades, los alumnos reconocen el proceso que, en términos de Moreno y Waldegg (2004, pp. 71 y 72), mencionados en capítulos anteriores, están llevando a cabo:

“Es un proceso que el estudiante ve desplegarse en la pantalla (...), sin su intervención directa. Desde luego esto no convierte al estudiante en un ‘desempleado’, puesto que ahora su trabajo consiste en interpretar matemáticamente los fenómenos nuevos que aparecen en la pantalla (y no tanto poner a prueba una capacidad operatoria sin referentes). Estos nuevos sistemas de representación (ejecutables) permiten al estudiante trabajar un problema desde diferentes enfoques cognoscitivos: tomar un punto de vista concreto (...) o establecer un punto de vista general: en lugar de analizar el comportamiento de un polinomio puede analizar el comportamiento de una familia de polinomios. Esto quizá indique que un cambio central dentro de la educación consistirá en abandonar el objetivo tradicional de fluidez algorítmica y sustituirlo por el objetivo de fluidez representacional. Es decir, que el estudiante pueda manejar un problema en diversos sistemas de representación y ser capaz de interpretar los resultados del tratamiento que se dé a tales sistemas mediante el instrumento ejecutor del que disponga. Los nuevos sistemas de representación hacen posible también un campo de experiencia que no estaba antes a disposición del estudiante”.

Con el apoyo del software ALNUSET, y más específicamente la Línea Algebraica, los estudiantes lograron tener un primer acercamiento a la sustracción de números con signo. Respecto al uso del software, Moreno y Waldegg (2004) nos señalan que “en la actualidad, los instrumentos computacionales (...) encarnan sistemas de representación que presentan

características novedosas: son sistemas ejecutables de representación que virtualmente ejecutan funciones cognitivas que antes eran privativas de los seres humanos". Ahora, las actividades deben estar diseñadas no solamente como una mera repetición mecánica de solución de ejercicios, en la que el alumno es pasivo, receptivo y sigue un procedimiento único que le da el profesor. Las actividades en clase deben estar dotadas de otros propósitos más enriquecedores, que promuevan un movimiento cognitivo más complejo en el alumno. Hay que buscar que el alumno, por ejemplo, ya no nos diga cuántos es dos más dos, sino que sea capaz de argumentar por qué dos más dos son cuatro. Que identifique en qué momento de su vida diaria, o escolar, puede emplear esa operación o qué significaría que dos más dos sean cuatro. Si se va a auxiliar de un instrumento (desde un cuaderno y lápiz, ábaco, calculadora, teléfono, entre otros) que interprete el resultado obtenido y pueda emplearlo para tomar una decisión.

Una intención secundaria de esta segunda sesión con el software, estuvo enfocada a que los estudiantes reconocieran que hay más de una forma de representar una sustracción, y pudieran ver ésta operación como la inversa de una adición. Es decir, convertir la sustracción de dos números, como la suma del minuendo más el simétrico del sustraendo, y llevar a cabo las reglas de la adición que se obtuvieron la clase anterior, pues introducir otras reglas (más complicadas incluso) sería cargarlos de información que puede ser confusa y que puede limitar el aprendizaje, en vez de promoverlo.

Con el dominio del software, logrado la sesión anterior, se propusieron a los alumnos una serie de sustracciones que, por parejas, debían trabajar en la Línea Algebraica. Inicialmente se les dejó que procuraran resolver las sustracciones por parejas, rescatando los conocimientos previos que tenían, tanto del manejo de la Línea Algebraica, como de la adición de números con signo. Algunos estudiantes lograron resolver las primeras

sustracciones, sin embargo, no lograban expresar ni verbalmente ni de forma escrita, alguna regla que se pudiera aplicar para la sustracción con el conjunto de números con los que estaban interactuando, como sí lo hicieron en la adición. Se les sugirió que cambiaran el sustraendo por su simétrico, y la sustracción por adición. Que resolvieran nuevamente las sustracciones que ya habían resuelto y compararan los resultados. Se sorprendieron al verificar que los resultados eran los mismos en todos los casos.

Tras continuar practicando este cambio en las otras restas, se presentaron dos dificultades principales en los alumnos. La primera, cuando el sustraendo era un número positivo y confundieron el signo “*menos*” de la resta, con el signo “*menos*” del número – siendo éste positivo-; la otra dificultad que se identificó fue por la conversión del sustraendo a su número simétrico. Sin embargo, pudieron superar ambos obstáculos de manera gradual. En lo que se refiere al uso de la Línea Algebraica, las actividades fueron llevadas un poco más independientes por los alumnos. Hubo menos dudas y las intervenciones del investigador fueron más para cuestionar cómo llegaron al resultado.

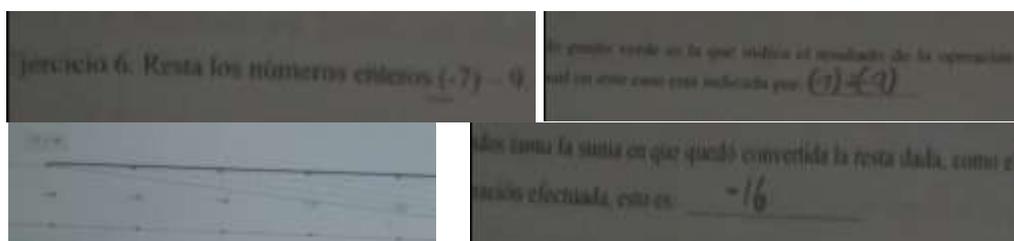


Imagen 22.- Conversión de una sustracción en suma del inverso del sustraendo, y posterior resolución en la Línea Algebraica de ALNUSET.

Con la integración a las clases de softwares interactivos, las matemáticas (como muchas otras ramas de la ciencia y de la sociedad), han sufrido la influencia de las tecnologías. Por medio de su producción hemos alterado nuestra estructura cognoscitiva y se han adquirido o adaptado nuevas estrategias para la incorporación al mundo exterior.

Recordemos que Vigotsky (en Ballestero, 2007, pp. 127 y 128) propuso que “*los procesos mentales superiores se consideran funciones de la actividad mediada, de esta manera establece tres clases de mediadores: instrumentos materiales, instrumentos psicológicos y otros seres humanos*”. El empleo de los instrumentos materiales (la computadora, el mouse, el monitor y el software, así como el uso de lápiz y papel donde registraron sus resultados) estuvo presente mediando en el aprendizaje de los alumnos. Los instrumentos psicológicos se identificaron cuando los estudiantes fueron introduciendo a su repertorio cognitivo esquemas numéricos que contemplan el uso de números negativos y el desarrollo de diversas estrategias para resolver un problema. El último mediador, los otros seres humanos, estuvo latente durante el intercambio de ideas entre los propios alumnos, así como del investigador.

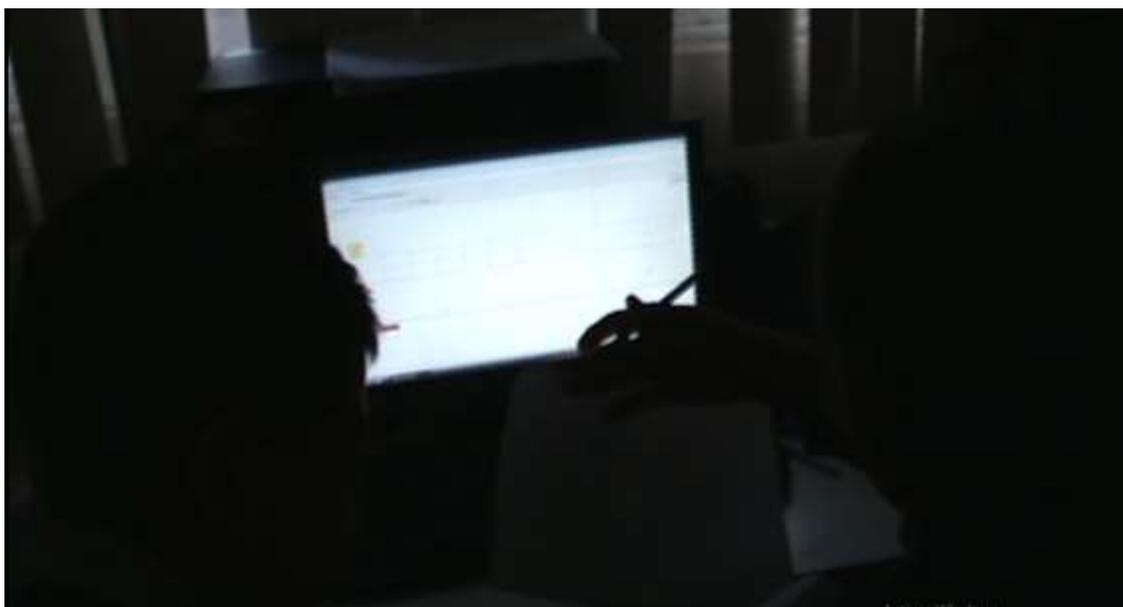


Imagen 23.- Mediadores considerados por Vigotsky que quedan establecidos en los procesos mentales superiores: Instrumentos materiales –monitor, hojas de respuesta-, instrumentos psicológicos –introducción a su repertorio de nuevos conocimientos- y otros seres humanos –trabajo en parejas para resolver las actividades planteadas.

Como se mencionó en el capítulo III del presente trabajo de investigación, de acuerdo a Newman, Griffin y Cole (1991), realizar un acercamiento a un concepto que dé indicios del

conocimiento real de un niño y la intervención del contexto sociocultural, indican que la expresión '*cambio cognitivo*' puede usarse para caracterizar un proceso que supone una interacción entre el mundo social y el cambio individual. En este proceso, se incluyen las nociones de reestructuración, invención y direccionalidad que implica dicho desarrollo. De acuerdo con los mismos autores, la creación de un término nuevo constituye una forma de indicar que los fenómenos ya conocidos se reconceptúan. Por lo que en el presente apartado se identificó que los estudiantes han reconceptuado la sustracción y ahora la pueden ver, también, en términos de un suma algebraica.

3.4 CLASE 4

Resolución de problemas

Durante la última sesión, los ejercicios propuestos a los alumnos fueron la resolución de problemas en los que el modelamiento debía hacerse con números positivos y negativos. Se observó que los alumnos lograron identificar qué tipo de número debía emplearse a cada situación. Además, lograron manipular con más seguridad los comandos de la Línea Algebraica.

Comprender cómo pueden emplear los números consigo en una situación específica, por ejemplo en la resolución de problemas, es uno de los propósitos de los temas de matemáticas, en general, y los números con signo no son la excepción. Por ello, durante la última sesión se les propusieron una serie de problemas a los alumnos que deberían resolver.

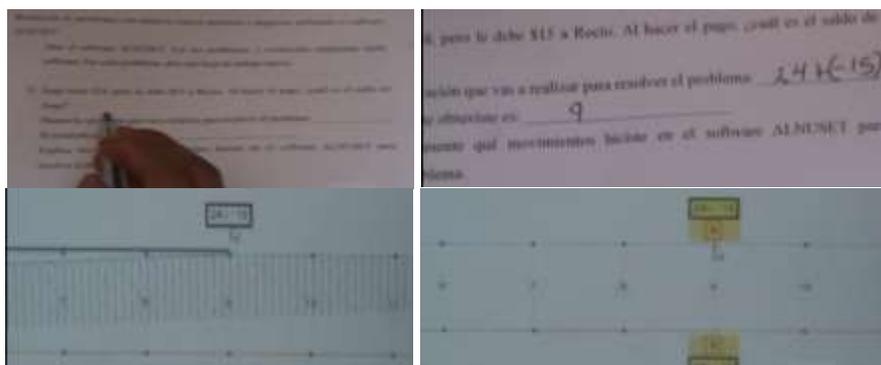


Imagen 24.- Resolución de problemas empleando números con signo, y el software ALNUSET

El investigador observó el trabajo de una pareja en el último problema. La diferencia entre éste y los otros problemas, radica principalmente en la magnitud de las cantidades con las que se va a trabajar. No obstante ello, los estudiantes encontraron la forma de trabajar con esas cantidades encontrando, por sí solos, una herramienta del software que permite alejar o acercar el área de trabajo (el zoom).

Este trabajo con la pareja que resolvió el último problema, fue uno de los casos más representativos. En dicho problema se incluyeron números de tres cifras (centenas). Hasta este momento, los ejercicios estaban enfocados a números relativamente pequeños (de una cifra, o hasta dos, no más allá del veinte). Los alumnos en cuestión, más allá de verlo como un obstáculo, se dieron a la tarea de buscar cómo podían adecuar la Línea Algebraica para dar solución al problema. Exploraron los comandos que tenían a la mano. Manipularon el software y, de manera independiente, sin la mediación del investigador o de otro compañero, obtuvieron el resultado al problema propuesto.

Lo anterior nos ofrece un indicativo de que cuando las personas logran asimilar, apropiarse de los aprendizajes de los temas abordados para posteriormente darles una utilidad en una situación concreta, el manejo adecuado de las herramientas que se emplean debe estar directamente relacionada con las actividades didácticas planeadas. Los instrumentos por sí solos no ofrecen ninguna garantía de que los estudiantes van a aprender. Tampoco el hecho de que deban ser empleados de manera individual favorece el aprendizaje, pues los autores que en el presente trabajo de investigación se retomaron para darle un sustento teórico a todo el desarrollo de las clases, recomiendan que exista una interacción entre los estudiantes, y entre los estudiantes y el profesor, pues de esta manera se puede generar un ambiente de trabajo adecuado para el aprendizaje en los alumnos.

I: *“En este problema vamos a trabajar con números grandes, ¿verdad? Habla de... centenas. ¿Qué hicimos en el programa de ALNUSET para poder ver los números?”*

E₁₂: *“Alejarlo”*

I: *“¿En dónde le tuvo que dar clic tu compañero? <<Para acercar la imagen. La estudiante señala con el dedo el ícono  que sirve para acercar o alejar la imagen en pantalla. Aunque la estudiante dijo ‘acercar’, en realidad lo que se hizo fue alejar la imagen en pantalla>>”*

E₁₂: *“Para que se agrandara y veamos los números más grandes” <<Al hacer clic sobre el ícono  logran que se vean números de mayor magnitud, que es a lo que se refiere la estudiante>>”*

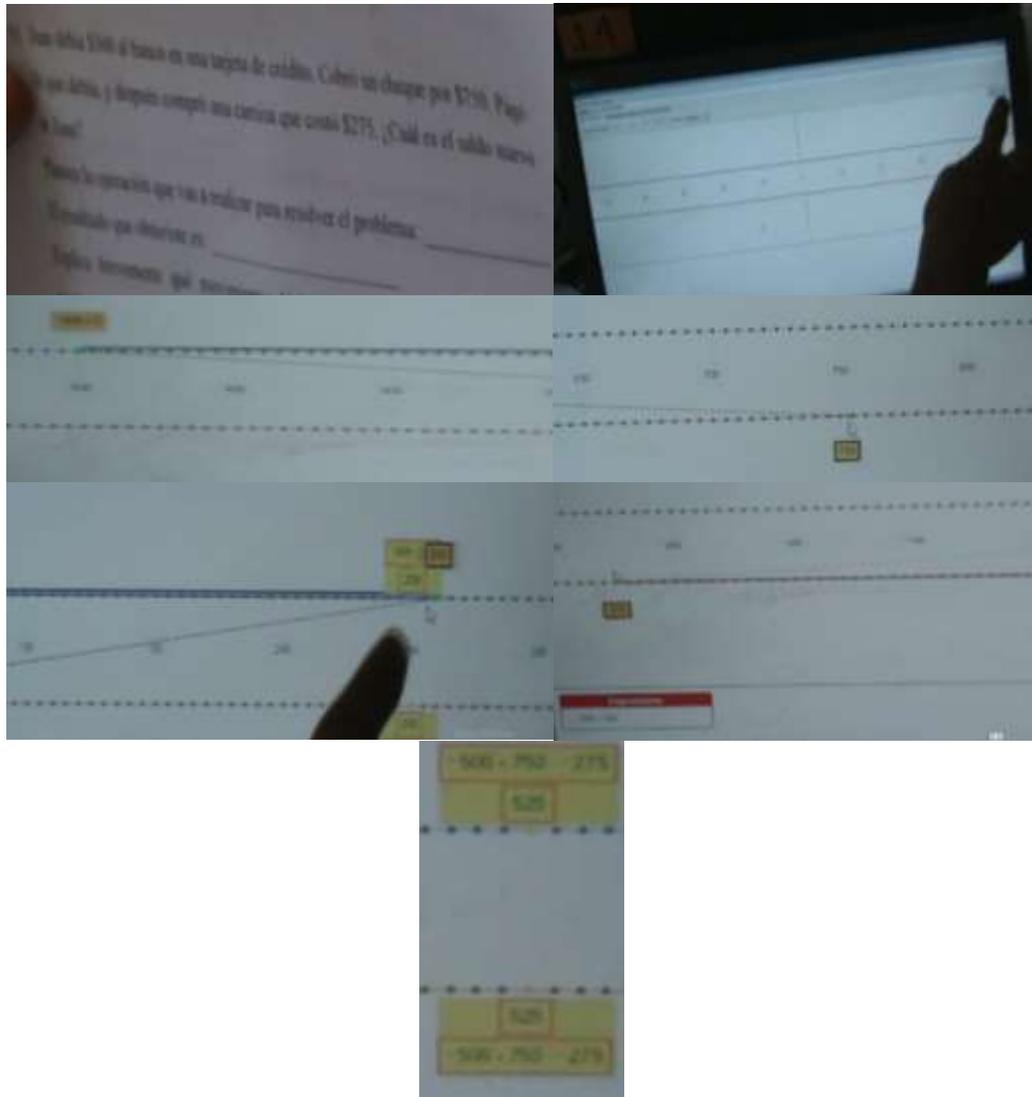


Imagen 25.- Secuencia de resolución del último problema, desde cómo los estudiantes plantean el problema presentándolo como una suma algebraica, hasta cómo lo resuelven empleando comandos no vistos durante las clases de la Línea Algebraica de ALNUSET

