SECRETARIA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

Concepciones de maestros de secundaria respecto a la construcción y clasificación de cuadriláteros: Una experiencia usando Cabri-Géomètre

TESIS

Para obtener el grado de Maestra en Desarrollo Educativo en la línea de Especialización en Educación Matemática

Presenta

Afrodita López Garcés

Directora de tesis

Dra. Mariana Luisa Sáiz Roldán

MAYO 2009

A la memoria de mis padres Jonás y Herminia
Con profundo amor y eterno agradecimiento.

A mi esposo J. Mauricio y a mis hijos, Paris y Lynet.
Por la felicidad, alegría, esperanza, emoción,
risas y amor que a diario me regalan.
LOS AMO.

A mi hermano Hunabku por su apoyo y su cariño.
GRACIAS.

A mi muy querida Directora de tesis le agradezco su tiempo, su apoyo incondicional y su amistad, la Dra. Mariana Sáiz Roldán.

A la Dra. Silvia Alatorre, Dra. Verónica Hoyos, Dra. Santa Soledad Rodríguez y al Dr. José Luis Cortina, gracias por atender con entusiasmo la tarea de leer y hacer importantes aportaciones en la presente tesis.

A la maestra Lucia Moreno Directora del Centro de maestros María Lavalle Urbina y a los maestros que participaron en el taller gracias.

ÍNDICE

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA

CAPÍTULO IV

PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

INTRODUCCIÓN

Este trabajo es el resultado de un estudio en el que se identificaron algunas concepciones de maestros de secundaria sobre el contenido geométrico "construcción y clasificación de cuadriláteros". Los datos del estudio fueron obtenidos gracias al diseño de un taller que lleva por nombre "Uso de Cabri-Géomètre en la enseñanza de la geometría", que fue impartido en un centro de maestros.

El trabajo está organizado en cuatro capítulos. En el primer capítulo se presentan los antecedentes, lo que incluye el planteamiento del problema, la justificación, las preguntas de investigación, los objetivos y los ejes analíticos.

En el segundo capítulo se presenta el marco conceptual y teórico. En primer lugar, se abordan aspectos relacionados con la revisión y análisis de los modelos de la enseñanza de la geometría usados en México de 1980 a la fecha. Posteriormente, se presenta un análisis comparativo del currículum mexicano actual y en los estándares curriculares del NCTM (National Council for the Teaching of Mathematics). Después se da a conocer la teoría de Van Hiele. En cuarto lugar se incluyen las opiniones de los expertos en torno a la enseñanza de la geometría en general y con los cuadriláteros en particular, retomadas de investigaciones que tienen que ver con niños y adultos. En seguida se presentan resultados de investigaciones que tienen que ver con el uso de nuevas tecnologías en la enseñanza de la geometría, particularmente algunas que tienen que ver con el uso de Cabri-Géomètre en la enseñanza de la geometría. Casi para terminar se revisan y analizan estudios sobre las concepciones de maestros acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Por último se mencionan los referentes teóricos.

En el capítulo tres, nombrado metodología, se presenta el enfoque de la investigación, así como la descripción del pilotaje, se describen los sujetos que participaron en el estudio así como los instrumentos empleados, se hace una descripción de la intervención y se da a conocer cómo se obtuvieron los datos.

Finalmente, en el capítulo cuatro, se hace la presentación de los datos y análisis de los mismos; se da a conocer la descripción de las categorías de análisis para las fases; cero, uno y dos del taller propuesto y también se presentan las consideraciones finales, las cuales se elaboraron tomando en cuenta las preguntas de la investigación.

La presente tesis se inscribe en la línea de investigación encaminada a reconocer como parte de la didáctica, las concepciones que tienen los maestros sobre los contenidos que enseñan. Con ella se pretende contribuir a mostrar que para transformar la práctica docente de acuerdo con el enfoque planeado por los planes y programas de estudio es necesario que se conozcan las concepciones de los maestros. En particular, este estudio trató de aportar, en relación con la construcción y clasificación de cuadriláteros.

CAPÍTULO I

ANTECEDENTES DEL ESTUDIO

1.1 Planteamiento del problema

1.2 Justificación

1.3 Preguntas de investigación

1.4 Objetivo general

1.4.1 Objetivos específicos

1.5 Ejes analíticos

1.1 Planteamiento del problema

En 1993 se presentó una reforma al plan y programas de estudios de matemáticas en la educación secundaria; en él se establecía la prioridad de ampliar y consolidar los conocimientos y habilidades matemáticas y las capacidades para aplicar la aritmética, el álgebra y la geometría en el planteamiento y resolución de problemas de la actividad cotidiana y para entender y organizar información cuantitativa (SEP, 1993: 13). Se marcaba como propósito central en los programas de matemáticas que el alumno aprendiera a utilizarlas para resolver problemas (SEP, 1993: 37).

La última reforma se dio en 2006; en estos nuevos planes y programas de matemáticas se retoma la propuesta de resolución de problemas sin embargo se enuncia que el planteamiento central consiste en llevar a las aulas actividades de estudio que despierten el interés de los alumnos y los inviten a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver los problemas y a formular los argumentos que validen los resultados (SEP, 2006: 11).

Además en el actual programa se dice que se intenta ir más allá de los aprendizajes esperados, por lo que en este plan se incluye un nuevo concepto, que es el de competencias matemáticas; así mismo se dice que su desarrollo deriva en conducirse competentemente en la aplicación de las matemáticas, para ello se menciona que se deben desarrollar cuatro competencias: planteamiento y la resolución de problemas, argumentación, comunicación y manejo de técnicas (SEP, 2006: 17).

Tomando en cuenta estas dos reformas que se ha planteado en educación secundaria y viendo de manera particular a las matemáticas se puede inferir que las autoridades educativas están conscientes que la asignatura tiene gran trascendencia. Sin embargo, a pesar de que se den a conocer reformas para esta disciplina con el fin de mejorar la calidad, se ha podido constatar por resultados de diferentes evaluaciones (ENLACE aplicado en 2006, EXCALE aplicado en 2007, PISA aplicado en 2003 y 2006[1],) que el alumno enfrenta dificultades no sólo en la comprensión de contenidos, sino también en su aplicación.

Al revisar las publicaciones de los resultados del proyecto internacional PISA (Programme for International Student Assessment), elaborado por la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico) podemos observar que los estudiantes mexicanos se ubican por debajo de la media. En la tabla siguiente se observan las medias de desempeño de siete países iberoamericanos en el PISA 2006 y porcentaje de alumnos en cada nivel de desempeño matemático; como ahí se observa los sietes países muestran medias de desempeño por debajo de la generalidad de la OCDE (500 puntos). México tiene a más de la mitad de su alumnado debajo del Nivel 2; es decir, debajo del mínimo aceptable según los criterios de PISA.

[1] ENLACE es una prueba que se aplicó por primera vez el mes de junio del 2006 a más de 8.3 millones de niños y jóvenes de 3º a 6º grados de educación primaria y 3º de educación secundaria. Esta prueba evalúa el logro académico en las asignaturas de español y matemáticas de todas las escuelas del país: públicas y privadas, urbanas y rurales, incluyendo a las que atienden a la población en desventaja: educación indígena, cursos comunitarios CONAFE y telesecundarias.

La Secretaría de Educación Pública diseñó ENLACE con el propósito principal de transitar de una concepción de la evaluación como mecanismo de control o fiscalización, a la evaluación como un medio fundamental para propiciar aprendizajes individuales y organizacionales que contribuyan a la mejora educativa del país desde el salón de clases y desde la escuela misma.

El INEE planteó la necesidad de contar con instrumentos teóricos y técnicos que evaluaran el aprendizaje de los estudiantes, por lo cual creó una generación de pruebas nacionales denominadas Exámenes de la Calidad y el Logro Educativo (Excale), las cuales fueron aplicadas por primera vez en el año 2005.

PISA es un proyecto comparativo de evaluación impulsado por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) quien como organización internacional intergubernamental reúne a los países más industrializados de economía de mercado. México es miembro de la OCDE desde 1994. Ahora bien, el objetivo principal de PISA es la evaluación de las competencias que los estudiantes necesitarán a lo largo de su vida. Cabe mencionar que esta evaluación no es curricular y que incluye estudiantes entre 15 años tres meses y 16 años dos meses al momento de la evaluación. En nuestro país es a partir del nivel secundaria y quedan excluidos los estudiantes de 15 años que aún se encuentren en algún grado de la primaria, asimismo quienes no asisten a la escuela. PISA evalúa tres dominios: lectura, matemáticas y ciencias.

Los resultados sugieren que los estudiantes mexicanos no están aprendiendo los conocimientos, ni desarrollando las competencias matemáticas esperadas; es decir, a nuestros alumnos se les dificulta usar las matemáticas como herramienta.

País	0	1	2	3	4	5	6	**Media**
España	8.6	16.1	25.2	26.2	16.8	6.1	1.2	480
Portugal	12.0	18.7	25.1	24.0	14.4	4.9	0.8	476
Uruguay	24.4	21.7	24.3	18.3	8.2	2.6	0.6	427
Chile	28.2	26.9	23.9	13.9	5.6	1.3	0.1	411
México	28.4	28.1	25.2	13.1	4.3	0.8	0.1	406
Argentina	39.4	24.7	20.4	10.6	3.8	0.9	0.1	381
Colombia	44.6	27.3	18.2	7.6	1.9	0.4	0.0	370
Brasil	46.6	25.9	16.6	7.1	2.8	0.8	0.2	370

Resultados de PISA 2006 (tomada de Cortina, J.L. en prensa).

Además de ubicarnos como país en un lugar poco favorable con respecto a los países integrantes de la OCDE, estos resultados desafortunadamente también han servido para que las autoridades educativas, medios de comunicación y población en general, culpen al profesor de lo que tildan como “fracaso escolar”, pasando por alto la responsabilidad que tienen las autoridades educativas, ya que se olvidan de la preparación profesional de los profesores, pues no fueron formados para enfrentar estos nuevos retos. A pesar de que se diga que los docentes son considerados como “protagonistas de la transformación educativa”, no se han considerado sus concepciones para consolidar las reformas que se proponen.

Considerando lo anterior, cualquier reforma educativa que se proponga, para que pueda considerarse como tal, requiere no sólo de cambios estructurales, sino también de modificaciones en las prácticas educativas, que siempre van aunadas a las concepciones que tienen los maestros.

El nuevo plan y programa de estudios de matemáticas para secundaria plantea requerimientos por parte de los maestros para los cuales ellos no fueron formados; anteriormente se tenía la idea de que el papel del profesor era enseñar, en el sentido de transmitir información; así pues, las peticiones que se plantean en el plan de estudios rebasan muchas veces las maneras con las que comúnmente los maestros abordan los temas.

1.2 Justificación

La enseñanza es una práctica compleja en la que surgen diversos problemas, muchos de los cuales tienen que ser dirigidos y resueltos por el maestro con el fin de que ocurra un aprendizaje.

Generalmente, en su práctica docente, un maestro debe atender muchos aspectos entre ellos; debe hacer que en la clase haya lecciones coherentes y vinculadas unas con otras, tratando de cubrir un currículo; debe resolver problemas de diversa índole, desde los sociales (violencia, formación de hábitos, etc.); así también debe proponer actividades de estudio, que despierten el interés de sus alumnos, propiciando el análisis y dando pie al avance en el uso de técnicas y razonamientos cada vez más eficaces. Sin duda las exigencias, compromisos y peticiones para el docente son cada vez más comprometedores y difíciles, y se requiere de profesores que estén preparados para hacerles frente a las nuevas formas de abordar los temas de estudio que se plantean en los planes y programas.

Muchos investigadores (ver por ejemplo Thompson, 1982; Giménez, Llinares, y Sánchez, 1996; Ernest, 1989) han señalado que la influencia de las concepciones de los maestros en lo que enseñan y su manera de enseñarlo, da lugar a que se transmitan a los alumnos sus propias ideas a veces acertadas, a veces erróneas, sus prejuicios, sus creencias etc., sin dejar de mencionar que esto acompañará a los alumnos a lo largo de su vida escolar.

Un problema que estos mismos autores plantean es que es preciso cambiar muchas de las concepciones de los maestros, particularmente porque muchos de ellos se han formado en tradiciones en las que la enseñanza de las matemáticas estaba regida por otros paradigmas. Aplicar las recomendaciones planteadas por las reformas educativas de las últimas dos décadas implica cambiar las concepciones de los maestros, una tarea difícil y que requiere primero identificar tales concepciones.

La idea de hacer una tesis sobre concepciones de maestros de secundaria respecto a la construcción y clasificación de cuadriláteros surge del planteamiento anterior, así como de mi experiencia y propia práctica como profesora. Para acotar la investigación decidí centrarla en uno de los temas incluidos en el currículum como es la construcción y clasificación de cuadriláteros.

Una de las razones principales de la selección de este tema es que, en las dos últimas reformas (1993 y 2006), la enseñanza de la geometría en educación secundaria pretende dejar de ser vista sólo como la memorización de fórmulas y trazo de figuras geométricas:

> El conocimiento de reglas, algoritmos, fórmulas y definiciones sólo es importante en la medida en que los alumnos lo puedan usar, de manera flexible, para solucionar problemas. De ahí que su construcción amerite procesos de estudio más o menos largos, que van de lo informal a lo convencional, ya sea en términos de lenguaje, como de representaciones y procedimientos. La actividad intelectual fundamental en estos procesos se apoya más en el razonamiento que en la memorización. (SEP, 2006, p.11)

Sin embargo, esto no acaba de verse reflejado en los propósitos planteados en los planes y programas de estudio de matemáticas para la educación secundaria. Por un lado, en el plan vigente se establece que los alumnos:

- Construyan figuras simétricas respecto de un eje, analizar y explicar las propiedades que se conservan de la figura original.
- Justifiquen el significado de fórmulas geométricas que se utilizan al calcular el perímetro y el área de triángulos, cuadriláteros y polígonos regulares.
- Resuelvan problemas que impliquen el cálculo de cualquiera de los términos de las fórmulas para calcular áreas de triángulos, romboides y trapecios.
- Expliquen la relación entre el perímetro y el área de las figuras.
- Construyan triángulos y cuadriláteros y analicen las condiciones de posibilidad y unicidad en las construcciones.

Estos puntos dejan ver que existe la intención de lograr que los alumnos expliquen, justifiquen, relacionen y analicen figuras, propiedades, fórmulas, etc. El programa además menciona que las definiciones difícilmente van a modificar las ideas de los alumnos si no se acompañan de actividades que los conduzcan a explorar de manera informal las propiedades de las figuras básicas, con objeto que puedan reconocer aquellas que son relevantes para la solución de problemas y el razonamiento geométrico.

Sin embargo, no se hace énfasis en que después de la exploración y análisis se requiere sintetizar lo hallado a través de definiciones y tampoco se menciona explícitamente que una manera de analizar y explorar figuras es clasificarlas y llegar a definiciones que permitan obtener clasificaciones consistentes.

Además, el programa de geometría incluye temas como congruencia, semejanza y homotecia, así como la formulación de algunos teoremas de geometría como el de Tales y el de Pitágoras. Una pregunta que surge entonces es, ¿para qué tipo de triángulos se enuncia el teorema de Pitágoras si nunca se ha propuesto como objetivo la clasificación y definición de tipos distintos de triángulos? Esto es digno de mención, porque es un error común el que niños y adultos se refieran a catetos de un triángulo cualquiera y apliquen el teorema de Pitágoras a triángulos que no son rectángulos.

Una segunda razón por la que se eligió este tema es porque se presta para conocer las concepciones de los maestros sobre las figuras geométricas, sin preguntar directamente una definición. La manera en la que una persona, particularmente un maestro, clasifica figuras revela sus propias definiciones de dichas figuras, además el ejercicio de clasificación pone en evidencia la congruencia o incongruencia de tales definiciones. Por otro lado, si varios maestros al mismo tiempo participan en tal tarea tendrán lugar discusiones fructíferas tanto para los fines de la investigación (conocer las concepciones de los maestros sobre los cuadriláteros) como los didácticos, ya que los maestros deberán enfrentar las contradicciones o inconsistencias que sus propias definiciones o las de sus compañeros provocan al momento de clasificar figuras.