Artigue (2002, en Moreno y Waldegg, 2004) dice que la diferencia entre un objeto y un artefacto radica en que el instrumento es “una entidad mixta, parte artefacto, parte esquemas cognitivos los cuales lo hacen un instrumento”. Verillon y Rabardel, retomados por Moreno y Waldegg (2004) proponen un modelo de Situaciones de la Actividad Instrumentada, el cual considera las situaciones de actividades donde el artefacto sufre una transformación:

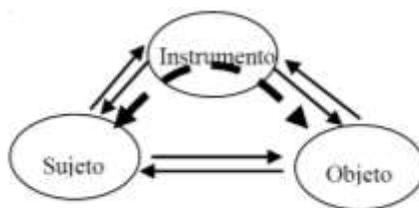


Imagen 26.- Modelo propuesto por Verillon y Rabardel (en Moreno y Waldegg, 2004), que muestra las relaciones entre instrumento, sujeto y objeto

Dicho modelo muestra las relaciones que se dan entre el sujeto, el instrumento y objeto, bajo un modelo de situaciones de la actividad instrumentada. Primero, encontramos las relaciones directas que se dan de manera respectiva:

Sujeto-Instrumento, Instrumento- Objeto y Sujeto-Objeto.

Estas relaciones son bien conocidas bajo cualquier otro tipo de actividad, la novedad radica en la línea punteada que intenta explicar cómo el sujeto se apodera del objeto a partir de la mediación del instrumento. En nuestro caso concreto (la resolución de un problema), los alumnos se apoderan del objeto (el conjunto de los números con signo) mediante el uso continuo del instrumento (ALNUSET). Entonces, ya no se presenta únicamente una relación bilateral entre sujeto y objeto, sino que el sujeto ya incorporó al objeto a su proceso cognitivo.

El trabajo con intenciones lúdicas, con el auxilio de diversos instrumentos tecnológicos, el acompañamiento de un compañero o la orientación del docente (sin que vaya más allá de una mera recomendación) han sido las piedras angulares en el desarrollo del presente trabajo de investigación, donde queda para el análisis más profundo las ventajas que ofrece el uso de instrumentos diversificados en el desarrollo de las clases, para lograr captar la atención y entusiasmo de los alumnos, y con ello, allanar un poco el camino para la disposición al aprendizaje.

CONCLUSIONES

CONCLUSIONES

En esta tesis se buscó indagar sobre la exploración de conceptos de números positivos y negativos, y sobre la generación de estrategias para plantear y resolver problemas que involucren a este conjunto de números auxiliándose de un software interactivo.

Lo que se hizo en el desarrollo del trabajo de campo fue, primero, realizar una exploración rápida en la primera sesión, para identificar si los alumnos del grupo en cuestión habían tenido un acercamiento o noción del conjunto de números con signo. Tanto el profesor titular del grupo, como los propios estudiantes, afirmaron que no habían trabajado con este tipo de números. Enseguida se llevaron a cabo una serie de actividades lúdicas en las que se emplearon imágenes de humanos y zombis que se les dieron a unos alumnos, quienes pasaron al frente del salón para personificarlas. A los alumnos que se quedaron en sus lugares se les dieron unas hojas en las que venían señalados los movimientos que realizaron los estudiantes con las imágenes. Esto llevó a que los estudiantes relacionaran las imágenes con un tipo de números: los positivos con los humanos y los negativos con los zombis. Al término de la sesión, quien esto escribe centró las participaciones de los alumnos para que reconocieran a cada conjunto de números sobre a qué lado del cero, sobre la recta numérica, se ubican, empleando meramente números.

En la sesión dos, los alumnos tuvieron un primer acercamiento al software *ALNUSET*. El trabajo, por binas, se llevó a cabo con la ayuda de las hojas de actividades, en las que se incluyó una explicación breve sobre cómo emplear dicho software. También, mediante el apoyo de un cañón proyector, se les orientó cómo manipularlo, reconociendo los elementos de la Línea Algebraica y sus

componentes. Se pidió a los estudiantes que resolvieran una serie de sumas que fueron aumentando en cuanto al nivel de complejidad, respetando en todo momento el tipo de números con los que se estaba trabajando. Fueron los propios estudiantes quienes acordaron algunas reglas de cómo operar una suma con números de un mismo signo, y cómo llevar a cabo la operación cuando los sumandos son de diferente signo. Es decir, *“si sumamos números con el mismo signo, los números se suman y el resultado final tiene el signo de los sumandos. Cuando sumamos números con signos diferentes, éstos se restan y el resultado tiene el signo del número mayor”*.

En la tercera sesión, los alumnos trabajaron la resta de números con signo. Al inicio de la clase, se trató brevemente el tema de números simétricos (éstos números sí los habían trabajado previamente en clase), con la intención de que los estudiantes contaran con otro elemento al tratar la resta de números con signo. Al igual que en la suma, en la resta se les pidió que resolvieran una serie de operaciones que fueron incrementando en cuanto al nivel de complejidad. A diferencia de la suma, para la resta los alumnos no encontraron alguna regla directa que abarcara todos los casos que se trabajaron. Algunos alumnos, al recordar los números simétricos, trataron de ver cómo podrían emplearlos en la resta. Fueron improvisando estrategias, intercambiando opiniones, hasta que se les orientó a que reconocieran qué sucedería si convertíamos la resta, en suma, pero con el simétrico del sustraendo. Los mismos estudiantes fueron reconociendo que las reglas que se aplicaron en la suma, cumplían también en esta conversión, e identificaron que era más fácil llegar a los resultados cambiando la resta, a suma, con el simétrico del sustraendo.

Para la última sesión, las actividades que se llevaron a cabo fueron el planteamiento y resolución de problemas, donde intervienen números con signo. Igual que en la suma y resta, los problemas fueron incrementando su nivel de dificultad. Se abordaron problemas cuyo planteamiento fuera más allá de únicamente sumar o restar números con el mismo signo. Se buscó que la resolución de éstos implicara, desde el planteamiento, el uso de las dos operaciones que trabajamos y la aplicación del conjunto de números con signo. Es de reconocer que aproximadamente un 40% de los estudiantes, sin que mediara intervención alguna, pudieron manipular la Línea Algebraica para adecuarla a la magnitud de los números del último problema, que incluía cantidades de hasta centenas, cuando los problemas iniciales, así como las sumas y restas que se habían trabajado en las sesiones anteriores, no iban más allá de las decenas.

Es importante incorporar y promover el uso de la tecnología en el salón de clases, pues actualmente en la vida cotidiana, los instrumentos tecnológicos están a la vanguardia. En esta tesis se utilizaron diferentes instrumentos para que los estudiantes adquirieran la noción de número negativo, en primer lugar (usando las imágenes que se han descrito anteriormente), y para que logran llevar a cabo sumas y restas con este conjunto de números auxiliándose del software *ALNUSET*. Asimismo, que logran plantear y resolver problemas en los que se empleen números positivos y negativos.

Tres de los principales resultados de esta tesis están relacionados con:

- 1. Lograr que los alumnos adquirieran nociones de los números positivos y negativos, así como su ubicación sobre la recta numérica, mediante actividades lúdicas en el salón de clases.

- 2. La utilización de diferentes técnicas y recursos que les permitieron explorar estrategias para la resolución de las operaciones de suma y resta de números con signo, auxiliándose del software interactivo *ALNUSET*.
- 3. Que los estudiantes cuenten con más estrategias para el planteamiento y resolución de problemas, en los que intervengan este conjunto de números, apoyándose tanto en el software, como en el intercambio de ideas con sus pares que han comprendido más rápido el tema.

El primer punto, fue alcanzado por el 100% de los alumnos, ya que al término de la primera sesión fueron ellos quienes dedujeron la ubicación de los números respecto al cero.

El segundo punto se cubrió en un 75%, ya que tanto en la primera sesión en el salón de clase, como en las subsecuentes en el salón de computación, los alumnos lograron resolver situaciones de agrupación de elementos cuando éstos son del mismo signo, o cuando son de signo diferente. Principalmente en las sumas con el conjunto de números trabajados. Se notó que el empleo del software y el acompañamiento de un compañero facilitaron la adquisición de los aprendizajes esperados. La exploración del software permitió que los alumnos se sintieran más libres de moverse en el ambiente de la Línea Algebraica y con ello lograran resolver las actividades propuestas.

El tercer punto se cubrió en un 70%, de acuerdo a los resultados obtenidos. Los alumnos lograron, entre otras cosas, plantear problemas en modo de suma de números con signo en vez de una resta directa. Por ejemplo, en el problema 5 de la última sesión, que dice *“Juan debía \$500 al banco en una tarjeta de crédito. Cobró un cheque por \$750. Pagó lo que debía, y después compró una camisa que costó*

\$275. ¿Cuál es el saldo nuevo de Juan?”, los alumnos lograron plantearlo de la siguiente manera: $\$750 + - \$500 + - \$275$. En vez del planteamiento que el 30% restante empleó: $750 - 500 - 250$. En ambos casos el resultado es el mismo (-25), sin embargo, la diferencia en el planteamiento del primer grupo de alumnos nos señala que lograron adquirir el concepto, primero, de números positivos y de suma algebraica empleando las reglas que ellos mismos habían obtenido durante las clases anteriores, en tanto que en el segundo grupo de alumnos se quedaron con una idea aritmética del problema y su resolución a modo de restas directas. Aunque resaltamos que adquirieron la noción de números negativos pues emplearon este tipo de números en el resultado.

Si bien es cierto que en un principio los alumnos se sintieron desconfiados al emplear el software, con la exploración inicial que realizaron y la identificación de los comandos con los que iba a trabajar se sintieron más seguros. Al grado que, como se mencionó anteriormente, hubo alumnos que pudieron encontrar los números más grandes del último problema sin intervención del investigador.

Se muestran a continuación los porcentajes respecto a la resolución de ejercicios o problemas que presentaron los alumnos con quienes se trabajó en función al grado de dificultad que mostraron tales ejercicios:

Sesión dos.- Suma de números con signo:

Nivel sencillo: 15%

Nivel medio: 46%

Nivel difícil: 39%

Sesión tres.- Resta de números con signo:

Nivel sencillo: 15%

Nivel medio: 54%

Nivel difícil: 31%

Sesión cuatro.- Resolución de problemas:

Nivel sencillo: 20 %

Nivel medio: 40%

Nivel difícil: 40%

El trabajo con los números con signo no termina aquí. Podemos aprovechar los resultados obtenidos en esta experiencia para darle continuidad y abordar otros temas como el producto o división de números con signo. Inclusive, en la resolución de los diferentes tipos de ecuaciones, usando cualquiera de los tres componentes de *ALNUSET*. De este modo podemos lograr que los alumnos se interesen más en cuestiones de la matemática, y abran su perspectiva hacia nuevos horizontes.

BIBLIOGRAFÍA

- Alatorre, S., Cortina, J.L., Sáiz, M., & Méndez, A. (Eds.). (2006). Proceedings of the Twenty Eighth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Mérida, Mexico: Universidad Pedagógica Nacional.
- Angelini, V. (2012). The software AlNuSet and the resolution of algebraic equations. *Scientifica. Acta 6. No. 1*, 3-11.
- Ballesteros, E. (2007). Instrumentos psicológicos y la teoría de la actividad instrumentada: fundamento teórico para el estudio del papel de los recursos tecnológicos en los procesos educativos. *Cuadernos de investigación y formación matemática.*, 125-137.
- Barros, B., Vélez, J., & Verdejo, M. F. (2013). Aplicaciones de la Teoría de la Actividad en el desarrollo de Sistemas Colaborativos de Enseñanza y Aprendizaje. Experiencias y Resultados. *Inteligencia artificial revista iberoamericana de inteligencia artificial*, 67-76.
- Beatty, R., & Geiger, V. (2009). Tecnología, comunicación y colaboración: repensando las comunidades de investigación, aprendizaje y práctica. En C. Hoyles, & J. Lagrange, *Matemáticas Educación y tecnología: repensar el terreno*. Springer, Boston, MA: Nueva Serie de Estudios de ICMI, vol 13.
- Bruner, J. (1969). Capítulo 3. Notas sobre una teoría de la instrucción. En J. Bruner, *Hacia una teoría de la instrucción* (págs. 52-97). México, D. f.: UTEHA.
- Bruner, J. (1986). Capítulo 11. Juego, pensamiento y lenguaje. En J. Bruner, *Acción, pensamiento y lenguaje* (págs. 211-219). México: Alianza Editorial Mexicana.
- Chiappini, G. (2011). The role of technology in developing principles of symbolic algebra. *CERME*, 429-439.
- Chiappini, G., Pedemonte, B., & Robotti, E. (2008). Using Alnuset to construct the notions of equivalence and equality in algebra. *IFIP World Computer Congress. TC 3*, 345-348.
- Cobb, P., & Bauersfeld, H. (1995). *The emergence of mathematical meaning*. USA: LEA.
- Ferrara, F., Pratt, D., & Robutti, O. (2006). Cognitive aspects of learning and teaching with technology. En Á. Gutiérrez, & P. Boero, *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (págs. 237-274). Rotterdam: Sense Publishers.
- Hernandez, G. (1998). *Paradigmas en psicología de la educación*. México: Paidós.
- Ivic, I. (1994). Lev Semionovich Vygotsky. *Perspectivas*, 773-799.
- Moreno, L. E., & Waldegg, G. (2004). *Aprendizaje, matemáticas y tecnología. Una visión integral para el maestro*. México, D. F.: Santillana.

- Ortíz, G., & Chávez, S. (2008). La teoría de la actividad en la enseñanza. *Caminos abiertos*, 1-7.
- Pedemonte, B., & Chiappini, G. (2008). Álgebra en SET numérico: un sistema para enseñar y aprender álgebra. *Revista internacional de educación continua en ingeniería y aprendizaje permanente*, 627-639.
- Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. *PME-NA Vol. 1*, 2-21.
- Radford, L. (2006). Semiótica y educación matemática. *RELIME (Revista Latinoamericana de investigación en matemática educativa)*, 7-21.
- Radford, L. (2012). Towards an embodied, cultural, and material conception of mathematics cognition. *ZDM*, 4536 - 4545.
- Radford, L. (2013). On the role of representations and artefacts in knowing and learning. *Springer Science Business Media Dordrecht.*, 1-18.
- Rodríguez, L. (2011). *Programas de Estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Secundaria. Matemáticas*. México, D. F.: Secretaría de Educación Pública.
- Rojano, T. (2002). Mathematics Learning in the Junior Secondary School: Student's Access to Significant Mathematical Ideas. En L. D. English, *Handbook of international research in mathematics education* (págs. 143-164). New Jersey: LEA.
- Sánchez, F. (2012). *Matemáticas I. Construcción del pensamiento*. México, D. F.: Fernández Editores.
- Vygotsky, L. (1978). Interacción entre aprendizaje y desarrollo. En M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner, & E. Souberman, *Mente y sociedad: El desarrollo de procesos psicológicos superiores* (págs. 79-91). Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Vygotsky, L. S. (Original 1934 (traducción, 1995)). *Pensamiento y lenguaje. Teoría del desarrollo cultural de las funciones psíquicas*. Moscú (original). Argentina (traducido): Ediciones Fausto.
- Wertsch, I., & James, V. (1985). *Culture, communication, and cognition: Vygostkian perspectives*. New York, USA.: Cambridge University Press.