Además algunas investigaciones han mostrado que el uso de programas de geometría dinámica favorece la enseñanza de la geometría (ver por ejemplo, de Villiers, 1996 y Jones, 2002) y como para los maestros resulta atractivo conocer el uso de las nuevas tecnologías para enriquecer su práctica docente, consideré conveniente ofrecer un taller para maestros de secundaria sobre construcción y clasificación de cuadriláteros utilizando el programa de cómputo Cabri-géomètre.

1.3 Preguntas de investigación

Esta investigación va a ser guiada mediante las siguientes preguntas:

- ¿Qué concepciones sobre los cuadriláteros tienen los maestros que participen en el taller?
- ¿Cómo clasifican los cuadriláteros los maestros de secundaria que participen en el taller?
- ¿Qué cuadriláteros reconocen los maestros que participen en el taller?
- ¿Influyen positivamente las actividades con geometría dinámica para que los maestros que participen en el taller cambien algunas de sus concepciones con respecto a los cuadriláteros, así como su manera de clasificarlos?

1.4 Objetivo general

Describir y analizar las concepciones de maestros de secundaria sobre los cuadriláteros, su construcción y su clasificación.

1.4.1 Objetivos específicos

- Revisar el currículum mexicano actual para identificar los contenidos de Geometría, específicamente del tema de cuadriláteros, que se trabajan a lo largo de la educación secundaria.

- Indagar las concepciones acerca de los cuadriláteros de los maestros participantes en el taller.
- Analizar el dominio de los contenidos sobre las propiedades de los cuadriláteros de los profesores que participen en el taller.
- Analizar las estrategias que utilizan los profesores de educación secundaria que participen en el taller al clasificar y describir cuadriláteros.

1.5 Ejes analíticos

- Revisión y análisis de los modelos de la enseñanza de la geometría usados en México de 1980 a la fecha.
- Revisión del currículum mexicano actual y los estándares curriculares del Concejo Nacional de maestros de Matemáticas de los E.U. (National Council of Teachers of Mathematics: NCTM de ahora en adelante) para contrastar ambas propuestas, específicamente sobre el tema de cuadriláteros.
- Revisión y análisis sobre las opiniones de los expertos en torno a la enseñanza de la geometría.
- Revisión y descripción sobre las investigaciones realizadas con niños y adultos en geometría.
- Revisión y descripción de las investigaciones realizadas con la enseñanza y aprendizaje de los cuadriláteros.
- Revisión y descripción de investigaciones realizadas con niños y adultos en cuadriláteros.
- Revisión y análisis el uso de nuevas tecnologías en la enseñanza de la geometría.
- Revisión y análisis sobre el uso de Cabri-géomètre en la enseñanza de la geometría.
- Revisión y análisis de los trabajos relacionados con las concepciones de maestros acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

CAPÍTULO II

MARCO CONCEPTUAL Y TEÓRICO

2.1 La enseñanza de la geometría en México de 1980 a la fecha

2.2 Análisis comparativo del currículum mexicano actual y en los estándares curriculares del NCTM

2.3 La teoría de Van Hiele

2.4 Recomendaciones de investigadores en torno a la enseñanza de la geometría

2.5 Investigaciones realizadas con niños y adultos sobre geometría

2.6 Investigaciones realizadas con niños y adultos sobre los cuadriláteros

2.7 Uso de nuevas tecnologías en la enseñanza de la geometría

2.8 Uso de Cabri-Géomètre en la enseñanza de la geometría

2.9 Concepciones de maestros en la enseñanza y aprendizaje

2.9.1 Creencias y conocimiento

2.10 Concepciones de maestros acerca de la enseñanza de las matemáticas

2.11 Referentes teóricos

2.1 La enseñanza de la geometría en México de 1980 a la fecha

De 1980 a la fecha ha habido tres reformas en los planes y programas de estudio de la escuela secundaria: 1980, 1993 y 2006. Estas reformas se mencionan debido a que son las más recientes.

En 1980 se implantó una manera de enseñar y aprender a través de objetivos lo cual derivó en programas excesivamente descriptivos sobre las acciones que tenían que llevar a cabo los profesores y los alumnos en las actividades propuestas, esto consistía en que se le daban a conocer al maestro una serie de pasos con los cuales debía guiar al alumno.

Gálvez (1985, citada por Arceo, 1999) menciona que en los planes y programas de estudio en México se proponía que la geometría se organizara en tres momentos: a) Presentación del "nuevo objeto" a los alumnos, quienes lo ven, lo distinguen de otros objetos que ya conocen y aprenden su denominación científica (geométrica); b) Ejercitación en el trazado de este nuevo objeto; y c) Aplicación en actividades que suponen que el objeto nuevo ya ha sido asimilado.

Es decir, en los años 80 se esperaba que los estudiantes "captaran" las características de las figuras en el trazado, al tiempo que se ejercitaba el uso de la regla, la escuadra y el compás. El éxito del aprendizaje estaba ligado a las características personales de los alumnos, más que a la acción que el maestro elegía para esta forma de presentación.

En 1993 se publicó una reforma de los planes y programas de estudio donde se proponía una manera diferente de enseñar y aprender matemáticas de acuerdo con la cual los alumnos lograrían apropiarse significativamente de los objetos de conocimiento matemático, entre ellos los de la geometría.

Sin embargo, al revisar los objetivos para primero de secundaria respecto a geometría se encuentra lo siguiente:

> Practicar los trazos geométricos como una forma de acostumbrarse y perfeccionar el uso de instrumentos de dibujo y medición, explorar las propiedades de las figuras y apropiarse del vocabulario básico de la geometría; resolver problemas que conduzcan al cálculo de perímetros y áreas de figuras usuales (SEP,1997: 19).

Para segundo de secundaria, se propone seguir practicando el dibujo y los trazos geométricos; avanzar hacia la adquisición permanente del uso de instrumentos de dibujo y medida; resolver problemas que conduzcan a calcular áreas de las figuras comunes y de otras formadas por su combinación (SEP, 1997).

En tercero, el objetivo es utilizar las fórmulas para el cálculo de perímetros, áreas, volúmenes y capacidades, así como aplicaciones sencillas de los teoremas de semejanza y de Pitágoras en la solución de problemas en el espacio (SEP, 1997).

Es decir, la lectura de estos objetivos parece indicar que las dos propuestas (la de 1980 y la de 1993) pretenden lo mismo, es decir ejercitar el tema visto en clase. La única diferencia parece radicar en que en la reforma de 1993 se puede entender que se debe aplicar el conocimiento en problemas de la vida cotidiana.

En la reforma del 2006 se introduce un nuevo enfoque, en el que se intenta ir más allá de los aprendizajes esperados, así como de los contenidos que se estudian en cada grado; para esto se incluye un nuevo tópico que es el desarrollo de cuatro competencias matemáticas:

- Planteamiento y resolución de problemas; se espera que los alumnos identifiquen y resuelvan diferentes tipos de problemas o situaciones.
- Argumentación; se pretende que el profesor cree las condiciones para que sus alumnos tengan la necesidad de formular argumentos que sustenten el procedimiento o solución a los problemas que les sean planteados.
- Comunicación; el alumno debe expresar y representar la información matemática, así como establecer las relaciones entre ellas, además deberán

exponer con claridad la interpretación de sus ideas matemáticas que surjan de una situación o fenómeno.

- Manejo de técnicas; con esta competencia se procura que los alumnos no se limiten a hacer un uso mecánico de las operaciones aritméticas o algebraicas, sino que utilicen su sentido numérico, pensamiento algebraico, cálculo mental y estimación, y que evalúen la congruencia de los resultados del problema.

De lo anterior podemos ver que la demanda de esta reforma es continuar con la enseñanza con base en la resolución de problemas, como se venía diciendo desde la reforma de 1993, pero ahora considerando la construcción de conocimientos y el desarrollo de habilidades en un sentido más amplio; enfocándose a la formación de ciudadanos matemáticamente competentes, capaces de interpretar y comunicar información matemática, así como de resolver problemas matemáticos, formular argumentos, utilizar técnicas y tecnologías apropiadas para dar soluciones favorables a las situaciones que se les presenten.

Cabe señalar que en el nuevo plan de estudios se demanda, y se hace mención de, la participación trascendental que tiene el profesor para planear, proponer y aplicar dichas situaciones problema con sus alumnos.

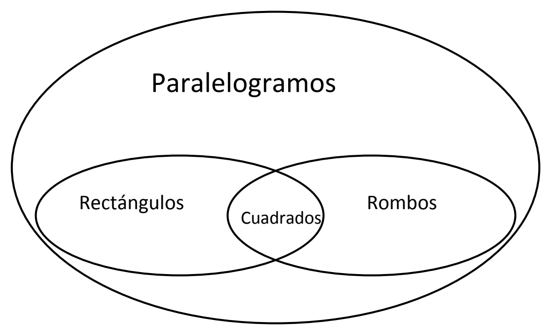
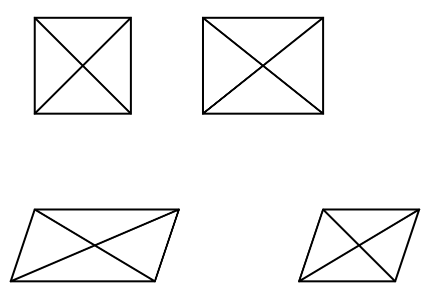
2.2 Análisis comparativo del currículum mexicano actual y en los estándares curriculares del NCTM

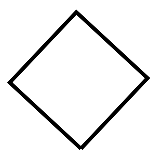
Un organismo estadounidense preocupado por la enseñanza de las matemáticas es el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM); este organismo ha desarrollado una serie de estándares curriculares para guiar la enseñanza de las matemáticas en ese país. Los estándares curriculares planteados por el NCTM se basan, en gran parte, en los resultados de investigaciones internacionales sobre educación matemática, por ello, se han convertido en un referente importante de todos los interesados en la educación matemática de los Estados Unidos y de otros países.

Por lo anterior, resulta interesante realizar un análisis comparativo entre el currículum mexicano y los estándares curriculares del NCTM. A continuación se presenta una tabla en la que, por un lado, se exponen los materiales que se usan en México (Plan de estudios 2006, el libro para el maestro y el fichero de actividades) y, por otro, se muestra el planteamiento de los estándares para la educación matemática del NCTM.

PLAN DE ESTUDIOS PARA LA EDUCACIÓN EN MÉXICO 2006 (SEP, 2006)	**PRINCIPIOS Y ESTÁNDARES PARA LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA DEL NCTM (2003)**
La ***educación*** básica es la etapa de formación de las personas en la que se desarrollan las habilidades de pensamiento y las competencias básicas para favorecer el aprendizaje sistemático y continuo, así como las disposiciones y actitudes que normarán su vida.	La ***educación*** consiste, en esencia, en la transmisión de pautas, normas, valores, reglas, conocimientos, destrezas y actitudes para que los jóvenes ciudadanos entiendan y vivan en las complejas ciudades contemporáneas.
La enseñanza de las matemáticas busca desarrollar una forma de pensamiento que permita a los estudiantes expresar matemáticamente situaciones que se presentan en diversos entornos socio-culturales, utilizar técnicas adecuadas para reconocer, plantear y resolver problemas; lograr una actitud positiva hacia el estudio de esta disciplina y de colaboración y crítica, en todos los ámbitos.	Se presenta la necesidad del estudio de las matemáticas en tres ámbitos: -Matemáticas para la vida: la vida diaria requiere que cada vez más conocimientos matemáticos y tecnológicos. Por ejemplo, tomar decisiones en compras, adquirir seguros, planes de pensiones y votar con conocimiento requiere cierta complejidad. - Matemáticas como herencia cultural. - Matemáticas para el trabajo.
En el plan de estudios se propone el **<u>uso de la tecnología</u>**. Es necesario el aprovechamiento de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en la enseñanza para preparar a los alumnos para ser ciudadanos de una sociedad plural, democrática y tecnológicamente avanzada además que estas tecnologías ofrecen posibilidades didácticas y pedagógicas de gran alcance. Las TIC incluyen no sólo la computación, sino otros medios como el cine, la televisión, la radio y el video. Para que las TIC incidan de manera favorable en el aprendizaje su aplicación debe promover la interacción de los alumnos, entre sí y con el profesor, durante la realización de las actividades	Uno de los principios es la **<u>tecnología</u>**. La tecnología es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que se enseñan y potencian el aprendizaje. Los profesores deberían utilizar la tecnología para enriquecer las oportunidades de aprendizaje de sus alumnos, seleccionando o creando tareas matemáticas que se beneficien de lo que ella puede hacer bien y eficientemente. Disponiendo de la tecnología, los niños pueden explorar y resolver problemas que incluyan números grandes, o pueden investigar las características de figuras por medio de programas de Geometría dinámica.

didácticas. Las TIC ayudan a que los alumnos desarrollen habilidades clave como el pensamiento lógico, la resolución de problemas y el análisis de datos al utilizar paquetes de graficación, hojas de cálculo y manipuladores simbólicos**; manejen y analicen configuraciones geométricas a través de paquetes de geometría dinámica;** exploren y analicen fenómenos del mundo físico y social.	El trabajo con simulaciones virtuales de experiencias físicas o con Logo, puede permitir a los niños ampliar su experiencia física y desarrollar su comprensión inicial de ideas complejas como las implícitas en el diseño de algoritmos. Los programas de geometría dinámica permiten la experimentación con objetos geométricos con un enfoque explícito en las trasformaciones geométricas.
Los contenidos de estudio para la educación secundaria se organizaron en tres ejes: - Sentido numérico y pensamiento algebraico. - Forma, espacio y medida. - Manejo de la información. Los contenidos de cada grado están organizados en cinco bloques; en cada uno hay temas y subtemas de los tres ejes.	Los Contenidos durante la educación básica se presenta en las siguientes áreas: - Números y operaciones, - Álgebra, - Geometría, Medida, - Análisis de datos y probabilidad. Para cada área y etapa se menciona para qué deben estar capacitados los estudiantes, explicitando lo que se espera que los alumnos alcancen.
Para llevarlo a cabo se sugiere el uso de cuatro competencias: -El planteamiento y la resolución de problemas. - La argumentación. -La comunicación. -El manejo de técnicas.	Para llevarlo a cabo se sugiere: -Resolución de problemas. -Razonamiento y prueba. -Conexiones, -Comunicación y Representación.
En cuanto al eje “forma espacio y medida” se anuncia que encierra los tres aspectos esenciales alrededor de los cuales gira el estudio de la geometría y la medición en la educación básica; las formas se trazan o se construyen, se analizan sus propiedades y se miden. Este eje temático favorece de modo especial el desarrollo de la competencia de argumentación. Por ejemplo, para construir, reproducir o copiar una figura, hay que argumentar las razones por las que un trazo es válido o no, tomando como base las propiedades de dicha figura. El tema de cuadriláteros se encuentra en el bloque tres de primer grado de secundaria. Como resultado de este bloque se espera que los alumnos: Resuelvan problemas que implican el cálculo de cualquiera de los términos de	En geometría mencionan que los estudiantes deben estar capacitados para analizar las características y propiedades de figuras geométricas de dos o tres dimensiones y desarrollar argumentos sobre relaciones geométricas. Así mismo mencionan que los alumnos tienen que examinar cuidadosamente las características de las figuras para poder definir con precisión y describir las figuras fundamentales, como los tipos especiales de cuadriláteros, y para identificar las relaciones entre unas figuras y otras. Para estas exploraciones pueden usar geoplanos, papel punteado, etc. y programas de geometría dinámica para crear figuras bidimensionales. Un ejemplo incluido en el documento es que el profesor pida a sus alumnos que