ANEXOS

BLOQUE IV, PRIMER AÑO DE SECUNDARIA: OPERACIONES CON
NÚMEROS CON SIGNO.

Escuela: Secundaria # 99. "Margarita Maza de Juárez". T. V. Fecha: _____

Nombre: _____ Edad: _____

Nombre: _____ Edad: _____

Sesión 2.

Resolución de operaciones –sumas y restas- con números enteros positivos y negativos utilizando el software ALNUSET.

- 1) Suma los números enteros $2 + 5$.
 - Abre el software ALNUSET. Aparecerá una ventana de dialogo que dice "Registrar ALNUSET". Dale clic en "Evaluar". Verás que en la pantalla aparecen dos líneas paralelas, una azul y una roja.
 - Selecciona el comando $a+b$. (Aparecen tres recuadros. Dos sobre la línea azul y uno sobre la línea roja. Cada recuadro tiene asociado un punto verde). Coloca el cursor (la flechita blanca) sobre el primer punto verde, el cual representa al primero de los sumandos. De momento está colocado en un valor cualquiera, aún no en el valor del sumando dado. Haz clic con el botón izquierdo del ratón y, sin soltarlo, desplaza el punto hasta llegar al valor del sumando indicado. En este caso, el número 2 sobre la línea azul. Recuerda que, por tratarse de un número positivo, el desplazamiento tiene que hacerse hacia la derecha del cero.
 - Haz clic sobre el punto verde de la línea roja, y arrástralo hasta recorrer el valor del segundo sumando, en este caso, el número 5. Como se trata también de un número positivo, el desplazamiento tiene que hacerse hacia la derecha del cero.
 - Verás que en la segunda ventana, encima de la línea azul, aparece la suma que se desea realizar. El punto verde asociado a dicha suma está ahora colocado en el resultado de la suma, en este caso el número 7.
 - Haz clic sobre el recuadro del resultado. Verás que ahora queda resaltado en amarillo el punto asociado al resultado. Haz clic sobre ese punto. Verás que quedan resaltados tanto la suma dada como el resultado.
 - Todo este proceso es el que llevamos a cabo para sumar.
 - Observa que en la parte inferior izquierda de la pantalla surgió una nueva ventana, en la cual aparece la palabra "*Expression*" arriba de la operación que se efectuó.
- 2) Suma de los números enteros $(-4) + (-1)$.
 - Selecciona el comando $a+b$. Coloca el cursor sobre el primer punto verde (el que representa al primero de los sumandos). Haz clic con el botón izquierdo del ratón y, sin soltarlo, desplaza el punto hasta llegar al valor del sumando indicado. En este caso, el número (-4) sobre la línea azul. Recuerda que, por tratarse de un número negativo, el desplazamiento tiene que hacerse hacia la izquierda del cero.
 - Haz clic sobre el punto verde de la línea roja, y arrástralo hasta recorrer el valor del segundo sumando, en este caso, el número (-1) . Como se trata también de un número negativo, el desplazamiento tiene que hacerse hacia la izquierda del cero.
 - Da clic en el recuadro que apareció sobre la línea azul. Observa que en el recuadro blanco se indica ahora la operación que se llevó a cabo, que en este caso es _____ . El resultado de esta operación que realizaste es _____.
 - Finalmente, haz clic sobre el punto amarillo. Quedan resaltados la operación y el resultado.

- 3) Suma de los números enteros $(-2) + (-6)$.
- Selecciona el comando $a+b$. Coloca el cursor sobre el primer punto verde (el que representa al primero de los sumandos). Haz clic con el botón izquierdo del ratón y, sin soltarlo, desplaza el punto hasta llegar al valor del sumando indicado. En este caso, el número (-2) sobre la línea azul.
 - Haz clic sobre el punto verde de la línea roja, y arrástralo hasta recorrer el valor del segundo sumando, en este caso, el número (-6) .
 - Da clic en el recuadro que apareció sobre la línea azul. Observa que en el recuadro blanco se indica ahora la operación que se llevó a cabo, que en este caso es _____ . El resultado de esta operación que realizaste es _____ .
 - Finalmente, haz clic sobre el punto amarillo.
- 4) Suma de los números enteros $7 + (-3)$.
- Selecciona el comando $a+b$. Coloca el cursor sobre el primer punto verde (el que representa al primero de los sumandos). Haz clic con el botón izquierdo del ratón y, sin soltarlo, desplaza el punto hasta llegar al valor del sumando indicado. En este caso, el número 7 sobre la línea azul.
 - Haz clic sobre el punto verde de la línea roja, y arrástralo hasta recorrer el valor del segundo sumando, en este caso, el número (-3) .
 - Da clic en el recuadro que apareció sobre la línea azul. Observa que en el recuadro blanco se indica ahora la operación que se llevó a cabo, que en este caso es _____ . El resultado de esta operación que realizaste es _____ .
 - Finalmente, haz clic sobre el punto amarillo.
- 5) Suma de los números enteros $1 + (-5)$.
- Selecciona el comando $a+b$. Coloca el cursor sobre el primer punto verde (el que representa al primero de los sumandos). Haz clic con el botón izquierdo del ratón y, sin soltarlo, desplaza el punto hasta llegar al valor del sumando indicado. En este caso, el número 1 sobre la línea azul.
 - Haz clic sobre el punto verde de la línea roja, y arrástralo hasta recorrer el valor del segundo sumando, en este caso, el número (-5) .
 - Da clic en el recuadro que apareció sobre la línea azul. Observa que en el recuadro blanco se indica ahora la operación que se llevó a cabo, que en este caso es _____ . El resultado de esta operación que realizaste es _____ .
 - Finalmente, haz clic sobre el punto amarillo.
- 6) Suma de los números enteros $3 + 4 + (-5)$.
- Selecciona el comando $a+b$. Coloca el cursor sobre el primer punto verde (el que representa al primero de los sumandos). Haz clic con el botón izquierdo del ratón y, sin soltarlo, desplaza el punto hasta llegar al valor del sumando indicado. En este caso, el número 3 sobre la línea azul.
 - Haz clic sobre el punto verde de la línea roja, y arrástralo hasta recorrer el valor del segundo sumando, en este caso, el número 4 .

- Da clic en el recuadro que apareció sobre la línea azul. Observa que en el recuadro blanco se indica ahora la operación que hasta ahora se ha llevado a cabo. En este caso es _____ . El resultado de esta operación que realizaste es _____ .
 - Vuelve a seleccionar el comando $a+b$. Coloca el cursor sobre el primer punto verde (el que representa al primero de los sumandos). Haz clic con el botón izquierdo del ratón y, sin soltarlo, desplaza el punto hasta llegar al valor del resultado de la suma parcial anterior (3+4). En este caso, el número 7 sobre la línea azul.
 - Haz clic sobre el punto verde de la línea roja, y arrástralo hasta recorrer el valor del tercer sumando, en este caso, el número (-5).
 - Da clic en el recuadro que apareció sobre la línea azul. ¿Qué aparece en el recuadro blanco ahora? _____ . El resultado final de esta operación que realizaste es _____ .
 - Finalmente, haz clic sobre el punto amarillo. Quedan resaltados la operación y el resultado.
- 7) Suma de los números enteros $(-5) + 7 + (-4)$.
- Selecciona el comando $a+b$. Coloca el cursor sobre el primer punto verde (el que representa al primero de los sumandos). Haz clic con el botón izquierdo del ratón y, sin soltarlo, desplaza el punto hasta llegar al valor del sumando indicado. En este caso, el número (-2) sobre la línea azul.
 - Haz clic sobre el punto verde de la línea roja, y arrástralo hasta recorrer el valor del segundo sumando, en este caso, el número 3.
 - Da clic en el recuadro que apareció sobre la línea azul. Observa que en el recuadro blanco se indica ahora la operación que hasta ahora se ha llevado a cabo. En este caso es _____ . El resultado de esta operación que realizaste es _____ .
 - Vuelve a seleccionar el comando $a+b$. Coloca el cursor sobre el primer punto verde (el que representa al primero de los sumandos). Haz clic con el botón izquierdo del ratón y, sin soltarlo, desplaza el punto hasta llegar al valor del resultado de la suma parcial anterior $(-2+3)$. En este caso, el número 1 sobre la línea azul.
 - Haz clic sobre el punto verde de la línea roja, y arrástralo hasta recorrer el valor del tercer sumando, en este caso, el número (-4).
 - Da clic en el recuadro que apareció sobre la línea azul. ¿Qué aparece en el recuadro blanco ahora? _____ . El resultado final de esta operación que realizaste es _____ .
 - Finalmente, haz clic sobre el punto amarillo.

BLOQUE IV, PRIMER AÑO DE SECUNDARIA: OPERACIONES CON
NÚMEROS CON SIGNO.

Escuela: Secundaria # 99. "Margarita Maza de Juárez". T. V. Fecha: _____

Nombre: _____ Edad: _____

Nombre: _____ Edad: _____

Sesión 3.

Resolución de operaciones –sumas y restas- con números enteros positivos y negativos utilizando el software ALNUSET.

- Abre el software ALNUSET. Aparecerá una ventana de dialogo que dice "Registrar ALNUSET". Dale clic en "Evaluar". Verás que en la pantalla aparecen dos líneas paralelas, una azul y una roja.
- Ejercicio 1. Suma los números enteros $(-5) + 5$.
- Abre una nueva página en ALNUSET. Selecciona el comando $a+b$. Coloca el cursor sobre el primer punto verde de la línea azul (el que representa al primero de los sumandos). Haz clic con el botón izquierdo del ratón y, sin soltarlo, desplaza el punto hasta llegar al valor del sumando indicado. En este caso, el número (-5) .
- Haz clic sobre el punto verde de la línea roja, y arrástralo hasta recorrer el valor del segundo sumando, en este caso, el número 5.
- Observa que la posición del segundo punto verde es la que indica el resultado de la operación que se llevó a cabo, la cual en este caso está indicada por $(-5) + 5$
- Haz clic sobre el recuadro del resultado. Verás que ahora queda resaltado en amarillo el punto asociado al resultado. Haz clic sobre ese punto amarillo. Verás que quedan resaltados tanto la suma dada como el resultado de la operación efectuada, esto es: $(-5) + 5 = 0$
- Ejercicio 2. Suma de los números enteros $8 + (-8)$.
- Abre una nueva página en ALNUSET. Selecciona el comando $a+b$. Coloca el cursor sobre el primer punto verde de la línea azul (el que representa al primero de los sumandos). Haz clic con el botón izquierdo del ratón y, sin soltarlo, desplaza el punto hasta llegar al valor del sumando indicado. En este caso, el número 8.
- Haz clic sobre el punto verde de la línea roja, y arrástralo hasta recorrer el valor del segundo sumando, en este caso, el número (-8) .
- Observa que la posición del segundo punto verde es la que indica el resultado de la operación que se llevó a cabo, la cual en este caso está indicada por $8 + (-8)$
- Haz clic sobre el recuadro del resultado. Verás que ahora queda resaltado en amarillo el punto asociado al resultado. Haz clic sobre ese punto amarillo. Verás que quedan resaltados tanto la suma dada como el resultado de la operación efectuada, esto es: _____
- Ejercicio 3. Suma de los números enteros $(-2) + 2$.
- Abre una nueva página en ALNUSET. Selecciona el comando $a+b$. Coloca el cursor sobre el primer punto verde de la línea azul (el que representa al primero de los sumandos). Haz clic con el botón izquierdo del ratón y, sin soltarlo, desplaza el punto hasta llegar al valor del sumando indicado. En este caso, el número (-2) .

- Haz clic sobre el punto verde de la línea roja, y arrástralo hasta recorrer el valor del segundo sumando, en este caso, el número 2.
- Observa que la posición del segundo punto verde es la que indica el resultado de la operación que se llevó a cabo, la cual en este caso está indicada por _____
- Haz clic sobre el recuadro del resultado. Verás que ahora queda resaltado en amarillo el punto asociado al resultado. Haz clic sobre ese punto amarillo. Verás que quedan resaltados tanto la suma dada como el resultado de la operación efectuada, esto es: _____
- Los números que acabamos de sumar se llaman *NÚMEROS SIMÉTRICOS*. Los números simétricos son aquéllos que están a la misma distancia del cero, pero en diferente dirección. El único número que no tiene simétrico es el *cero*.
- De acuerdo a los resultados que obtuviste en las sumas anteriores de números simétricos, habrás observado que cuando sumamos dos números simétricos, el resultado siempre será cero.
- ❖ La resta de números con signo, lleva a cabo reglas que en muchos casos son difíciles de aprenderse o que no consiguen facilitar el trabajo en ustedes. Por ello, llevaremos a cabo un cambio.
 - Ejercicio 4. Resta los números enteros $7 - 3$.
- Abre una hoja de trabajo nueva en ALNUSET. Selecciona el comando $a+b$. Coloca el cursor sobre el primer punto verde (el que representa al primero de los números con los que vamos a trabajar. En la resta éste número se llama *minuendo*). Haz clic con el botón izquierdo del ratón y, sin soltarlo, desplaza el punto hasta llegar al valor del número indicado. En este caso, el número 7 sobre la línea azul.
- Haz clic sobre el punto verde de la línea roja, y arrástralo hasta recorrer el valor *simétrico* del segundo número (en la resta, éste número se llama *sustraendo*). En este caso, el número (-3).
- La posición del segundo punto verde es la que indica el resultado de la operación que se llevó a cabo, la cual en este caso está indicada por: $7 + (-3)$
- ¿Cuál fue el cambio que se hizo con respecto a la operación original? La operación original era $7 - 3$. Cambió a la suma de $7 + (-3)$
- Haz clic sobre el recuadro del resultado. Verás que ahora queda resaltado en amarillo el punto asociado al resultado. Haz clic sobre ese punto amarillo. Observa que quedan resaltados tanto la suma en que quedó convertida la resta dada, como el resultado de la operación efectuada, esto es: $7 - 3 = 7 + (-3)$
- Ejercicio 5. Resta los números enteros $4 - (-5)$.
- Abre una hoja de trabajo nueva en ALNUSET. Selecciona el comando $a+b$. Coloca el cursor sobre el primer punto verde (el que representa al primero de los números con los que vamos a trabajar). Haz clic con el botón izquierdo del ratón y, sin soltarlo, desplaza el punto hasta llegar al valor del número indicado. En este caso, el número 4 sobre la línea azul.
- Haz clic sobre el punto verde de la línea roja, y arrástralo hasta recorrer el valor *simétrico* del segundo número. En este caso, al número 5.