las fórmulas para calcular el área de triángulos, romboides y trapecios. Así mismo, que expliquen la relación que existe entre el perímetro y el área de las figuras. En el apartado del bloque tres tema tres, se pide; construir triángulos y cuadriláteros, así como, analizar las condiciones de posibilidad y unicidad en las construcciones. Como sugerencias didácticas se menciona que a diferencia de las construcciones geométricas que se realizan en la primaria, con base en procedimientos específicos, en este grado se trata de anticipar, probar y justificar los datos que son necesarios y suficientes para llevar a cabo una construcción. Por ejemplo: Dados dos segmentos que representan la base y la altura de un romboide, ¿se puede construir un romboide? ¿Cuántos romboides se pueden construir en base a esta información? En el libro para el maestro se dice que el estudio de la geometría se enriquece si va acompañado de actividades y problemas que propicien la observación, manipulación, descripción y dibujo de objetos del entorno, como de las figuras y sólidos geométricos, como una forma de que los estudiantes desarrollen las formas básicas de la geometría; reconozcan y utilicen las características y propiedades de las figuras y los sólidos; y se apropien gradualmente del lenguaje que sirve para describirlas. Se menciona que el docente debe proponer situaciones y problemas que: - Provoquen rápidamente una actitud de búsqueda, orientada a proponer y posibles soluciones. - Contengan elementos que permitan a los alumnos validar o desechar sus propias conjeturas y soluciones, según sean correctas o incorrectas. Advierten que con frecuencia, las ideas de los alumnos sobre las figuras geométricas no corresponden exactamente con las definiciones que se les proporcionan. Por ejemplo, es posible que para algunos	dibujen varios paralelogramos sobre papel cuadriculado o con un programa de geometría dinámica. Los alumnos deberan tomar nota de las medidas de los lados y los ángulos para observar algunas características particulares de las clases de paralelogramos. Luego elaboraran definiciones para estas figuras que sean correctas y coherentes con las definiciones que se usan, y reconocerán las relaciones principales entre los elementos de dichos paralelogramos y representaran las clases con un diagrama de Venn.  Para resumir las observaciones: un cuadrado es un tipo especial de rombo y de rectángulo y éstos son casos especiales de paralelogramos. El profesor pedirá que tracen las diagonales de varios paralelogramos de cada tipo, que midan sus longitudes  y los ángulos que forman. La idea es que los estudiantes observen que las diagonales de los paralelogramos se cortan en sus puntos medios, lo que se podría proponer como una característica definitoria de paralelogramo. También advertirán que las diagonales de los rombos y de los cuadrados son

alumnos la figura (a) sea un rombo pero no la consideren un cuadrado.  (a) Por lo que recomiendan que los alumnos se acostumbren a ver las figuras geométricas dibujadas en diferentes posiciones y explican que reacciones como la mencionada tienen causas más profundas y revelan el grado de madurez geométrica alcanzado. Las definiciones difícilmente van a modificar sus ideas si no se acompañan de actividades que los conduzcan a explorar de manera informal las propiedades de las figuras básicas.	perpendiculares, pero no las de otros paralelogramos; y que sólo las de los rectángulos son iguales en longitud. Estas definiciones podrían sugerir otras definiciones; por ejemplo, que un cuadrado es un paralelogramo cuyas perpendiculares son iguales en longitud. Mediante un programa de geometría dinámica los estudiantes explorarán si estas definiciones son exactas, tratando de generar un contra ejemplo. Se propone organizar en una tabla las observaciones de los alumnos acerca de las propiedades de las diagonales de los tipos especiales de cuadriláteros.

Al hacer la comparación de los dos documentos se encuentran muchas semejanzas, empezando por lo que se espera de la educación. En México, se habla de etapa formativa y en Estados Unidos de transmisión de pautas y valores. En cuanto a las matemáticas, en los dos países se presenta como una herramienta para la vida.

Al revisar los comentarios acerca del uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas se puede advertir que los estándares del NCTM (2003) mencionan, no sólo su importancia y pertinencia, sino la manera en que ésta puede ser empleada por el profesor, dando ideas específicas de algunos temas donde se le puede sacar provecho; así mismo se recomiendan algunos programas para estos fines, como Logo ó Cabri.

En cambio en nuestro país, el uso de la tecnología se menciona de manera general en el Plan y Programa de Estudios de la Educación Secundaria, donde se sugiere que se emplee en todas las materias. Para la materia de matemáticas se habla brevemente sobre la importancia que tiene para el alumno. También se dice que para el docente es una herramienta básica para la ejecución del currículo planteado sin embargo no se presentan ni proponen ejemplos específicos en temas de matemáticas donde se le podría emplear.

Los contenidos en ambos países no cambian a pesar de que en los estándares se presentan por separado. En este último documento los temas a abordar son números y operaciones, álgebra, geometría, medida, análisis de datos y probabilidad. En el documento se ejemplifica y sugiere que los diferentes contenidos deben estudiarse no de manera aislada, sino viendo las relaciones que hay entre ellos, incluso con otras materias. Por ejemplo, en el caso de las representaciones geométricas y algebraicas de problemas, donde se indica que pueden ser conectadas mediante la geometría de coordenadas.

En el Programa de Matemáticas (SEP, 2006) se presenta en cada bloque un tema de sentido numérico y pensamiento algebraico, otro de forma, espacio y medida y por último uno de manejo de la información. Como en el documento del NCTM aquí se sugiere que estos temas vayan interrelacionados, pero a diferencia de aquél, en el programa de SEP no se presentan ejemplos de cómo usar la relación entre los ejes mencionados.

En cuanto a la geometría, no varía el planteamiento de las propuestas, ya que ambas se enfocan en el análisis de las características y propiedades de figuras geométricas así como en el uso de la argumentación sobre sus relaciones.

Específicamente para el tema de cuadriláteros, el libro mexicano para el maestro propone sugerencias y algunas actividades. El programa, en sus orientaciones didácticas, menciona una actividad con romboides pero en el fichero de actividades didácticas no se presenta ninguna. Hay que tomar en cuenta que las actividades que se proponen no tienen relación con el descubrimiento de características y propiedades de las figuras; se presentan ejercicios que sólo tienen que ver con trazos geométricos.

En los principios y estándares norteamericanos para la educación matemática se maneja el tema de cuadriláteros con ejercicios donde el alumno puede hacer una exploración de las figuras que conducen a descubrir propiedades y características de las mismas.

En el currículum mexicano y en el documento del NCTM se usan los cuadriláteros como ejemplo de un buen ejercicio para propiciar en el alumno procesos de argumentación. Sin embargo, el tratamiento de la argumentación es diferente entre los dos países, pues en Estados Unidos se justifica su importancia y en México se puede apreciar sólo como una explicación de lo que se debe hacer en la argumentación y en la comunicación.

Se puede decir que en los documentos de ambos países la argumentación desempeña un papel trascendental, ya que en los principios y estándares se manifiesta que el pensamiento matemático y las habilidades de razonamiento, incluyendo formular conjeturas y desarrollar argumentos deductivos sólidos, tienen importancia porque sirven de base a nuevas ideas y promueven un estudio posterior. Así mismo, en otro apartado agregan que cuando los estudiantes proponen ideas y conjeturas matemáticas, aprenden a evaluar su propio pensamiento y el de los demás, y desarrollan destrezas de razonamiento.

En México la educación matemática se presenta con elegantes discursos y planteamientos ambiciosos, pero desafortunadamente no se aterrizan ni se ejemplifican en temas específicos que pudieran ayudar al profesor a darse una idea de cómo poder emplear, por ejemplo, la tecnología; o bien, como ayudar a los alumnos a argumentar algunas ideas matemáticas, que en este caso sería con la exploración de las características de los cuadriláteros.

En los estándares del NCTM la manera en que se le da a conocer al profesor lo que se pretende en educación matemática en la educación básica es práctica y funcional, ya que el docente cuenta con un libro que le permite conocer contenidos, expectativas, sugerencias didácticas, etc. Además, de manera rápida puede saber qué se pretende en cada etapa escolar, situación que en nuestro país es complicada ya que los materiales para un nivel escolar se proporcionan de manera separada y en varios materiales como el libro para el maestro, los planes y programas, el fichero de actividades; cabe mencionar que el acceso a los materiales de los otros niveles (preescolar y primaria) es complicado ya que sólo se puede tener esta información vía internet.

Llama la atención que las sugerencias didácticas que se presentan en los estándares (NCTM) incluyen una lista de referencias bibliográficas, lo cual es una situación importante ya que permite a los profesores hacer la consulta de esos autores; en contraste, en ninguno de los materiales para secundaria que proporciona la SEP se presenta alguna referencia, lo que limita a los profesores quienes siguen sin saber en dónde documentarse.

Por último cabe mencionar que existe evidencia de que, para la planeación de sus clases, los maestros recurren sólo a los libros de texto (Mora, 2002) y en el mejor de los casos podrían recurrir a los materiales que proporciona la SEP (libro para el maestro, fichero, etc.). Esto nos lleva a concluir que desafortunadamente la guía que proporcionan los materiales en cuanto al tema de cuadriláteros resulta pobre y en su propuesta para el abordaje del tema se puede ver que se sigue privilegiando el trazo de las figuras, sin la exploración de sus características y sin proponer que se hagan clasificaciones de ellas.

2.3 La Teoría de Van Hiele

Así como se ha considerado importante contrastar el programa mexicano de secundaria de matemáticas con los estándares curriculares del NCTM, también se considera fundamental dedicar un apartado a la teoría de Van Hiele ya que gran parte de las investigaciones sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría la usan como referente. Aunque el trabajo de los Van Hiele data de finales de los cincuenta, ha ido cobrando relevancia en la actualidad entre los interesados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría.

La teoría de Van Hiele (2004) combina una visión de la geometría como ciencia del espacio y como una herramienta con la que los estudiantes pueden conocer un sistema deductivo. Esta teoría fue desarrollada por Pierre y Dina van Hiele, ambos educadores matemáticos holandeses, durante sus prácticas educativas en las que observaban a sus estudiantes y constataban su bajo nivel en geometría. Esta problemática la atribuyeron a la fallida comunicación entre estudiantes y maestros en el proceso enseñanza aprendizaje de la geometría. Para ellos la comunicación se da en cinco niveles diferentes en los cuales los estudiantes se encuentran cuando aprenden geometría.

Nivel Base (Nivel 0) de geometría. *Reconocimiento o visualización.* En este nivel las figuras se juzgan por su apariencia. El estudiante reconoce un cuadrado por su forma y un rectángulo parece diferente que un cuadrado. Cuando en los primeros grados de instrucción al niño se le enseña lo que es un cuadrado, un rectángulo, un rombo, un romboide y así, él es capaz de reproducir todas estas figuras ya sea en su cuaderno o en un geoplano sin equivocarse, pero en este nivel no reconoce un rectángulo si tiene forma de cuadrado. En este nivel el cuadrado no es un rectángulo, para el niño son dos figuras completamente diferentes.

Primer Nivel de geometría. *Análisis.* En este nivel, las figuras son ejemplos de sus propiedades. Un rectángulo significa una figura de cuatro lados, sus lados opuestos iguales, que tiene cuatro ángulos rectos y que tiene dos diagonales iguales. El cuadrado significa una figura de cuatro lados iguales, cuatro ángulos rectos y dos diagonales iguales. Cada una de las anteriores figuras es reconocida por sus propiedades pero en este nivel las propiedades no han sido ordenadas, de manera que el cuadrado aún no es identificado como un tipo especial de rectángulo.

Segundo Nivel. *Orden.* Las propiedades son ordenadas en este nivel. Se deducen unas de otras: una propiedad precede o prosigue a otra propiedad. En este nivel el significado intrínseco de deducción no se entiende por parte de los estudiantes, sin embargo el cuadrado es reconocido como un rectángulo porque en este nivel las definiciones de la figura vienen a tomar parte del juego.

Tercer Nivel. Deducción. En este nivel el pensamiento está relacionado con el significado de la deducción, con el inverso de un teorema, con los axiomas, con las condiciones necesarias y suficientes. El estudiante entiende el significado de la deducción y el papel de los diferentes elementos de una estructura deductiva.

Cuarto Nivel. Rigor. El estudiante es capaz de trabajar en una variedad de sistemas axiomáticos y de hacer deducciones abstractas.

Las siguientes son algunas especificaciones de los niveles de pensamiento:

- De manera extrínseca en cada nivel aparece lo que era intrínseco en el nivel anterior. En el nivel base las figuras son de hecho también determinadas por sus propiedades, aunque no se esté consciente de estas propiedades. Por ejemplo, el rectángulo tiene cuatro lados, los lados opuestos iguales; el cuadrado tiene también cuatro lados pero todos son del mismo tamaño.
- Cada nivel tiene sus propios símbolos y sistemas de relaciones que conectan estos signos. Una relación que es correcta en un nivel puede ser incorrecta en otro. Por ejemplo, la relación entre un rectángulo y un cuadrado, en el nivel base el cuadrado no tiene nada que ver con el rectángulo, pero en el segundo nivel el cuadrado se ve como un tipo particular de rectángulo.
- Cuando dos personas razonan en diferentes niveles no se pueden entender entre sí. Es común ver que esto sucede entre maestro y alumno cuando el profesor hace una presentación a su nivel y espera que cuando cuestione a sus alumnos ellos respondan lo que él espera escuchar, de no ser así toma las respuestas como incorrectas y termina dando la respuesta él, misma que los alumnos no comprenden porque no encuentran las relaciones que el profesor está haciendo, lo cual provoca que en lugar de que en la clase haya un diálogo exista un monólogo siendo el profesor el único actor.
- La maduración que se debe considerar lleva al alumno de un nivel a otro más alto es sobre todo en el proceso de aprendizaje y no de tipo biológico. El objetivo

de la enseñanza es precisamente enfrentar la cuestión de saber cómo estas fases se pasan y cómo ayudar para que los estudiantes pasen de un nivel a otro.

El modelo de van Hiele propone cinco fases de instrucción que ayudan a los estudiantes a progresar a través de los diferentes niveles.

a) Primera fase. Cuestionamiento
b) Segunda fase. Orientación dirigida
c) Tercera fase. Explicitación
d) Cuarta fase. Orientación libre
e) Quinta fase. Integración

Al concluir satisfactoriamente esta última fase los estudiantes alcanzan un nuevo nivel de pensamiento, ahora disponen de un sistema de relaciones que están relacionadas al dominio de pensamiento explorado completamente. “Este nuevo dominio de pensamiento, que ha adquirido su propia intuición se sustituye por el dominio que se tenía antes, el cual tenía una intuición completamente diferente” (Van Hiele, 2004).

Algunos puntos relevantes de la teoría de Van Hiele son los siguientes:

- La memorización no se considera característica de ningún nivel.
- El estudiante avanza de un nivel al siguiente sin saltarse ninguno.
- Los estudiantes actuando en un nivel no pueden interactuar o entender la enseñanza de un nivel más alto.
- El desarrollo del pensamiento del individuo de un nivel al siguiente se debe a la enseñanza y al aprendizaje de experiencias y no depende mucho de la madurez.

Gutiérrez, 1996 y Tall, 2004 (citados por Owens y Outhred, 2006) afirman que esta teoría ha influido fuertemente en los trabajos sobre concepciones tempranas de algunas ideas geométricas así como en los procesos por los cuales los niños se mueven desde un conocimiento inicial y habilidades visuales hasta los conceptos geométricos y definiciones.

2.4 Recomendaciones de investigadores en torno a la enseñanza de la geometría

En este apartado se hace una reseña de las opiniones de investigadores mexicanos y de todo el mundo respecto a la enseñanza de la geometría. Ellos se refieren tanto a aspectos cognitivos importantes para el aprendizaje de las matemáticas, como a cuestiones curriculares, de enseñanza y a los libros de texto.

Arceo (1999) en su estudio plantea situaciones de descripción de figuras a un grupo de alumnos, en base a ello menciona que, aunque se puede decir que la geometría está vinculada al medio que nos rodea, ésta es enseñada como un tema estático y desligado de la realidad. De esta manera, la relación entre el saber enseñado y el conjunto de situaciones (para cuya resolución es útil ese saber) queda a cargo del alumno. Para ella, concebir que la geometría se "enseña" es considerar que el sujeto no posee ningún conocimiento previo y que está ahí esperando pasivamente que los conocimientos le lleguen por la vía del profesor. Por lo que dice es necesario concebir un sujeto activo, que se plantea preguntas, que formula hipótesis, que las comprueba o que las reelabora a partir de la interacción con los demás y quien, al cambiar su concepción sobre el objeto de conocimiento, lo transforma y lo recrea.

Para Arceo, la geometría tiene que ir más allá de una simple transmisión de informaciones de un saber cultural; debe ser abordada considerando que se trata de un objeto educativo para lo cual han de tomarse en cuenta diversos factores (el marco escolar, los alumnos, la metodología, los contenidos, las demandas socioculturales, etc.) y es indispensable que se reflexione sobre lo inadecuado de una enseñanza de la geometría donde ésta sólo es vista como una actividad rutinaria y aburrida, basada en la formulación de recetas y la enumeración de instrucciones con la finalidad de que los alumnos aprendan términos, fórmulas y trazos.