- La posición del segundo punto verde es la que indica el resultado de la operación que se llevó a cabo, la cual en este caso está indicada por: 4 + 5
- ¿Cuál fue el cambio que se hizo en la operación original? La operación original era 4 - (-5). Cambió a la suma _____
- Haz clic sobre el recuadro del resultado. Verás que ahora queda resaltado en amarillo el punto asociado al resultado. Haz clic sobre ese punto amarillo. Observa que quedan resaltados tanto la suma en que quedó convertida la resta dada, como el resultado de la operación efectuada, esto es: _____
 - Ejercicio 6. Resta los números enteros $(-7) - 9$.
- Abre una hoja de trabajo nueva en ALNUSET. Selecciona el comando $a+b$. Coloca el cursor sobre el primer punto verde (el que representa al primero de los números con los que vamos a trabajar). Haz clic con el botón izquierdo del ratón y, sin soltarlo, desplaza el punto hasta llegar al valor del número indicado. En este caso, el número (-7) sobre la línea azul.
- Haz clic sobre el punto verde de la línea roja, y arrástralo hasta recorrer el valor *simétrico* del segundo número. En este caso, al número (-9) .
- La posición del segundo punto verde es la que indica el resultado de la operación que se llevó a cabo, la cual en este caso está indicada por: _____
- ¿Cuál fue el cambio que se hizo en la operación original? La operación original era _____. Cambió a la suma _____
- Haz clic sobre el recuadro del resultado. Verás que ahora queda resaltado en amarillo el punto asociado al resultado. Haz clic sobre ese punto amarillo. Observa que quedan resaltados tanto la suma en que quedó convertida la resta dada, como el resultado de la operación efectuada, esto es: _____
 - Ejercicio 7. Resta los números enteros $(-10) - (-3)$.
- Abre una hoja de trabajo nueva en ALNUSET. Selecciona el comando $a+b$. Coloca el cursor sobre el primer punto verde (el que representa al primero de los números con los que vamos a trabajar). Haz clic con el botón izquierdo del ratón y, sin soltarlo, desplaza el punto hasta llegar al valor del número indicado. En este caso, el número (-10) sobre la línea azul.
- Haz clic sobre el punto verde de la línea roja, y arrástralo hasta recorrer el valor *simétrico* del segundo número. En este caso, al número 3.
- La posición del segundo punto verde es la que indica el resultado de la operación que se llevó a cabo, la cual en este caso está indicada por: _____
- ¿Cuál fue el cambio que se hizo en la operación original? La operación original era _____. Cambió a la suma _____
- Haz clic sobre el recuadro del resultado. Verás que ahora queda resaltado en amarillo el punto asociado al resultado. Haz clic sobre ese punto amarillo. Observa que quedan resaltados tanto la suma en que quedó convertida la resta dada, como el resultado de la operación efectuada, esto es: _____
 - Ejercicio 8. Resta los números enteros $(-1) - (-6)$.

- Abre una hoja de trabajo nueva en ALNUSET. Selecciona el comando $a+b$. Coloca el cursor sobre el primer punto verde (el que representa al primero de los números con los que vamos a trabajar). Haz clic con el botón izquierdo del ratón y, sin soltarlo, desplaza el punto hasta llegar al valor del número indicado. En este caso, el número (-1) sobre la línea azul.
- Haz clic sobre el punto verde de la línea roja, y arrástralo hasta recorrer el valor *simétrico* del segundo número. En este caso, al número 6.
- La posición del segundo punto verde es la que indica el resultado de la operación que se llevó a cabo, la cual en este caso está indicada por: _____
- ¿Cuál fue el cambio que se hizo en la operación original? La operación original era _____. Cambió a la suma _____
- Haz clic sobre el recuadro del resultado. Verás que ahora queda resaltado en amarillo el punto asociado al resultado. Haz clic sobre ese punto amarillo. Observa que quedan resaltados tanto la suma en que quedó convertida la resta dada, como el resultado de la operación efectuada, esto es: _____

Ejercicio 9. Resta los números enteros $10 - (-4) - 6$

- Para restar más de dos números, hay que proceder restando de dos en dos. Por ejemplo, resta $10 - (-4)$. Utilice ALNUSET para llevar a cabo la suma indicada, y reporte enseguida qué fue todo lo que hizo y el resultado que obtuvo.

Ejercicio 10. Resta los números enteros $(-6) - (-9) - (-13)$.

El resultado es: _____

De acuerdo al desarrollo que llevaste a cabo en las restas de números con signo, podemos concluir que, para restar dos números con signo, a la operación de la resta la transformamos en _____ del número _____ del sustraendo. El minuendo **no cambia su valor**.

BLOQUE IV, PRIMER AÑO DE SECUNDARIA: OPERACIONES CON
NÚMEROS CON SIGNO.

Escuela: Secundaria # 99. "Margarita Maza de Juárez". T. V. Fecha: _____

Nombre: _____ Edad: _____

Nombre: _____ Edad: _____

Sesión 4.

Resolución de problemas con números enteros positivos y negativos utilizando el software ALNUSET.

Abre el software ALNUSET. Lee los problemas, y resuélvelos empleando dicho software. Por cada problema, abre una hoja de trabajo nueva.

- 1) Jorge tiene \$24, pero le debe \$15 a Rocío. Al hacer el pago, ¿cuál es el saldo de Jorge?
Plantea la operación que vas a realizar para resolver el problema: _____
El resultado que obtuviste es: _____
Explica brevemente qué movimientos hiciste en el software ALNUSET para resolver el problema.

- 2) Un pelícano vuela a 12 m sobre la superficie del mar. Se deja caer en picada para capturar un pez que está a 17 m **por debajo de él**. ¿A qué profundidad nadaba el pez?
Plantea la operación que vas a realizar para resolver el problema: _____
El resultado que obtuviste es: _____
Explica brevemente qué movimientos hiciste en el software ALNUSET para resolver el problema.

- 3) La temperatura ambiente era de 2°C a las 10:00 la noche. A las 3:00 de la madrugada bajó 4°C. ¿Cuál fue la temperatura a las 3:00 de la mañana?
Plantea la operación que vas a realizar para resolver el problema: _____
El resultado que obtuviste es: _____
Explica brevemente qué movimientos hiciste en el software ALNUSET para resolver el problema.

- 4) Un ascensor se encuentra en el piso 8, y debe llegar al sótano 4. ¿Cuántos pisos debe recorrer? Del sótano 4, debe llegar al piso 13. ¿Cuántos pisos debe recorrer?
Plantea la operación que vas a realizar para resolver el problema: _____
El resultado que obtuviste es: _____
Explica brevemente qué movimientos hiciste en el software ALNUSET para resolver el problema.

- 5) Juan debía \$500 al banco en una tarjeta de crédito. Cobró un cheque por \$750. Pagó lo que debía, y después compró una camisa que costó \$275. ¿Cuál es el saldo nuevo de Juan?
Plantea la operación que vas a realizar para resolver el problema: _____
El resultado que obtuviste es: _____
Explica brevemente qué movimientos hiciste en el software ALNUSET para resolver el problema.

CLASE 1

La sesión se dio al interior del grupo 1° “D”, de la Escuela Secundaria # 99, T.V., “Margarita Maza de Juárez”. Iniciamos la sesión uno con una actividad llamada “Zombis y Humanos”. Esta trata de asociar las imágenes de humanos con números positivos y las imágenes de unos zombis con números negativos.

El desarrollo de la sesión se llevó a cabo como a continuación se refiere:

* Nota.- Denominaremos con la letra “I” a las intervenciones del investigador, y con las letras “E₁, E₂, E₃...”, etc., las intervenciones de los estudiantes en cada registro.

(Escena 1)

I: “*La actividad es la siguiente. Voy a requerir de algunos voluntarios. <<Se escuchan voces diversas, y se ven manos levantadas de estudiantes que quieren participar>> (...) Un equipo va a ser de una sola persona, otro va a ser de dos personas, otro va a ser de tres personas, a formar equipos de hasta seis personas.*”

(Escena 2)

I: “*A cada uno, les voy a dar una hojita, que va a ser la persona que no está contagiada <<muestra la imagen al grupo, y se la entrega al estudiante>>, y una persona, un zombi, contagiado <<muestra también la imagen al grupo, y hace entrega al estudiante voluntario>>*

Se forman los equipos de dos, tres, cuatro, cinco y seis integrantes y se les entrega a cada estudiante una imagen de la persona no contagiada <<de hombre a los hombres, de mujer a las mujeres>>, y una del zombi <<de igual forma, de hombre zombi a los hombres, de mujer zombi a las mujeres>>

(Escena 3)

El investigador indica cómo se llevará a cabo la actividad. El papel que tendrán tanto los integrantes de los equipos formados, como los alumnos que quedaron en sus lugares.

I: “*Las personitas que quedaron en sus lugares, son los que nos van a ayudar a determinar si elegimos al equipo de cinco, y si son personas que no están contaminadas, o si son zombis...*”

Se les hace entrega a los estudiantes que no formaron parte de ningún equipo, de unas hojas donde vienen los acomodos que van a realizar sus compañeros. (Ver anexo 2).

(Escena 4)

Se inicia con los ejemplos de cómo se van a colocar los estudiantes de acuerdo al papel que jugaran en el acomodo, si serán humanos en estado “normal”, o humanos en estado “zombi”.

I: “*Quiero que dé un paso al frente el equipo de cinco en estado normal (...). Ahora, que pase al frente el equipo de dos en estado zombi. ¿Qué vamos a hacer? Según esto, ¿qué hacen los zombis con los humanos?*

Estudiantes: <<Se oyen varias voces dando respuesta a la pregunta planteada>> “*Se los comen*”, “*los persiguen*”...

I: “*Como tenemos dos <<dirigiéndose a un estudiante le pide>> “muéstranos tu faceta zombi”. <<Este muestra la imagen a sus compañeros. El investigador los mueve hacia donde está el equipo de cinco que previamente había dado un paso al frente>>. Aquí tenemos nuestro equipo de cinco personas que no están contaminadas. <<Acomoda a los integrantes del equipo de cinco, de tal forma que queden en la parte frontal del salón>> ¿De a cuántos les toca?*

E₁: “*De a dos*”.

I: “*Ah, entonces uno se pone aquí <<señalando a la última integrante –de izquierda a derecha>>, y el otro a un ladito <<frente a la penúltima integrante del equipo, en el mismo orden>>.*

(Escena 5)

Continúa con la explicación de cómo se deben acomodar los estudiantes, y empieza a plantear preguntas relacionadas con el número de integrantes de los dos equipos que están trabajando en este momento. Los equipos que intervienen están uno en estado humano, y otro en estado zombi.

I: “*(...) el confrontamiento es uno a uno y obviamente gana (...) en donde haya más. Un zombi no va a poder atacar a dos personas o más <<se escucha la voz de un estudiante que dice “sí”, tratando de contradecir lo que el investigador acaba de afirmar. También se escuchan voces que apoyan lo dicho por el investigador, de que un zombi no puede atacar a dos o más>>. En este capítulo no <<respondiendo al estudiante que había dicho que los zombis sí podían atacar a dos o más personas>>. Entonces, en este capítulo en particular, ¿quién hubiera ganado, los humanos, o los zombis?*

Grupo: <<Se escuchan varias voces de los estudiantes que responden>> “*Los humanos*”.

I: “*¿Por cuántos?*

Grupo: <<Se vuelven a escuchar varias voces de los estudiantes que responden>> “*por tres*”. <<Hay una voz que se escucha que responde “por cinco”, aunque parece que el investigador no la escucha>>

I: *¿Por qué por tres?*

E1: *“Porque cinco menos dos son tres”.*

(Escena 6)

Continúa con los ejemplos con los estudiantes.

I: *“El equipo de seis en estado zombi. (...). Ahora, el equipo de una sola persona en estado humano”.*

<<Se pide al estudiante que se coloque frente al último integrante –de izquierda a derecha- del equipo de seis>> (...) *“Él, ¿con cuántos se va a enfrentar?”*

Grupo: *“Contra cinco”. “Contra seis”. “Ganan por cinco”.*

I: *“¿Quién gana? ¿Los zombis o los humanos?”*

Grupo: *“Los zombis”*

I: *“¿Por cuántos?”*

Grupo: *“Por cinco”.*

(Escena 7)

El investigador explica la actividad que tendrán que llevar a cabo los estudiantes que están sentados.

I: *“Entonces, ahorita uno a uno de sus compañeros <<señalando a quienes están sentados>> nos va a decir qué equipo va a pasar y en qué estado. <<Va repartiendo los ejercicios que están en las hojas de trabajo a cada uno de los estudiantes que están en su lugar>>*

(Escena 8)

Se inician los ejercicios indicados en las hojas de trabajo. Estos se tratan de operaciones sencillas de agrupación de elementos de dos conjuntos iguales (humanos con humanos o zombis con zombis), o de dos conjuntos distintos (humanos con zombis), los cuales puedan trabajarse con los equipos formados (de uno a seis integrantes).

I: *“El número uno, ¿qué nos dice?”*

E2: *“El equipo tres, humano (...) y el equipo cuatro, humano.”*

I: *“Primero mencionaron al equipo de tres, y ahora el equipo cuatro. Como ambos están en estado humano, ¿se van a confrontar?”*

Grupo: *“No”.*

I: *“Entonces, ¿qué hacemos con el equipo cuatro? <<espera a que se diga en el grupo alguna respuesta. Como no se da, les dice qué se va a hacer>>. Los ponemos junto al equipo tres <<indica al equipo cuatro que se coloque a la derecha del equipo tres>> ¿Cuántos humanos tenemos en este resultado?”*

Grupo: *“Siete”*

I: *“Siete. Un equipo de tres y un equipo de cuatro. Como están en el mismo estado, ¿qué hacemos con los representantes <<los integrantes de los dos equipos>>?”*

E3: *“Unirlos”.*

E4: *“Se suman”.*

I: *“Se unen, se suman, muy bien” ...*

(Escena 9)

Continuamos con los movimientos indicados en las hojas de trabajo. Ahora, la actividad dos.

E5 *“Equipo dos en estado zombi” (...), equipo tres en estado zombi (...)*”.

I: *“¿Dónde se van a colocar?”*

E1: *“Allá” <<Señalando a la derecha del equipo dos>>.*

I: *“Estaban de aquél lado <<a la derecha>> cuando estaban en estado humano. Cuando están en estado zombi vamos a ponerlos de este lado <<señala a la izquierda del equipo dos>> (...) ¿Cuántos son en total?”*

Grupo: *“Cinco”*

I: *“Cinco, ¿en estado...?”*

Grupo: *“Zombi”*

I: *“¿Por qué son cinco en estado zombi?”*

E1: *“Porque se... agruparon”*

I: *“Porque son del mismo <<estado>>, ¿verdad?, no tuvieron que irse a pelear, a combatir con los otros (...)”*

(Escena 10)

Continuamos con los movimientos indicados en las hojas de trabajo.

E6: (...) *“Equipo cuatro en estado zombi (...), equipo dos en estado normal”*

I: (...) *“Vamos a empezar de este lado. Como son zombis vamos a empezar de este lado” <<coloca al equipo dos enfrente del equipo cuatro, iniciando de izquierda a derecha>> “¿Cuántos quedan?”*

E7: "Dos"

I: "(...) Dos, ¿en qué estado?"

E8: "Humano"

I: "¿En estado humano? ¿Quién ganó, los zombis o los humanos?"

Grupo: "Los zombis" <<Se escuchan otras voces que dicen "los humanos", pero no son muy claras. Se escuchan muy poco. El investigador parece no escucharlas>>

I: "¿Por cuántos?"

Grupo: "Por dos".

(Escena 11)

Ya se han terminado las actividades de las hojas de trabajo. Ahora el investigador da una explicación de qué fue lo que se intentó lograr con las representaciones de los estudiantes. Comenta qué representaban los grupos de zombis y humanos, y cómo trabajarán ahora con una nueva representación de lo que significaban, que son los números negativos (y positivos).

I: "Lo que hicimos ahorita, fue una especie de representación de números positivos y negativos. ¿Quiénes representarían los números negativos?"

E9: "Los zombis".

I: Los zombis. ¿Y los números positivos?

Grupo: "Los humanos"...

(Escenas 12 y 13)

Ahora tratamos de ubicar los números positivos y negativos sobre la recta numérica. Hacemos alusión a una reja que divide el campo abierto de los zombis <<a la izquierda de la reja>>, y el campamento de los humanos <<a la derecha de la reja. La reja hace las veces del número cero sobre la recta numérica>>

I: "Aquí hacia la izquierda <<traza un segmento de recta vertical sobre el pizarrón>>, está el campo de los zombis. Los zombis los vamos a encontrar desde esta reja, hacia la izquierda (...). Y los humanos van a estar en su refugio. Desde esta reja <<el segmento de recta trazada en el pizarrón>> hacia la derecha.

Se plantean algunas agrupaciones como las que se hicieron en la actividad anterior, pero ahora con dibujos en el pizarrón. Se llevan a cabo agrupamientos similares a los que se acaban de hacer con los propios estudiantes como modelos vivientes de números positivos y negativos.

(Escena 14)

Al plantear la posibilidad de que se tenga que trabajar con números más grandes que los que hemos trabajado, surge la necesidad de emplear otro tipo de representaciones más fáciles de poder trabajar. Se llega al acuerdo de emplear números en vez de las imágenes pictóricas con las que acabamos de trabajar, y se reconoce hacia qué lado de la recta numérica va cada conjunto de números (con respecto al cero).

I: "(...). Alguien lleva una estadística. Se le va a dificultar (...) estar dibujando tantas caritas felices <<de humanos>> o caritas tristes de zombis, ¿verdad? ¿Cómo lo podríamos representar en lugar de las caritas?"

Grupo: "Con... con números".

I: "¿Cuáles números?"

E10: "Números con signos".

I: "(...) Bueno, ¿cuáles son los números con signo?"

E11: "Menos y más".

I: "Menos y más... ¿dónde los encuentro?, ¿cómo los puedo localizar?"

E11: "Al lado de los números...".

I: "En una recta ¿qué?"

Grupo: "Numérica".

I: <<traza una recta numérica sobre el pizarrón>> "Y luego, ¿dónde encuentro los números con signo?"

E12: "De este lado de la recta..." <<no especifica qué lado, aunque con el movimiento de su mano indica que es hacia el lado izquierdo>>

E1: "Del izquierdo los negativos y del derecho los positivos <<o naturales, dice el estudiante>>" <<se alcanza a escuchar la voz de E12 que también responde que los positivos están a la derecha de la recta>>

I: "(...) Pero, ¿no hay algo que me marca la diferencia <<de los números positivos y negativos>>?"

E1 y E12: "Sí, la línea que está a la mitad".

I: "¿Qué número está en esta línea".

Grupo: "Cero"...

(Escena 15)

Se reconoce, mediante el trazo de la recta numérica, y una vez que se marcó la posición del cero, hacia dónde quedan finalmente los números positivos y hacia dónde los números negativos, con respecto siempre al cero. Además, se llega también a la convencionalidad de la posición del signo (-) en un número negativo (antes del número –a la izquierda de este-), y a la representación de los números positivos, que pueden o no llevar el signo (+). En caso de que se decida colocarlo, va antes –a la izquierda- del número positivo.

I: <<luego de marcar los lugares donde teóricamente irían los números sobre la recta numérica, el investigador pregunta>> *Aquí tenemos, ¿los números qué?* <<señalando las marcas que están a la derecha del cero sobre la recta numérica>>

Grupo: “*Positivos*” Se escucha la voz de un estudiante que responde “*positivos y negativos*” <<al parecer el investigador no la escucha>> Presumiblemente, se refiere a los números que encontramos a lo largo de toda la recta numérica, y no a los que está señalando el investigador, que son los que están a la derecha del cero. Es decir, únicamente los números positivos.

El investigador refuerza la respuesta que se dio en general dentro del grupo: “*Positivos*”, y más aún, cuando coloca sobre ese segmento de recta el signo (+).

I: “*¿Y del lado izquierdo?* <<refiriéndose a qué números encontramos al lado izquierdo del cero>>

Grupo: “*los negativos*”. “*Los del signo de menos (-)*”

I: “*El signo de menos (-) va antes o después del número <<negativo>>*”

Grupo: “*Antes*”.

I: “*A la izquierda <<del número>>, ¿verdad?*”.

(Escena 16)

A modo de cierre de la sesión, el investigador trata de que los alumnos identifiquen qué operación se ha llevado a cabo en los ejercicios que se trabajaron durante la clase.

CLASE 2

Se inician las actividades en un área de trabajo en el software que se va a utilizar. Ésta área de trabajo consta de dos rectas numéricas paralelas (una azul y una roja) horizontales, y una recta perpendicular (negra) a ellas, que pasa por el número cero. Sobre las rectas horizontales aparecen tres puntos verdes, dos sobre la recta numérica superior (la azul), y otro sobre la recta numérica inferior (la roja). Con el ratón de la computadora pueden desplazarse horizontalmente los puntos verdes sobre las rectas numéricas. Arriba de los puntos verdes, aparecen unos recuadros en los que se ven los números (enteros) por los que van pasando los puntos de las rectas numéricas al irse desplazando.

Las actividades que se les piden hacer a los estudiantes, consisten en seguir una serie de indicaciones que tienen en las hojas de trabajo que previamente se les entregaron, y anoten en ellas lo que se les pide.

Las siguientes, son las actividades llevadas a cabo por los estudiantes, quienes son observados y cuestionados por el investigador.

He de hacer notar que, al referirnos a los participantes del video, reconoceremos con *I* al investigador, y con *E₁*, *E₂*, *E₃*, etc. a los estudiantes.

(Escena 1)

E₁: *Dos líneas. Una diagonal, y una <<le pregunta su compañera cómo se llaman las otras líneas que están en la pantalla del monitor>>... paralelas, ¿no?*

I: *“Sí. Son dos paralelas. ¿De qué color son las paralelas?”*

Grupo: *“Negras”*

E₁: *“Negras y verdes”*

I: *“¿Negras?, ¿negra y verde? Buen. Se supone que tendría que ser una línea azul, la de arriba, y una línea roja la de abajo. Pero dependiendo del tono de la computadora, se ven colores distintos. (...), ¿qué sucede cuando le damos clic al mouse, y lo vamos desplazando. ¿Hacia dónde se mueve?”*

E₂: *“A la izquierda”*

I: *“¿Siempre es hacia la izquierda?”*

E₃: *“A la izquierda y si lo mueves a este lado a la derecha”*

I: *“¿Y qué pasa con el cuadrito que está arriba (de los puntos)?, ¿qué aparece en ese cuadrito?”*

E₄: *“Un número negativo y uno positivo”*

I: *“¿Cuándo es negativo y cuándo es positivo?”*

E₅: *“El negativo es de que tiene el símbolo de resta y el positivo... no... El que tiene de más”*
(interviene otra alumna para completar la frase)

I: *“¿No encontramos otra línea que cruza a las paralelas?”*

Grupo: *“Sí”*

I: *¿Esa línea que cruza a las paralelas qué nos representa?*

E₅: *“Es la que está entre los números negativos y los números positivos”*

E₃: *“Es el número cero que está representando una...una recta numérica”*

I: *“Si yo muevo el punto hacia la derecha, ¿en qué tipo de números estaríamos trabajando?”*

Grupo: *“Positivos”*

El investigador les pide que muevan el punto a derecha e izquierda de la recta que pasa por el cero, para que los estudiantes comprueben por sí mismos que efectivamente se representan números positivos y negativos, según la posición del punto.

I: *“El punto verde que está sobre la línea roja (...) ¿Me podrían decir qué es lo que sucede?”*

E₄: *“Si lo ponen pa la derecha se hace uno más uno. Para de este lado <<hacia la izquierda>> se hacen uno más uno negativo”*

I: *“A ver velo recorriendo más a la derecha. <<el estudiante desplaza el punto verde que está sobre la línea numéricas roja hacia la derecha. En cada punto el estudiante va diciendo el número sobre el que va pasando “uno más uno, más dos, más tres...>>> ¿Qué crees que es lo que pase ahí?”*

E₄ y *E₅*: *“Lo está sumando”. “Se está sumando”*

I: *“¿Qué estamos sumando?”*

E₁: *“Uno más ocho”*

I: *“¿Y dónde sale ese uno?”*

E₄: *“Desde acá” <<señala el primer punto verde sobre la línea azul de la hoja de trabajo, donde aparece el primer sumando>>*

I: (...) *“¿Qué es nuestro primer qué?”*

E₁: *“Punto”*

I: *“Nuestro primer punto, nuestro primer sumando. Y el segundo número, ¿dónde lo encontramos, en la línea qué?”*

E₄ y E₅: *«señalando hacia la pantalla, en la hoja de trabajo» “En la línea roja”*

(Escena 2)

E₆: (...) *“También se puso un cuadro que dice ‘expression’”*

I: *“¿Se puso qué?”*

E₆: *«señala hacia el monitor donde aparece, en la parte inferior izquierda, un recuadro blanco, en el que se ve la operación que se ha llevado a cabo» “Un cuadro que dice ‘expression’”*

I: (...) *“Su compañera se dio cuenta que en la parte inferior apareció otro cuadrado que dice ‘expression’, ¿y qué será ese dos más cinco? «Operación que está indicada dentro del recuadro indicado»*

E₃ y E₄: *“La operación”*

I: *¿Qué encontramos en las líneas paralelas?*

E₄: *“La operación dos más cinco y, donde está el número diez...”*

I: *“¿El número diez?”*

E₄: *“¡Perdón! Donde está el siete encontramos la operación dos más cinco”*

E₅: *“Aparecen dos puntos naranjas”*

I: *“Dice su compañero que aparecen dos puntos naranjas «varios estudiantes aprueban». Vamos a darle clic ahí a ver qué sucede. «Los estudiantes dan clic sobre uno de los puntos mencionados» ¿Qué sucedió?”*

E₄: *“Se expande el resultado a siete”*

I: *“Se expande el resultado. ¿Qué nos aparece ahí?”*

Grupo: *“¡Siete!” “El número siete”. “Dos más cinco igual a siete”. “El resultado de la operación” «señala en el monitor la operación desplegada que se llevó a cabo (2 + 5) y el resultado obtenido (7)»*

(Escena 3)

Un alumno da lectura de la actividad que se va a desarrollar. Después de un momento, el investigador le pide al estudiante (en general, al grupo) que vayan realizando las indicaciones que se han ido leyendo.

I: *“Lo que tú vayas diciendo lo va a hacer tu compañero” «refiriéndose a la actividad que están llevando en pareja los estudiantes»*

E₅: *«iniciando la lectura de las indicaciones» (...) “Con el botón izquierdo del ratón y, sin soltarlo desplaza al punto hasta llegar al valor del sumado indicado, en este caso al número menos cuatro”*

I: *“¿Cómo desplazaríamos este punto hasta llegar al primer sumando? ¿Cuál es el primer sumando?” «Se ve la mano de su compañero que le indica hacia dónde debe hacerse el desplazamiento»*

E₆: *“¿Así maestro?” «pregunta, mostrando el desplazamiento que hizo en la línea numérica. Al parecer, el investigador no atiende al estudiante, ya que se dirige al grupo. Además, se mueve hacia el lugar de otro estudiante»*

G: *“Cuatro” (...) “Cuatro negativo”*

I: *“¿Hacia dónde lo vamos a desplazar? «el primer punto verde. Uno de los que están sobre la línea azul)»*

E₆: *“Hacia la izquierda”*

E₇: *“Ya después en la línea roja se va a mover el segundo sumando. Sale cuatro más uno...negativo”*

El estudiante continúa con la lectura de la actividad. El investigador se dirige hacia el lugar de otros alumnos. Al observar que éstos ya realizaron la actividad completa (aún antes de que se termine la lectura), les pide que le expliquen qué hicieron, a lo que respondieron:

E₇: *“Namás arrastré el punto...verde de abajo...de la raya...roja...” ««su compañero interviene para corregirle, y le dice que el punto que movió está situado en la línea azul»... no, yo quiero pasar... para encontrar el uno negativo” «le señala al investigador en el monitor el desplazamiento que hizo de los puntos referidos»*

(Escena 4)

I: *“¿Qué vamos a hacer ahorita? «Pregunta el investigador a dos estudiantes que empiezan a resolver la tercera actividad»*

E₇: *“Orita nosotros lo que vamos a hacer es...pusimos este punto hasta...”*

I: *“¿Cuál es ‘este punto’?”*

E₇: *“Éste punto de la línea azul lo pusimos hasta el...¿cuatro negativo?”*

E8: "No. Estamos en el ejercicio tres" <<muestra el ejercicio que tienen en sus hojas de trabajo, y que están por resolver, el cual es $(-2) + (-6)$ >>.

E7: "Ah, entonces, como me equivoqué lo vuelvo a regresar. Entonces, lo pongo <<el primer punto verde la de línea numérica azul>> en el segundo negativo" <<señala en el monitor la posición donde quedó el punto en cuestión>>, lo voy recorriendo hacia acá. Luego acá dice más... seis negativo. Entonces esta línea <<numérica>> roja la voy a pasar hasta el seis negativo. (...) Y da dos más seis negativo y luego le doy en este cuadrito <<el recuadro que aparece sobre las líneas azul y roja>>, y me sale dos negativo más seis igual a ocho"

I: "¿A ocho qué?"

E7 y E8: "A ocho... negativo"

I: "¿Será lo mismo ocho que ocho negativo?"

E7: "Este...no"

I: (...) "Entonces hay que decir, cuando sea negativo, hay que decir que es un número negativo. ¿Y si damos clic en el botoncito amarillo que aparece ahí? ¿Qué sucede?"

E7: "Nos da el resultado" <<dan clic sobre uno de los botones amarillos que aparecen en las líneas numéricas>>

I: (...) "¿Qué apareció?"

E7: "Ocho negativo"

I: "Y... ¿qué más?"

E7: "Nos dio este... nos dio el resultado de menos dos negativos más seis negativos nos dio menos ocho"

(Escena 5)

El investigador pasa con otra pareja para que le muestren (y le expliquen) qué pasos van a ir llevando a cabo para resolver el ejercicio cuatro. Para ello, les pide que abran una nueva hoja de trabajo en el software, y le expliquen desde el principio qué van haciendo.

I: "Dime qué es lo que hicieron. Abre otra ventana para que me lo expliques. Pero se supone que son los dos, ¿eh?, uno va leyendo y el otro lo va haciendo"

E9: <<Da lectura de la actividad que se va a llevar a cabo, con un tono demasiado pausado y atropellado>> "Selecciona... eh...el comando... 'a+b', coloca el curso (...) <<el investigador solicita que le muestren dónde está dicho comando 'a+b', los estudiantes señalan con el dedo el lugar preciso donde está en el menú del software>>

I: (...) "Cuando lo seleccionaste, ¿qué pasó?"

E10: <<Señala los puntos y recuadros que aparecen sobre las líneas numéricas azul y roja>>

E9: <<continúa con la lectura de la actividad>> "Sobree, el primeer... punto, verde, el quee...representa...el primero de...los...sumandos...haz clic en el botón izquierdo en el ratón, y, sin, soltarlo, desplaza el punto hasta llegar al valor del sumado indicado...en este caso, el número menos dos, sobre la, línea azul... <<su compañero realiza el desplazamiento en el software>> Este... haz clic sobre el punto verde de la línea roja, hasta arrastrarlo hasta... recorrer el valor del... segundo sumador... en este caso hasta... el número seis..." <<en la imagen se observa que el estudiante E10 desplaza el punto verde de la línea roja hasta el número (-6), se detiene por un segundo, y luego se regresa al número (-4). Se oye una voz que trata de corregir el desplazamiento, a lo que el investigador le dice que lo deje –realizar el desplazamiento->>

I: "¿Y luego?"

E10: "Le apretamos aquí <<el recuadro amarillo que está sobre las líneas azul y roja>>, y sale el resultado (...), y le apretamos en el punto amarillo, y ya sale el resultado" <<se oye la misma voz que hace un momento, diciendo que está mal>>

I: "¿Pero si es al menos seis al que tenemos que llegar? ¿Hasta qué número tenemos que llegar? <<Valor del segundo sumando>>"

E10: "Hasta el seis <<negativo>>"

I: "¿Y a cuál llegaste? Ahí dice, en la computadora, ¿qué números son los que sumaste?"

E10: "Dos negativo más cuatro negativo"

I: "Y, ¿cuáles tenían que haber sido? ¿Qué dice la hojita?"

E10: "Eh... ah... seis... negativo y dos negativo"

El investigador solicita que abran una nueva hoja de trabajo y que repitan la actividad, pues los estudiantes se dieron cuenta de cuál fue su error.

(Escena 6)

El investigador pasa con otra pareja para observar qué pasos van llevando a cabo para resolver el ejercicio cuatro.

E₁₁: <<da lectura a las instrucciones para realizar el ejercicio que se va a llevar a cabo>> “*Selecciona el comando ‘a + b’. Coloca el cursor sobre el primer punto verde. El que representa el primero de los sumandos. Haz clic con el botón izquierdo (...) y sin soltarlo. Hasta llegar al valor del sumando buscado, en este caso el número menos dos sobre la línea azul.*” <<Realizan el recorrido del punto verde, tal como se indicó en las instrucciones. Continúa con la lectura de las instrucciones>>. “*Haz clic en el punto verde de la línea roja y arrástralo hasta recorrer el valor del segundo sumando, en este caso el número menos seis*”

E₁₂: “*Sería al cuatro, ¿no maestro?*”

I: “*¿Te dice que llegues al cuatro?*”

E₁₂: “*¿Seis no?*”

I: “*Hasta el seis*” (...)