Mora (2002) considera que la geometría es especialmente importante de aprender en edades en las que es necesario experimentar sobre objetos reales con la finalidad de desarrollar las capacidades de los estudiantes. Algunas de las dificultades para incorporar la geometría a la enseñanza provienen de la falta de tradición geométrica en las matemáticas escolares. Así también, menciona que en los libros de texto producidos en las dos últimas décadas la geometría se ha ido desplazando hacia el final de los libros en educación primaria, para desaparecer en educación secundaria.

Aunque en México la geometría no ha desaparecido de los planes y programas de la escuela secundaria, la manera en que se presenta puede interpretarse como que lo que se propone es que sea abordada después de la aritmética y el álgebra, ya que los temas del programa están agrupados en cinco áreas que se mencionan en el siguiente orden: aritmética, álgebra, geometría, presentación y tratamiento de la información y, finalmente, nociones de probabilidad. Cabe mencionar que como en este plan de estudios se afirma que existe flexibilidad para que el docente integre los contenidos de acuerdo a su criterio, el orden mencionado puede influir para que los maestros dejen a la geometría hasta después de aritmética y álgebra.

En la actualidad, los contenidos de estudio para la educación secundaria se organizan en tres ejes: Sentido numérico y pensamiento algebraico; forma, espacio y medida; y manejo de la información (SEP, 2006).

Sin embargo en la práctica se ha visto que el docente recurre al libro de texto y en muchos de éstos se propone que la geometría se vea después de la aritmética y el álgebra (ver por ejemplo Balderas, 2005; Barrón, 2005; Sandoval, 2005).

Con respecto a los libros de texto, Mora (2002) menciona que éstos han ejercido un papel de mediadores entre el currículo que se pretende en planes y programas de estudio y el real, es decir, el que se presenta en el salón de clase; así mismo, el autor agrega que esto es válido en una concepción de la enseñanza en la que “hay que decir al profesor exactamente lo que ha de hacer, si es posible, en cada momento”. (Mora, 1999: 34)

El autor agrega que al considerar al estudiante como sujeto central de su aprendizaje, que construye su conocimiento a partir de la reflexión derivada de su propio trabajo, el libro de texto se revela insuficiente, ya que su concepción estática no le permite dar respuesta a todas las relaciones dinámicas que se establecen entre estudiantes, profesor y conocimiento matemático. Es decir, según Mora, si sólo se utiliza el libro de texto para que el alumno pueda aprender geometría, éste resultará ser limitado.

Fortuny (2002) menciona que se deben ofrecer al alumno diferentes experiencias con el propósito de que ellos sean capaces de aplicar razonamientos continuos y así formular conjeturas, discutir y adquirir conciencia de la necesidad de verificar y justificar. Así mismo, expresa que la única forma de dedicar más tiempo a la geometría consiste en reducir el que se dedica a la aritmética, en especial a la consolidación de las destrezas del cálculo. Para Fortuny las claves de la realización de la educación geométrica residen en diseñar actividades que ayuden al alumnado a:

- Hacer y refinar conjeturas.
- Encontrar esquemas.
- Verificar sus conjeturas entre la comunidad de la clase de matemáticas.
- Crear imágenes visuales.
- Redescubrir las auténticas actividades matemáticas.
- Usar la invención y la explicación.
- Conectar las distintas partes de las matemáticas.
- Usar ideas básicas, como la función y la interacción en una amplia variedad de contextos.
- Usar simbolismos matemáticos como un medio para la expresión.

Este autor sugiere que al terminar cualquier actividad que proponga el profesor se tiene que recapitular y notificar qué aspectos del conocimiento geométrico se han trabajado, agrupando esta información de la siguiente forma:

- Vocabulario, conceptos y estructuras.
- Procedimientos geométricos.
- Procesos (modelización, visualización, pruebas y conjeturas, validación, demostración…).
- Estrategias (razonamientos dinámicos y continuos, experimentación, manipulación directa, inducción, colaboración…)
- Actitudes (apreciar la utilidad de la geometría como ciencia de modelos y razonamientos cualitativos).
- Rutinas instrumentales (expresión de suma de medidas, trazados geométricos…).

Fortuny (2002) afirma que a la propuesta curricular le debiera interesar desarrollar las habilidades matemáticas propias del auténtico trabajo geométrico, más que una descripción técnica del vocabulario y de las rutinas instrumentales y conceptos abstractos. Por eso, se prefiere hablar de *practicum* como manera práctica de acceder a las autenticas actividades geométricas a través de una variedad de situaciones problemáticas en lugar de un *curriculum*.

De Villiers (1996) menciona que las principales razones del mal desempeño de los alumnos en geometría puede explicarse con base en el modelo de Van Hiele. Por ejemplo, muchos alumnos no desarrollan habilidades de visualización, las cuales son un prerrequisito importante para el éxito en geometría. Además, se les introduce de manera prematura a la geometría de las formas, sin permitirles una exploración suficiente de las propiedades de las figuras y una introducción gradual de la terminología formal apropiada.

Para Carbó, Galera y Ruiz (2002), la geometría ha sido marginada y discriminada en las escuelas, se le ha tratado de una manera memorística y apartada de la realidad cercana a los alumnos. Ellos proponen una propuesta basada en la teoría de Van Hiele que además incluye recomendaciones para la evaluación para la cual plantean una serie de tareas de observación de cómo se desarrolla el proceso de enseñanza-aprendizaje de manera individual y grupal, proponen evaluar si los alumnos van adquiriendo las capacidades propuestas en los objetivos y consideran tres aspectos:

- Evaluación inicial, es decir, la situación inicial del alumno antes de comenzar el proceso de enseñanza-aprendizaje, a fin de adecuarlo a sus necesidades siendo un punto de referencia para valorar sus progresos.
- Evaluación formativa, la cual tiene por objetivo revisar la progresión en el aprendizaje del alumnado, revisar y reforzar los éxitos conseguidos y gestionar los errores que puedan surgir del aprendizaje. (Tanto del maestro como del alumno).
- Evaluación sumativa, la cual persigue la valoración de los resultados obtenidos al final de todo el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Rico y Segovia (2000) dicen que la presencia y presentación en los programas de estudio de la secundaria de los temas geométricos puede atribuirse a un proceso de recuperación pues en los años en los que predominaba el tratamiento estructuralista en la enseñanza de la matemática la geometría solía reducirse a la mera aplicación de fórmulas para calcular áreas y volúmenes y, en algunos casos, de tratamientos más pretenciosos, se enfatizaban los aspectos estructurales del dominio de la geometría; mencionan que las cuestiones de carácter estructural no lograron penetrar en las prácticas matemáticas del salón de clases. Todo ello se tradujo en un empobrecimiento notorio del saber geométrico en la escuela. Su resurgimiento, en la forma de desarrollo de habilidades de exploración, de elaboración y confirmación de conjeturas, de visualización espacial y de argumentación, está claramente asociado a la incorporación de nuevas herramientas de aprendizaje como los programas computacionales de geometría dinámica.

2.5 Investigaciones realizadas con niños y adultos sobre geometría

En la mayoría de los estudios relacionados con el aprendizaje de la geometría se propone poner en práctica la resolución de problemas, sin embargo en esas investigaciones se resalta que hay que tener en mente que durante la resolución de problemas los estudiantes pueden malinterpretar el problema o enfocarse en aspectos limitados de los mismos debido a predisposiciones preconcebidas y perspectivas auto-orientadas. Un ejemplo es el caso de alumnos de secundaria que sólo observaban la dirección de las figuras desde su propia posición, en lugar de hacerlo desde una recta trazada en el papel (Krainner, 1991; López- Real, 1991, citados por Owens y Outhred, 2006). Para disminuir estas interpretaciones limitadas algunos autores recomiendan trabajar en grupos, ya que el efecto sociabilizante amplía los puntos de vista puestos a discusión.

En su investigación, Arceo (2002) presenta a los alumnos situaciones donde ellos tienen que hacer la descripción de algunas figuras; de esta investigación reporta los siguientes resultados:

- Se presentan mayores dificultades cuando las figuras están colocadas en posiciones diferentes a las de las figuras que habitualmente han aparecido en los libros de texto y que muy probablemente se utilizan en la enseñanza.
- Los conocimientos geométricos que los alumnos han adquirido en la escuela parecen ser escasos, su saber no es funcional.
- Si bien los alumnos saben trazar diferentes figuras, no logran establecer las características de cada una de ellas.
- En general el alumno puede identificar el nombre de una figura sin identificar plenamente las características de su forma.