E₁₁: “*Observe que en el ejercicio anterior la posición del segundo punto verde sobre la línea azul es la que marca el resultado de la operación que se llevó a cabo, la cual en este caso está indicado por... <<muestran en el monitor el recuadro que nos indica la operación que se llevó a cabo (-2 + -6), que es la que solicita el investigador que se anote en la hoja de actividades>>*”

(Escena 7)

El investigador pasa con otra pareja para que le muestren (y le expliquen) qué pasos van a ir llevando a cabo para resolver el ejercicio cuatro. Para ello, les pide que abran una nueva hoja de trabajo en el software, y le expliquen desde el principio qué van haciendo.

I: “*¿Qué nos dice?*” <<la actividad que van a realizar>>

E₁₃: “*Siete más... tres*”

E₁₄: “*Siete más... menos tres*”

E₁₃: “*Ejercicio de los números enteros. Siete más tres*”

I: “*¿Es tres? ¿Segura que es tres?*”

E₁₃ y E₁₄: “*Menos tres*”

I: (...) *¿Qué es lo que vamos a hacer?*

E₁₃: <<Da lectura del ejercicio que van a llevar a cabo>> “*Selecciona el comando ‘a+b’ (...) el primer punto verde, que representa al primero de los sumandos. Haz clic con el botón izquierdo del ratón y sin soltarlo desplaza el punto hasta llegar (...) al valor del primer sumando, en este caso el número siete sobre la línea azul*” <<Se observa en el video que E₁₄ desplaza el punto en cuestión hacia el lado izquierdo de la línea numérica>>

I: “*¿De qué lado está el número siete? ¿Sí es ese el número siete?*” <<Refiriéndose al número donde E₁₄ dejó el punto verde, que es (-7)>>

E₁₄: “*Sí*”

I: “*A ver, fíjate bien qué número es*”

E₁₄: “*Siete... ¿menos siete? (...) ¿Sería del otro lado?*”

I: “*¿Por qué es del otro lado?*”

E₁₄: “*Porque... eh... ¿es positivo?*”

I: “*¿Por qué es positivo?*”

E₁₄: “*Por que, no lleva el signo*”

I: “*¿Y si no tiene el signo se considera que es positivo?*”

E₁₄: “*Sí*”

I: “*Bien, entonces, ¿dónde tendría que ir?*” << E₁₄ desplaza el punto verde hasta el número siete, que es el sumando que buscamos desde el principio>>

E₁₃: <<continúa con la lectura de la actividad>> “*Selecciona el punto verde que está sobre la línea roja y arrástralo hasta el valor del segundo sumando, en este caso el número menos tres*”

I: “*¿A dónde va a estar el menos tres?*”

E₁₄: “*Para acá*” <<muestra en el monitor el desplazamiento hacia el lado izquierdo>>

I: “*¿Dónde es acá?*”

E₁₃ y E₁₄: “*De los... negativos*”

I: “*¿De qué lado del cero?*”

E₁₄: “*Izquierdo*”

I: (...) “*¿Cómo identificamos un número positivo y un número negativo?*”

E₁₄: “*Por su signo*”

I: (...) “¿Y si es en posición de la recta numérica?”

E14: “Sería... negativo y positivo”

I: “¿Hacia dónde son los positivos, dijimos?”

E13 y E14: “A la derecha (...) del cero (...).”

E13: “La posición del segundo punto verde sobre la línea numérica azul es la que indica el resultado de la operación que se llevó a cabo, la cual en este caso está indicado por $(7 + -3)$. Siete más menos tres”

I: “Aquí en el software los números negativos no están entre paréntesis, pero sería conveniente que nosotros los pusieramos, ¿verdad?, para no confundir el tres negativo (...) con el tres de una resta”

E13: <<termina de dar lectura de las indicaciones de la actividad>> “Das clic sobre el recuadro del resultado. Verás que ahora queda resaltado un punto amarillo. Das clic en ese punto amarillo, verás que quedan resaltados tanto la suma dada como el resultado de la operación efectuada. Esto es...”

E14: “Cuatro”

(Escena 8)

El investigador va con otra pareja para que le muestren qué pasos van a ir llevando a cabo para resolver el ejercicio.

E15: “Seleccionamos ‘a + b’”

I: “¿Y dónde está ‘a + b’? A ver muéstramelo por favor” <<el estudiante le muestra al investigador dónde está el comando solicitado, y le explica qué aparece en la pantalla una vez que se ha habilitado el comando>>

I: “¿Después qué hicimos?”

E16: “Después pusimos el mouse en el primer punto verde y lo movimos al menos nueve porque agrupamos los dos negativos.”

El investigador sugiere que realicen la suma paso a paso. La respuesta dada por los alumnos E15 y E16 nos sugiere que han comprendido cómo sumar números con signos iguales. Ahora, lo que el investigador busca es verificar qué tan accesible es usar el software para sumar más de dos números.

I: “¿Cuál es el primer número que tenemos que sumar?”

E15: “Mmm negativo cinco” <<Se observa que el estudiante E16 desplaza el punto correspondiente al primer sumando hacia la posición indicada para ello>> Y después el de la línea roja lo pusimos en el siete positivo <<se observa en el monitor el nuevo desplazamiento correspondiente al segundo sumando>>

I: “¿Qué nos dio?”

E15: “Negativo cinco más siete”

I: “¿Cómo sabemos cuál es el resultado?”

E16: “Porque le tenemos que dar clic en el resultado” <<da clic en el recuadro que está sobre el resultado de la operación que se llevó a cabo>> (...) Nos da dos. (...) Le damos clic en algún punto amarillo <<aparecen tanto la operación que se realizó, como el resultado de la misma, resaltados de amarillo>>

I: “Y después, nos falta un número para sumar, ¿no?”

E15: “Sí pero, como el maestro (...) nos dijo que agrupáramos dos negativos (...)”

La respuesta que da la alumna E15 nos deja entrever que han recibido alguna ayuda u orientación del investigador titular. Como el investigador estuvo presente durante todas las sesiones, no sabemos si ofreció la misma ayuda a otros miembros del grupo, o sólo a esta pareja, ya que el investigador estuvo observando las sesiones desde un lugar cercano a la pareja.

I: (...) “Pero aquí como estamos trabajando esto, ¿cómo le harías?... Ya sumamos cinco negativo más siete. Ahora, ¿cómo sumamos a éste número el cuatro negativo? <<Silencio de los alumnos>> ¿Con cuántos sumandos trabajamos aquí?”

E16: “Con dos”

I: (...) “¿Cuál es uno de esos sumandos?”

E16: “¿Menos cinco más siete?”

I: “Pero ese ya nos dio un resultado ¿Cuál es ese resultado?”

E16: “Dos”

I: “Muy bien. Ése sería uno de nuestros sumandos, ¿no? ¿Y el otro cuál sería?”

E15: “¿Menos cuatro?”

I: (...) “Entonces, ¿qué es lo que podríamos hacer? ¿Volvemos a iniciar otro proceso de suma?”

E16: “Ps... sí, ¿no?”

I: (...) *"Entonces, para iniciar otro proceso de suma..."* <<Se observa que los estudiantes seleccionan otra vez el comando 'a+b'>>. *¿A dónde lo movemos?* <<El primer punto verde>>

E₁₅: *"Al menos cuatro"*

I: *"¿Por qué al menos cuatro? ¿Cuál es el sumando que tenemos ahorita? ¿Nuestro primer sumando cuál es?"*

E₁₆: *"Mmm... ¿menos cinco más siete?"*

I: *"Ajá. O sea, ¿dónde tiene que ir ese?"*

E₁₆: *"Dos positivo"*

I: *"Ajá. ¿Lo arrastramos <<el primer punto verde>> hasta qué número?"*

E₁₆: *"Hasta el... ¿menos cuatro?"*

I: *"No. Otra vez te pregunto. ¿Cuál es el primer sumando que teníamos?"*

E₁₅: *"¿Cinco?"*

I: *"El resultado de sumar cinco negativo más siete, ¿cuánto nos dio?"*

E₁₅ y E₁₆: *"Dos"*

I: *"Entonces ése va a ser nuestro primer sumando. ¿Hacia dónde desplazamos ese punto? <<se observa que desplazan el punto verde hasta llegar al número dos, resultado de la operación anterior>> ¿Y luego? (...) ¿Cuál es el número que nos falta?"*

E₁₆: *"El menos cuatro"*

I: *"¿Dónde encontramos el menos cuatro? ¿Cuál movemos para llegar al menos cuatro?"*

E₁₅: *"El punto verde de la línea roja"* <<se muestra cómo desplazan el punto hasta llegar al número (-4)>>

I: *"¿Qué aparece?"*

E₁₅: *"Dos más menos cuatro"*

I: (...) *"¿Cuál es el resultado?"*

E₁₅ y E₁₆: *"Dos"*

I: *"¿Dos?"*

E₁₅ y E₁₆: *"Menos dos"*

I: *"O dos negativo"*

CLASE 3

Se inician las actividades en una hoja de trabajo en el software que se va a utilizar. Ésta hoja de trabajo es la misma que la de la primer clase. Las actividades que se les piden hacer a los estudiantes, consisten en seguir una serie de indicaciones que tienen en las hojas de respuesta que previamente se les entregaron, y anoten en ellas lo que se les pide.

Las siguientes, son las actividades llevadas a cabo por los estudiantes, quienes son observados y cuestionados por los investigadores.

Iniciamos con una suma de números simétricos. El investigador retoma el tema abordado la sesión anterior, que fue suma de números con signo. Algunos estudiantes pasan al frente a resolver unos ejemplos propuestos por el investigador.

(Escena 1 del video tres)

I: (...) *“Pero antes. Aquí nos pide que encontremos la suma, ¿de qué números? ¿Qué números anotamos?”*

Grupo: *“Cinco negativo más cinco”. “Menos cinco más cinco”*

I: *“¿Quién quiere pasar?”*

E1: *“Yo”*

I: *“A ver, pásale. Vamos a utilizar...muy bien <<Pasa el estudiante al frente. Sin necesidad de ayuda, el estudiante abre de inmediato el comando de suma ‘a + b’ arrastra los puntos que corresponden a cada sumando, al número indicado. Mediante el video proyector todo el grupo logra ver el proceso que lleva a cabo el estudiante>> “Cinco negativo, y luego <<alguien responde ‘cinco positivo’>> cinco positivo. Correcto. ¿Cuánto le dio de resultado?”*

Grupo: *“Cinco negativo más cinco”. “Menos cinco más cinco”*

I: *“¿Cuánto nos dio?”*

Grupo: *“Cero”*

El investigador ha llevado a cabo un par de sumas de números simétricos. Solicita que alguno de los estudiantes pase al frente a resolver otra suma. Se cuenta con una computadora para realizar la actividad, y un cañón proyector en el que los estudiantes logran visualizar las acciones que han estado llevando a cabo. Al pasar el estudiante, el investigador le va señalando los números que se van a sumar.

(Escena 9 del video dos)

I: *“¿El primer sumando tiene que ir en el número qué?”*

E2: *“Dos negativo”*

I: *“Ajá. Entonces el primero tiene que ir en el número dos negativo. ¿Cuál es el que vas a mover? ¿Cuál es el primero de nuestros puntos verdes?” <<uno de los estudiantes señala con el curso el punto verde que está en la línea aritmética roja, a lo que el investigador le pide que observe bien, y éste corrige. Realiza los desplazamientos requeridos para posicionar los puntos en los números que se indican en las hojas de trabajo >> “Correcto. ¿Cuánto nos dio?” <<En el resultado>>*

E2: *“Cero”*

I: *“¿Alguien recuerda, insisto, cómo se llaman estos números? <<un estudiante responde, pero no se distingue qué dijo>> “¿Cómo?”*

E3: *“Números simétricos”*

I: *“Números simétricos” <<refuerza la respuesta de la estudiante>>. “¿Qué sucede cuando sumamos dos números simétricos?”*

E4: *“Que...el resultado siempre va a ser cero”*

(Escena 2 del video tres)

El investigador resuelve un ejemplo de resta, transformando esta operación en una suma del simétrico del sustraendo. Enseguida el desarrollo de la clase.

I: *“Es cuatro. ¿Verdad?” <<el primer número que se localizó en la línea algebraica azul>> “¿Y el segundo número?”*

Grupo: *“Menos cinco”*

I: *“Ah, bueno. Dice ‘cuatro menos cinco negativo’”*

E5: *“¿Podría ser una suma?”*

I: *“Pero vamos a ver. ¿La resta, qué es?”*

Grupo: *“Una suma”*

I: *“En lugar de cinco negativo, ¿a qué número lo voy a poner?” <<El punto en la línea roja>> “¿Cuál es el simétrico del cinco negativo?”*

Grupo: *“Cinco positivo”*

I: "Entonces. Éste segundo punto de la línea roja, ¿hacia dónde lo voy a poner?"

Grupo: "Cinco positivo"

I: "¿Cuánto nos dio?"

Grupo: "Nueve"

I: "No dio cuatro más cinco... nueve"

I: "Nos dice en el renglón de hasta debajo de esta página. '¿Cuál fue el cambio que se hizo de la operación original? La operación original era cuatro menos cinco negativo. ¿Cambió a la suma de qué?"

E₅: "Cuatro más cinco"

(Escena 3 del video tres)

El investigador resuelve, junto con el grupo, un ejercicio que viene en sus hojas de actividades.

I: "Ejercicio seis. Resta los números siete negativo menos nueve. Aquí quiero preguntarles una cosa. Aquí que nos dice 'siete negativo menos nueve'. Éste nueve, ¿es positivo o negativo?"

Grupo: "Negativo". "Positivo"

I: "¿Cómo identificamos aquí los números negativos?"

Grupo: "Porque están entre... paréntesis"

I: "Cuando trabajamos números negativos, normalmente los ponemos entre paréntesis, si no se confunden con el signo de la resta, ¿verdad? Entonces aquí el negativo es el siete, y el positivo es el nueve. Entonces vamos a hacer la resta. Seleccionamos 'a + b'. El primer punto, ¿hacia dónde lo voy a desplazar?"

Grupo: "Hacia la izquierda". "Hacia el... ¿siete negativo?"

I: "Siete negativo. ¿A qué dirección del cero?"

Grupo: "Izquierda"

I: "Después..."

E₆: "...nos desplazamos al nueve positivo..."

I: "¿Al nueve positivo?"

Grupo: "Nooo, nueve negativo". "Nueve negativo".

I: "Al nueve negativo, porque ahora vamos a cambiar a su simétrico" <<Observamos que mientras va explicando, también va haciendo el desarrollo de los arrastres en el área de trabajo del software>> "¿Cuánto nos dio?"

E₇: "Mil"

I: "¡¡¡Mil??!!"

Grupo: "¡¡¡Diez y seis negativo!!!"

(Escena 8 del video tres)

El investigador se acerca con una pareja que ha resultado el ejercicio que se explicó previamente, y les plantea unas preguntas a los estudiantes. Les hace hincapié en que se trata de un trabajo en equipo, y que ambos deben participar tanto en la resolución de los ejercicios, como en las respuestas a las preguntas planteadas tanto en las hojas de regitro, como las hechas verbalmente por el investigador.

I: "Otra vez, ¿lo podrías volver a hacer?"

E₈: "Sí. Aquí lo voy a mover hasta el siete negativo" <<se refiere al primer punto sobre la línea azul>> "Y en la línea roja lo voy a poner en el nueve negativo. Luego aquí, toda esta suma me da dieciséis negativo"

I: "Ok. ¿Y que cambio hay con respecto a los signos que tenías al principio y ahora con los que te quedan? ¿Hay algún cambio?"

E₈: "Que tienes toda la operación"

I: "¿Y ahí se encuentra algún número simétrico?"

E₈: "Este... si...el dieciséis negativo..."

I: "Es trabajo en equipo, ¿tú que dices?" <<Le dice al compañero de esta primer estudiante, quien hasta el momento sea mantenido sólo como espectador, sin intervenir en las respuestas. Para animarlo a que participe, le aclara que no saldrá su imagen en el video, sino que sólo se escuchara su voz>> "No te apures no vas a salir tú, sólo tu voz"

I: "Esta muy bien, ¿qué sucede ahí?, porque ella ya lo explicó. ¿Tú que dirías?"

E₉: "Que esta bien"

I: "¿Por que está bien?"

E₉: "Pues no sé"

I: "No chicos, es importantes escucharlos"

E9: “Ya nos escucho”

I: “Yo escuché a él” <<otro estudiante que, sin pertenecer a éste equipo de trabajo, ha respondido algunas preguntas planteadas por el investigador con su pareja de trabajo>>

(Escena 10 del video dos)

Como en el ejercicio anterior, al parecer, no a todos les quedó muy claro cómo se levó a cabo el desarrollo, el investigador se acercó con una pareja para escuchar qué dudas o problemas tuvieron para resolverlo.

I: “Vamos a hacer de a cuerdo a lo que nos va indicando nuestra hojita. ¿Qué ejercicio es el que quieren hacer? A ver muéstrame cuál es el que quieren hacer.”

E10: “El seis (...) <<el estudiante da lectura al ejercicio>>. Resta los números enteros siete negativos maas <<¿más?>>, no, menos nueve positivos.”

I: “Muy bien. ¿Cómo le vamos a hacer? ¿Qué nos dice ahí que hagamos?”

E10: “¿Una resta?”

I: “Vamos a ir siguiendo el procedimiento que nos digan. No hay que adelantarnos a ver si se va a sumar o se va a restar. Simplemente la indicación que nos dicen ahí. A ver. ¿Léeme por favor la indicación, sí?”

E10: “Abre una nueva hoja de trabajo de ALNUSET. Selecciona el comando ‘a + b’”

(Escena 11 del video dos –continuación de la escena anterior-)

I: “¿Dónde está?” <<El comando. El estudiante lo señala con el cursor, y continúa con la lectura de la actividad>>

E10: “Coloque el cursor sobre el primer punto verde. El que representa al primero de los números con los que vamos a trabajar. Haz clic con el botón izquierdo del ratón y sin soltarlo desplaza el punto hasta llegar al valor del número indicado. En este caso el número siete negativo sobre la línea azul.”

I: “Muy bien. ¿Hacia dónde vamos a arrastrarlo?”

E10: Hacia allá <<indican con la mano hacia el lado izquierdo”

I: “¿Y hacia dónde es ‘hacia allá’?”

E11: “Hacia la izquierda”

I: “Muy bien. Ya llegamos <<al número buscado –menos siete->>. ¿Y después?”

E10: “Haz clic sobre el punto verde de la línea roja, y arrástralo hasta recorrer el valor simétrico del segundo número, en este caso al número nueve negativos”

I: “Muy bien. Vamos a arrastrar hasta el nueve negativo. Hasta el nueve negativo. <<los estudiantes arrastran, en un primer momento, el punto hasta el nueve negativo, si embargo, después regresan el punto hasta el dos negativo. Supongo que ellos vieron, en el segundo cuadro de la línea algebraica azul, que llegó al nueve negativo, y creyeron que era ahí donde tenían que terminar el ejercicio. Por lo que el investigador les pidió que observaran bien hacia qué número tenían que arrastrar el punto de la línea algebraica roja. Los estudiantes cayeron en su error, y lo enmendaron desplazando nuevamente el punto de la línea algebraica roja hacia el número deseado>>. A ver. Otra vez señálamele <<le pide a uno de los estudiantes>> ¿dónde está? Ahí en la pantalla”

E11: “Aquí” <<indica con su dedo la posición del número nueve negativo>>

I: Muy bien. Y ahí tiene que quedar? ¿O hasta ahí tenemos que arrastrar el número?”

E11: “Hasta ahí arrastrar el número”

I: “Ah, entonces tenemos que arrastrar el punto de abajo, ése, hay que arrastrarlo hasta el nueve negativo. <<los estudiantes arrastran el punto hasta el lugar indicado>> Muy bien. ¿Después?”

E10: “La posición del segundo punto verde es la que indica el resultado de la operación que se llevó a cabo. La cual en este caso está indicado por...” <<señala con el cursor el número donde quedó el segundo punto verde de la línea algebraica azul>>.

I: “Ajá, escríbelo ahí” <<en las hojas de trabajo>>.

E11: “Menos negativo diez y seis”

E10: “¿mas nueve negativo?”

I: “¿Cómo? Escríbelo, escríbelo”

Se observa que uno de los estudiantes escribe en sus hojas de trabajo la operación

“-7 + -9”.

I: “Muy bien. ¿Qué dijimos que íbamos a hacer con los números negativos aquí para que no confundirnos? ¿Entre qué los íbamos a poner? <<silencio de los estudiantes. Mmm...>> Observa el ejemplo que está unos renglones arriba de tu hoja. ¿Entre qué pusimos el número negativo, para no confundirnos”

E11: “Entre los... <<parece buscar la palabra adecuada>>

I: “Los paréntesis... Muy bien... Cada número, no toda la suma, cada número <<se observa que uno de los estudiantes está anotando en la hoja de trabajo los números correspondientes entre paréntesis – (-7) y (-9)->>. Ajá. Sí. Correcto. Ahí estamos indicando ¿qué? ¿Y qué operación estamos indicando?”

E₁₀: “Una este... ¿resta?”

I: “¿Qué signo tiene ahí en medio de los dos números?”

(Escena 12 del video dos –continuación de la escena anterior-)

E₁₀: “Una suma”

I: “¿Y cuánto les dio el resultado?”

E₁₀: “Mmm el resultado es...<< observa en la pantalla el número en el que quedó el segundo punto de la línea azul, y da clic sobre el punto amarillo, donde se muestran tanto la operación que se llevó a cabo (-7+ -9), como el resultado (-16)>> dieciséis”

I: “Ah entonces, vamos a poner ahí. Lo que aparece en el cuadro amarillo hay ponerlo en esa línea de abajo” <<en sus hojas de trabajo>>

E₁₀: “¿Aquí?” <<Señala con el dedo el espacio de la hoja donde se pide que respondan>>

I: “Exactamente como está en el cuadro amarillo. (...) ¿Nada más aparece el puro dieciséis negativo”

E₁₀: “Y un cuadrito”

I: “¿Nada más aparece eso? Yo veo otros números ahí.”

E₁₀: “Dieciséis negativo”

I: “Pues hay que poner la operación y el resultado”

E₁₁: “¿Abajo se lo pongo?”

I: “Ahí mismo. Si quieres bórralo y ponlo a un lado” <<Se observa que uno de los estudiantes escribe la operación (-7) + (-9)>>

(Escena 13 del video dos)

El investigador se acerca con una pareja que está resolviendo un ejercicio. Observa lo que van resolviendo y les pregunta el procedimiento que están ejecutando.

E₁₂: <<se escucha que está dando lectura a la actividad>> “Para restar más de dos números hay que proceder restando de dos en dos. Por ejemplo, resta diez positivo menos cuatro negativo <<se observa en el video que desplazan el primer punto verde de la línea azul, hasta llegar al número diez positivo. Después, desplazan el punto de la línea roja hacia el número cuatro negativo>>

I: “¿Cuánto nos dio?”

E₁₃: “Seis”

E₁₂: <<continuando con la lectura de la actividad>> “Y ahora lo que va a hacer... <<es interrumpida por el investigador>>

I: “A ver. Pero recuerda que vamos a cambiar al simétrico de éste <<les indica el número (-4) en sus hojas de trabajo>>. Entonces en lugar del cuatro negativo, ¿cuánto era? A ver, el primer número...”

E₁₂: “Pero sí estábamos bien”

I: “¿Segura? Vamos a checarlo ahorita”.

E₁₂: “Sí porque nos salió cero”

I: “Mmm. Vamos a ver. Entonces éste <<El primer punto verde de la línea azul. El primer sumando>> lo desplazamos hacia dónde. (...) Hacia el diez positivo. <<Se observa, nuevamente, a los estudiantes desplazar el punto hacia el número señalado>>. El siguiente, ¿lo vamos a mover hacia dónde?”

E₁₂: “Menos cuatro negativo”

I: “Pero...como se convirtió en **suma del simétrico** <<recalca las palabras suma y simétrico. Los estudiantes arrastran el punto hacia el cuatro positivo>>, ¿cuánto nos dio?” <<Los estudiantes observan cuál fue el resultado>>.

E₁₂: “¡Ah, ya!... nos dio catorce.”

I: “¿Y después? Repetimos el procedimiento... ¡ah no!, no no no no. Nuevo no. <<los estudiantes ya iban a abrir otra pareja de trabajo en el software, lo que el investigador les impide>>. Desde ahí mismo el ‘a + b’. Vamos al ‘a + b’ (...) Ese primer punto, va a ser el número que nos salió ahorita <<Es decir, el catorce>>”.

E₁₂: “Catorce”

E₁₃: “Entonces será al catorce positivo”

I: “Ese desplázalo ¿hasta dónde?”

E₁₂: “¿Catorce positivo?”

I: “Vamos a ver. No sé. Desplázalo hasta donde teníamos el resultado de ahorita” <<se observa que los estudiantes mueven el punto que se refiere al primer sumando, hacia el número catorce positivo>>.

E₁₂: <<Mientras, la estudiante continúa con lectura el ejercicio>>. “Menos seis positivo Se le cambia, ¿no?” <<Terminan de posicionar el punto en el número catorce>>

I: “Menos... Como éste es... ¿éste seis es negativo o positivo?” <<en la operación $10 - (-4) - 6$ >>.

E₁₂: “Negativo”

I: “¿Por qué negativo? ¿Por qué el cuatro anterior fue negativo?”

E₁₂: “¡Ah!, porque se encontraba con los...”

I: “Entre paréntesis. ¿Éste está entre paréntesis?”

E₁₂: “No”

I: “Entonces el seis qué es”

E₁₃: “Es... positivo. Entonces sería negativo” <<dice, mientras al mismo tiempo señala la pantalla dirigiéndose al área de trabajo del software, y arrastrando el punto sobre la línea roja, hacia el número seis negativo>>

I: “Muy bien. ¿Cuánto nos dio?”

E₁₂: <<Hace clic en el punto amarillo sobre la línea azul. Se despliega el cuadro, y aparecen tanto la operación llevada a cabo, como el resultado>> “Ocho”

I: “Correcto (...)”

(Escena 4 del video tres)

El investigador asiste con otra pareja que trata de resolver el mismo ejercicio. Les pide que intenten resolverlo por si mismos.

E₁₄: <<Da lectura del ejercicio>> “Resta los números enteros diez... negativo, cuatro negativo, seis negativo. Para restar más de dos números, hay que poder restarlos de dos en dos. Por ejemplo, restas diez negativo menos cuatro negativo. Utiliza ALNUSET para llevar a cabo la suma indicada. (...)” <<No realizan alguna acción en el software. Parece que esperan a que el investigador les indique qué deben hacer, pero éste les pregunta cómo resolverían ellos la actividad>>

I: “¿Qué es lo que van a tener que hacer?, ¿qué harían?, ¿cómo lo pondrías en la pantalla? <<Los estudiantes ya empiezan a realizar un primer intento de resolución de la actividad. Sin embargo, no se percatan que están arrastrando los puntos de la línea algebraica con el ratón hacia los números equivocados>> “¿Y luego?, ¿qué hacen después?, ¿lo pueden decir?” <<La escena termina. Los estudiantes intentaron resolver la actividad, aunque les faltó dominio del software>>

(Escena 5 del video tres)

El investigador pide a dos estudiantes que expliquen qué cambios observan durante la resolución de un ejercicio.

I: “¿Ya saben cómo lo van a hacer?”

E₁₅: “Ah, sí. Primero lo ponemos en archivo. Seleccionamos el ‘a + b’, y... en el primer punto verde, que es éste” <<Señala el monitor hacia el punto referido>> “Le ponemos este... la flechita, que nos indica al primero de los números con el que vamos a trabajar” <<Arrastra el punto sobre la línea azul hasta llegar al número uno negativo>> “Lo vamos a arrastrar al uno negativo. Luego éste, el de la línea roja” <<Señala el punto sobre la línea roja>> “lo vamos a arrastrar hasta el número seis positivo” <<Realizan el arrastre indicado>> “Luego en el segundo punto verde, que indica el uno negativo mas el seis positivo. Le damos clic ahí. Le ponemos en el punto mayor que está abajo del resultado, y nos sale el cinco positivo. Que es el resultado de toda la operación”

I: “Ah, okey. Y... ¿ahí hay algún número simétrico?”

E₁₅: “Este... Sí”

I: “¿Cuál sería?”

E₁₅: “El... ¿cinco?”

I: “¿Qué dijo el maestro sobre los números simétricos?, ¿dónde iban a estar, en qué posición?”

E₁₆: “En el lado ¿izquierdo?”

E₁₅ y E₁₆: “No hay números simétricos”

(Escena 14 del video dos)

El investigador se acerca con una pareja que está resolviendo el mismo ejercicio que la anterior. Observa lo que van resolviendo y les pregunta el procedimiento que están ejecutando.

I: “¿Hasta qué número recorrimos?”

E₁₇: “Hasta el diez”

I: “Señálamelo con tu dedo por favor” <<el estudiante obedece, y le muestra con su dedo dónde está en la hoja de trabajo el número que va a ubicar sobre la línea azul>>

E₁₈: “Y el de aquí abajo, menos cuatro. Que su simétrico es el cuatro positivo” <<Uno de los estudiantes arrastra el punto sobre la línea roja hasta el número mencionado>> “Y luego, menos seis.”

¿Dónde está? ¡Aquí está! Tenemos aquí...ponemos otra vez 'ab' <<Se refiere al comando 'a+ b' para realizar una nueva suma. Mientras lo va diciendo, también va llevando a cabo la actividad en el área de trabajo del software. Arrastra el primer punto sobre la línea azul hasta el número catorce>>

I: *"¿Por qué lo pusiste ahí?" <<Se refiere al desplazamiento que acaba de mencionarse>>*

E18: *"Para que sumara. Y el de acá lo puse en el seis"*

I: *"¿En dónde?"*

E18: *"En el seis"*

I: *"¿Por qué en el seis?"*

E18: *"Porque aquí dice menos seis" <<Señala a su hoja de trabajo el último número en la operación $10 - (-4) - 6$ >>*

I: *"¿Ese seis es positivo o negativo?"*

E18: *"Positivo"*

I: *"Entonces, como es una resta..."*

E18: *"Ah, su simétrico. Entonces menos seis" <<mientras responde esto va desplazando el punto sobre la línea roja hasta el número seis negativo>>*

I: *"¿Y cuánto nos dio?"*

E18: *"Nos dio...ocho" <<En ese momento da clic sobre el punto amarillo en la línea azul, y se despliegan tanto las operaciones que se llevaron a cabo, como el resultado. Se nota que está escribiendo sus resultados en las hojas de trabajo>>*

I: *"Y ahora, ¿qué es lo que vamos a hacer?"*

E17: *"Explicar lo que acabamos de hacer"*

I: *"Alguno de ustedes dos va a escribir, los dos van a opinar de qué fue lo que hicieron. Con sus palabras, ¿sale?"*

(Escena 7 del video tres)

E19: *"En archivo das en nuevo. Luego 'a + b'. Luego estee. Resta de los números enteros. Menos seis, menos nueve, menos trece"*

I: *"¿Y ahora que van a hacer?"*

E19: *"Lo vamos a restar de este lado. ¿Es qué?, ¿menos seis?" <<Van desplazando el punto sobre la línea azul hasta llegar al número nueve negativo>> (...) "es el número nueve, y este es el número trece. El resultado es nueve más trece igual a menos veintidós... veintidós negativo"*

E19: *"¿Positivo, ¿no?"*

E20: *"Negativo"*

I: *"No sé, ¿porque dicen que es positivo?"*

E19: *"Porque es de este lado y el negativo es por donde se suman?"*

E20: *"Los negativos son del lado izquierdo y el positivo es del lado derecho"*

I: *"¿Y ahí hay algún número simétrico?"*

E19: *"Sí"*

I: *"¿Cuál?"*

E19: *"El menos veintidós"*

I: *"¿Y q es un número simétrico?"*

E19: *"Es un número que va 'de este lado'" <<no se distingue hacia qué lado se refiere>>*

E20: *"Queda del lado de la izquierdo"*

(Escena 6 del video tres)

Los estudiantes resuelven el último ejercicio, y van explicando al investigador el procedimiento que van llevando a cabo.

I: *"Para poderlo resolver, ¿qué tienen que hacer?"*

E21: *"Primero sumar esto dos dígitos. Y ya después por lo negativo"*

I: *"Ah, ok. Me van explicando como lo hacen en el programa, y levanten su voz para que se puedan escuchar"*

E21: *"Se suma el nueve más el seis que da... nueve... quince. Y se pone 'ab'. Se pone quince negativo en el primer punto" <<Abren otro comando de suma, y van arrastrando el punto hasta donde quedó el resultado de la suma anterior>> "Quince negativo y trece posi... trece negativo, que es el otro número. El trece negativo <<dice a su compañero para que arrastre hasta ahí el punto de la línea roja>> y ya después esperamos el resto. Que es quince negativo más trece negativo, se ve en el cuadro" <<El recuadro que aparece en la parte inferior izquierda del área de trabajo de ALNUSET, donde logran*

visualizarse las operaciones que se han ido llevando a cabo>>, “y le damos en el <<punto>> amarillo. Queda menos veintiocho negativo, no positivo, no sí, negativo”

I: “¿Y hay algún cambio de los signos que tienen en el papel?”

E₂₁: “Sí. Si porque se sumaron. Nueve más seis son quince. Entonces estos se agrupan y la después...este es el que se quita”

I: “Y hay ahí algún número simétrico”

E₂₁: “Mmm no”

I: “¿Porque no lo hay?”

E₂₁: “Bueno sí pero porque no utilizamos lo de positivo”

CLASE 4

La cuarta y última sesión, no tuvo una introducción como las dos anteriores, en las que vimos cómo resolver una suma o resta de números con signo desde el software. En esta ocasión, las actividades fueron planteadas y resueltas directamente por los estudiantes. Esto no significa que no estuvimos al tanto de las dudas que surgían entre los estudiantes para la solución de los problemas.

(Escena 15 del video dos)

El investigador se acerca con una pareja que está resolviendo el primer problema. Como vio que ya está resuelto en la hoja de trabajo del software, les pide que le expliquen cómo lo resolvieron:

I: *“Muy bien. Aquí veo que ya resolviste el primer problema. ¿Qué nos dice el primer problema?”*

E₂₆: *“Veinticuatro más...”*

I: *“¿Qué nos dice?”*

E₂₆: *“Dice: Jorge tiene veinticuatro pesos, pero le debe quince a Rocío. Al hacer el pago, ¿cuál es el saldo de Jorge? Plantea la operación que vas a utilizar para resolver el problema. ¿Es una suma?”*

I: *“¿Cómo qué números vamos a sumar?”*

E₂₆ y E₂₇: *“Veinticuatro más quince negativo”*

I: *“Entonces, ¿cuál es el resultado?”*

E₂₆ y E₂₇: *“Nueve”*

(Escena 9 del video tres)

El investigador acompaña en la resolución del primer problema a una pareja de estudiantes. Éstos le explican lo que van haciendo, mientras resuelven el problema.

E₃: *“<<Da lectura a las indicaciones para la resolución de problemas. Posteriormente, inicia ya la resolución del problema>>. ‘‘Jorge tiene veinticuatro pesos, pero le debe quince pesos a Rocío. Al hacer el pago, ¿cuál es el saldo de Jorge? Plantea la operación que vas a realizar para resolver el problema’. Una resta”*

I: *“Pónganla”*

E₃: *“¿Le pongo, resta?”*

I: *“Sí”*

E₃: *“Dice (...), ¿podemos aquí, hacerla?” <<Resolver el problema sobre las hojas de respuesta>>*

I: *“sí claro”*

E₃: (...) *“Menos quince”*

(Escena 10 del video tres –continuación del anterior-)

I: *“El veinticuatro, ¿es positivo o negativo?”*

E₄: *“Positivo”*

I: *“¿Y el quince?”*

E₃: *“Negativo” <<Llevan a cabo el arrastre de los puntos sobre la línea algebraica. Sólo que ambos números fueron colocados en el lado positivo de la línea. Al término de esto, quedan sorprendidas, pues el resultado obtenido (39) no es el que esperaban>>*

E₃: *“No, está mal”*

I: *“¿Cómo creen?, ¿ahí qué paso?”*

E₃: *“Debe ser por la suma, ¿no?”*

E₄: *“Entonces sería necesario el negativo” <<Vuelven a realizar la operación en el software, pero en este caso, colocan el quince en el lado de los números negativos. Al parecer, ahora la respuesta obtenida (9) las deja más satisfechas>>*

E₃: *“Nos dio nueve”*

I: *“Y de que manera vieron un cambio en las operaciones que estuvieron realizando a lápiz, y las que hicieron en el software”*

E₃: *“De que un número era positivo y el otro era negativo”*

I: *“Y en que momento se dieron cuenta”*

E₃: *“Cuando estábamos...”*

E₄: *“Cuando salió el resultado de la otra operación”*

(Escena 11 del video tres)

Se continúa preguntando a los estudiantes cómo resolvieron el primer problema. Ahora, con otra pareja.

I: *“Ustedes me van a ir indicando que es lo van a ir haciendo, ¿ok?”*

E₅: *“Sumamos.. este...”*

(...)

E5: "Porque dice que Jorge tiene 24, pero dice que le debe 15 a Rocío y al hacer el pago cuál es su saldo. Y el 24 lo pusimos en positivo y el quince en el negativo para hacer la resta y salió nueve de sado"

I: "Recuerden que la operación que les sale ahí la sale ahí la tienen que colocar aquí (en las hojas de respuesta), para que nosotros nos demos cuenta que lo hicieron en el software"

(Escena 16 del video dos)

El investigador se acerca con otra pareja para que le expliquen de qué forma resolvieron, también, el primer problema.

E6: "Veinticinco que debe... se tiene que venir hasta el veinticinco de... negativo"

I: "¿Veinticinco? ¿Por qué veinticinco?"

E6: "¡Veinticuatro!"

I: "¿Por qué veinticuatro negativo?"

E6: <<Da una nueva lectura en silencio al problema, y corrige>> "¡Ah, no es cierto! Veinticuatro positivo y quince negativo" <<Mientras van realizando los desplazamientos con el ratón, para ubicar los números señalados en los problemas, presentan algunos problemas 'técnicos' con el propio ratón, ya que no pueden moverlo libremente>>

E6: "Veinticuatro, y quince negativo... porque es lo que debe" <<Dice la estudiante mientras se ven en el monitor los movimientos que está llevando a cabo>>.

I: "Por que es una deuda, por eso es negativo, ¿verdad?"

E6: "Sí. Y ya después veremos el resultado. Que es veinticuatro más menos quince" E7: "Más quince negativo"

La estudiante E6 se nota un tanto sorprendida al momento de leer el resultado 'veinticuatro más menos quince'. Al parecer están más habituados a llamarles, por ejemplo, 'quince negativo' que 'menos quince'. Esto se corroboró cuando su compañero complementa el resultado diciendo 'más quince negativo'. Entonces ahí sí se escuchan ambos más seguros de su respuesta.

E6: "Salió a nueve" <<El resultado>>

I: "Entonces, ¿qué operación es la que se llevó a cabo?"

E6: "Una... ¿resta? Una resta"

I: "¿Qué es lo que nos indica ahí el software?"

E7: "Una resta. Una suma y después una resta"

I: "Una suma de qué tipo de números. ¿Iguales o diferentes del signo?"

E6: "Diferentes. Porque es un negativo y un positivo"

I: "¿Y cuando sumamos un positivo y un negativo?"

E7: "Se hace la resta"

I: "Se restan. Perfecto. Ahora eso que me acabas de decir, quiero que me lo escriban ahí" <<en las hojas de trabajo>>

(Escena 17 del video dos)

El investigador está con una pareja que ya ha resuelto un problema. Les cuestiona el procedimiento, y les pide que le expliquen el porqué de algunas de las anotaciones vistas en las hojas respuestas.

I: "¿Para qué menos?" <<El investigador se refiere a la expresión '24- (-15)', que los estudiantes utilizaron para plantear el primer problema>>

E8: "¿O era como la operación que aparecía ahí?"

I: "No sé. Tú dime. ¿Qué es lo que aparecía ahí?... ¿Qué es lo que había aparecido?... Pero la intención es que antes de que lo pases al software ALNUSET primero me pongas aquí la operación. ¿Por qué crees que sea veinticuatro menos quince negativo?"

E9: "O sea es que aquí no era" <<Dice el estudiante señalando alguno de los signos menos de la expresión>>

E8: "Era veinticuatro **más** menos quince"

I: "¿Por qué era veinticuatro más quince negativo? O más menos quince, como dices"

E8: "Por que...sin el sistema..."

I: "Ahorita vamos a olvidarnos un poquito de ALNUSET. ¿Por qué sería veinticuatro más quince negativo?"

(Silencio durante unos segundos, hasta que responde)

E8: "¿Porque así sería la operación sin el sistema?"

I: "¿Por qué?"

Esta pareja de estudiantes no supo cómo respaldar sus resultados, ni cómo explicar los procedimientos que llevaron a cabo.

(Escena 18 del video dos)

El investigador está con una pareja de estudiantes, que están resolviendo un problema. Les pide que le digan qué hicieron para plantear y resolver el programa.

I: *“Léeme el problema por favor”*

E₁₀: *“<<El estudiante inicia con la lectura del problema>> “La temperatura ambiente era de dos centígrados a las diez de la noche. A las tres de la madrugada bajó cuatro centígrados. ¿Cuál fue la temperatura a las tres de la mañana?”*

I: *“¿Qué es lo que hicimos?”*

E₁₁: *“Estee. Sumar dos positivos más cuatro negativos y... nos da de resultado dos negativo”*

I: *“Entonces, ¿cómo interpretáramos esto en la temperatura? ¿Cuál fue la temperatura a esa hora?”*

E₉: *“Estee... dos centígrados... dos grados centígrados”*

I: *“Si fueran dos grados centígrados sería ahí una temperatura positiva. Cuando es más chica que el cero, o cuando son temperaturas muy frías. ¿Son sobre cero o bajo cero?”*

E₁₀ y E₁₁: *“Bajo cero”*

I: *“Ah, entonces, ¿cuál sería la temperatura aquí?”*

E₁₀: *“Estee... dos centígrados bajo cero”*

(Escena 18 del video dos)

El investigador trabaja con una pareja el último problema. La diferencia entre éste y los otros problemas, radica principalmente en la magnitud de las cantidades con las que se va a trabajar. No obstante ello, los estudiantes encontraron la forma de trabajar con esas cantidades encontrando, por sí solos, una herramienta del software que permite alejar o acercar el área de trabajo (el zoom).

I: *“En este problema vamos a trabajar con números grandes, ¿verdad? Habla de... hasta centenas. ¿Qué hicimos en el programa de ALNUSET para poder ver los números?”*

E₁₂: *“Alejarlo”*

I: *“¿En dónde le tuvo que dar clic tu compañero? <<Para acercar la imagen. La estudiante señala con el dedo el ícono ... que sirve para acercar o alejar la imagen en pantalla. Aunque la estudiante dijo ‘acercar’, en realidad lo que se hizo fue alejar la imagen en pantalla>>”*

E₁₂: *“Para que se agrandara y veamos los números más grandes” <<Al hacer clic sobre el ícono ... logran que se vean números de mayor magnitud, que es a lo que se refiere la estudiante –no más grandes de tamaño->>”*

I: *“¿Ahí es suficiente, donde lo dejó tu compañero?” <<Se ve en la línea algebraica que el intervalo entre los números es de 20 en 20. Por eso la pregunta del profesor si es suficiente ese nivel de alejamiento, pues las cantidades que se van a trabajar quedan en centenas –del 250 al 750->>”*

E₁₂: *“Sí, ahí está bien”*

I: *“¿Ahí hasta qué número alcanzamos a ver?”*

E₁₂: *“Hasta el cien. Cien negativo y cien positivo”*

I: *“¿Podríamos alejarnos un poquito más? Bueno, ¿podríamos dale un poquito más de zoom?”*

E₁₂: *“Sí. Doscientos y doscientos negativo”*

I: *“Muy bien. Entonces con eso ya”*

E₁₂: *“Con eso ya resolvemos el problema”*

I: *“Y a ver, cómo lo resolveríamos”*

E₁₂: *“<<La estudiante inicia con la lectura del problema 5 “Juan debía quinientos al banco en una tarjeta de crédito. Cobró un cheque por setecientos cincuenta. Pagó lo que debía, y después compró una camisa que costó doscientos setenta y cinco. ¿Cuál es el saldo nuevo de Juan? Se tendría que... debía cincuenta y pidió...”*

I: *“¿Debía cincuenta?”*

E₁₂: *“¡Quinientos!, perdón”*

I: *“¿En dónde lo pondríamos ése?”*

E₁₂: *“En negativo. Porque era negativo porque... debía” <<Observamos que los estudiantes desplazan el punto sobre la línea azul hasta buscar llegar al número quinientos negativo. En ese lapso, se escucha que E₃₂ dice ‘más quinientos’, aunque la dirección del arrastre es hacia los números negativos>>”*

“Después cobró un cheque por setecientos cincuenta, y lo pondríamos en positivo” <<Observamos que desplazan el punto correspondiente a la línea roja hacia el número setecientos cincuenta positivo>>”

“Y después, veríamos el resultado, y ya después haríamos la otra” <<suma>>”

I: “¿Y cuánto nos da de resultado?”

E12: “*Doscientos cincuenta. Abrimos ‘a o b’*” <<Dan clic en el comando ‘a + b’, para realizar una nueva suma. Como no encuentran dónde están los puntos de la nueva operación, el investigador interviene diciendo que estos puntos aparecen cerca del número cero>> “*Y lo pondríamos en el doscientos cincuenta positivo*” <<Arrastran el ratón hasta llegar al número que dicen. Sin embargo, no se percatan que, debido al zoom, el espacio entre los dos puntos de la línea azul es muy pequeño, y el punto que seleccionaron fue el segundo punto, no el primero. Esto trae como consecuencia que, en vez de realizar una suma, el software realizará una resta, aunque esto, los estudiantes no lo saben>> “*Y doscientos setenta y cinco negativo*” <<Arrastran el punto sobre la línea roja hasta el número indicado>> “*Y veríamos el resultado. Nos salió...*” <<Los estudiantes quedan sorprendidos al ver el resultado, pues éste resulta ser 525>>

I: “¿Sí crees que nos haya dado eso?”

E12: “*Quinientos veinticinco...*”

I: “¿Sí crees que sea?”

E12: “*No*”

I: “¿Por qué?”

E12: “*Porque si debías cincuenta al banco –quinientos- ¡quinientos! al banco, y cobró un cheque por setecientos cincuenta, pero pagó los quinientos le sobran doscientos cincuenta, entonces le faltarían veinticinco pesos*”

I: “*A ver. Entonces vamos a repetirlo. A lo mejor por lo cercano de los punto se convirtió en lugar de resta, suma*”

Abren otra hoja de trabajo en ALNUSET para repetir el procedimiento, e identificar dónde estuvo la falla.

E12: “*Entonces*” <<volviendo a leer el problema>>, “*Juan debía quinientos, que son negativos*” <<Hacen clic nuevamente en el zoom, para alejar la imagen>>

I: “¿*Qué te parece si vamos arrastrando el primer numerito ahorita?, que se el puntito. Hay que ver que cuando le des clic al punto, no se convierta en resta* <<Esto lo identificamos, porque sobre el segundo punto de la línea azul nos indica qué operación se está realizando. Una resta o una suma. Hacen el desplazamiento hasta llegar al número (-500) sobre la línea azul>>

E12: “*Y después serían setecientos cincuenta positivo*” <<Arrastran el punto sobre la línea roja hasta llegar al número 750>> “*Ahí está. Y veríamos el resultado. Que son doscientos cincuenta. Abrimos uno nuevo*” <<hoja de trabajo en ALNUSET>>

I: “*O en ese mismo de ‘a + b’ porque estamos en la misma operación*” <<Dan clic en ‘a + b’ para abrir una nueva suma>>

E12: “*‘a + b’. Y serían doscientos cincuenta*”

I: “*En el primer puntito... Bien. Ése*”

E12: “*Al negativo*” <<Arrastran el punto hacia los números negativos. Sin embargo, el investigador les pregunta por qué hacia allá. Corrigen y arrastran el punto hacia el número 250 positivo>> “*Y... doscientos setenta y cinco negativo, porque se compró una camisa*” <<Arrastran el punto hacia el número (-250)>>

I: “*Y fue un gasto, ¿verdad?*”

E12: “*Ahí está. La operación es esa. Y el resultado es negativo*”

I: “*Y entonces, ¿cuál es su saldo ahora?*”

E12: “*Menos veinticinco, porque debe veinticinco pesos*”