Piaget, Inhelder y Szeminska (1970) mencionan que la intuición es efectiva en todas las etapas de desarrollo y fundamental desde el punto de vista de la invención. Afirman que la función cognitiva de la intuición disminuye (en un sentido relativo) durante el desarrollo. Así también consideran que la formalización limita progresivamente el campo de la intuición.

En esta misma línea de pensamiento, otros estudios han demostrado que la intuición no está limitada a la niñez temprana y se ha dicho que los ejercicios prácticos previos de observación son importantes antes de pasar a la prueba deductiva. Los conocimientos “primitivos” y la “elaboración de imágenes” han sido postulados como base del aprendizaje (Kieren y Piere, 1992 citados por Owens y Outhered, 2006).

Otras investigaciones se han centrado en las percepciones bidimensionales de los estudiantes, particularmente en sus imágenes prototípicas y sus representaciones; en cambio, ha habido menos estudios sobre formas tridimensionales, esto debido, en parte, al dominio de la investigación sobre teorías del desarrollo estructuralista y la complejidad de las visualizaciones.

Entre los aspectos cognitivos relacionados específicamente con el aprendizaje de las figuras geométricas un tema muy discutido es la distinción entre el concepto (como se sigue de su definición matemática) y la imagen concepto (el concepto como se refleja en la mente del individuo), esto es, el producto de los procesos de formación del concepto en la mente (Vinner y Tall; 1981).

Según estos autores, una definición matemática incluye en sí misma un conjunto mínimo de atributos relevantes suficientes para definir el concepto. La definición, por tanto, permite clasificar especímenes como ejemplos positivos o negativos del concepto.

Para estos autores, un concepto definición es un enunciado derivado de la definición matemática y empleado para explicar un concepto; por ejemplo, puede ser una reconstrucción personal de un estudiante de una definición, siendo así, el estudiante puede cambiar su concepto definición de un tiempo a otro y cada vez su concepto definición puede diferir de la definición matemática del concepto.

Vinner y Tall (1981) dicen que, para cada individuo, un concepto definición genera su propio concepto imagen, refiriéndose al concepto como es visto en la mente del individuo, es decir, el producto de los procesos de formación del concepto en la mente. El concepto imagen describe la estructura cognitiva total que está asociada con el concepto, lo que incluye todos los dibujos mentales, las propiedades, etc. La evocación del concepto imagen va más allá de sólo mencionar o evocar un símbolo, es más bien una película mental de procesos mentales, de recuerdos y de uso de un concepto, donde hay muchas cuestiones asociadas que se ponen en juego, afectando consciente o inconscientemente su significado y uso.

Para estos autores, además de los ejemplos que cumplen con una definición, es necesario presentar a los alumnos algunos ejemplos negativos. Los ejemplos negativos (o no ejemplos) relevantes a la formación de conceptos y a la instrucción son aquellos que tienen algunos, pero no todos, los atributos relevantes. Por ejemplo, la definición verbal de los cuadrados sería: figuras de cuatro lados iguales y cuatro ángulos iguales (y por lo tanto rectos); éstos serían los atributos relevantes que definen el concepto. Así, uno de los ejemplos negativos importantes de considerar en relación con la definición de cuadrado, son los rombos, estos cuadriláteros tienen algunos atributos del cuadrado ya que tienen cuatro lados iguales, pero lo que los hace “no ejemplos” de los cuadrados es que no necesariamente tienen todos sus ángulos iguales.

Hershkowitz (1990) señala una fuente de error en relación con la clasificación de figuras, ésta es la “dirección opuesta a la relación de inclusión” entre los conjuntos de ejemplos, por un lado, y los conjuntos de atributos, por el otro. Por ejemplo, en el caso de los cuadriláteros, se tiene que el conjunto de los cuadrados está incluido en el conjunto de los paralelogramos, que a su vez está incluido en el conjunto de los cuadriláteros. Por el contrario, el conjunto de atributos para definir un cuadrilátero en general, está incluido en el de los paralelogramos y éste, a su vez, en el de los cuadrados.

Hershkowitz (1990) menciona otra fuente común de errores en relación con el aprendizaje de la geometría al que denomina el “fenómeno del prototipo”. Vinner y Hershkowitz (1983, citado por Hershkowitz, 1990) encontraron que cada concepto tiene uno o más ejemplos prototípicos que son alcanzados primero y que, por lo tanto, existen en la imagen concepto de la mayoría de los sujetos. Un caso de ejemplo prototípico es usar un cuadrado como ejemplo de los cuadriláteros o el paralelogramo oblicuo como ejemplo de los paralelogramos. Para estos autores, los atributos irrelevantes del prototipo (en el caso de cuadrado, como rectángulo es irrelevante que tenga sus lados iguales) tienen fuertes características visuales y, por lo tanto, son alcanzados primero, pero después actúan como distractores. Ellos encontraron que aun en conceptos formados instantáneamente, donde un concepto inventado era dado por una definición verbal sin presentar ni siquiera un ejemplo, la mayoría de los sujetos (estudiantes y maestros) producían los mismos ejemplos prototípicos.

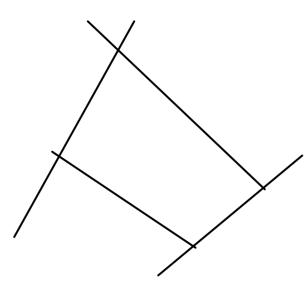
Los ejemplos prototípicos dan lugar a juicios prototípicos; una investigación de Wilson (1986, citado por Hershkowitz, 1990), sobre las relaciones entre las definiciones sobre los rectángulos que hacían los niños y las figuras que elegían como ejemplos, ofrece un ejemplo de este tipo de juicios: ella pedía a los sujetos que definieran un concepto y que eligieran algunos ejemplos de ese concepto y encontró que los estudiantes elegían ejemplos que no eran congruentes con sus propias definiciones. La elección de los estudiantes de ejemplos se basaba más en sus propios prototipos y menos en sus propias definiciones.

Vinner y Hershkowitz (1983, citado por Hershkowitz 1990) consideran que existen dos tipos de juicio prototípico:

Tipo 1. El ejemplo prototípico es usado como marco de referencia y el juicio visual se aplica a otras instancias (esto se ubica en el primer nivel de van Hiele). Por ejemplo, en la construcción de la altura de un triángulo dado, los sujetos fallaban al dibujar ejemplos de alturas que contradijeran su imagen concepto prototípico de una atura interna y dibujaban unos segmentos internos que no eran alturas.

Tipo 2. El ejemplo prototípico es usado como marco de referencia, pero el sujeto basa sus juicios en los atributos propios del prototipo y trata de imponerlos a otros ejemplos del concepto. Cuando esto no funciona, el sujeto no acepta la figura como un ejemplo del concepto. Por ejemplo, uno encuentra el razonamiento. “Ninguna figura, excepto el cuadrado, es un cuadrilátero porque ellas pueden tener lados iguales, pero no tienen ángulos iguales”. Esto, en un sentido, es analítico (segundo nivel de van Hiele) pero es una conclusión errónea.

Hershkowitz y Vinner (1983, citado por Hershkowitz 1990) mencionan otro tipo de juicio que es el analítico. Este tipo de razonamiento se basa en los atributos críticos del concepto. Por ejemplo “la siguiente figura no es un polígono y cualquier cuadrilátero es un polígono”.



Con esa afirmación se muestra un entendimiento de la estructura de clase de inclusión, la que es muy baja en quinto grado pero después se incrementa.

Finalmente los autores encontraron que la frecuencia de ocurrencia del juicio visual (Tipo 1) es baja pero no desaparece completamente con la instrucción, ni siquiera entre los maestros; mientras que la frecuencia de ocurrencia del juicio prototípico (Tipo 2) decrece con la instrucción y desaparece completamente en el caso de los maestros.

2.6 Investigaciones realizadas con niños y adultos sobre los cuadriláteros

Para la enseñanza aprendizaje de los cuadriláteros es importante decir que los procesos cognitivos que caracterizan la construcción de los conceptos geométricos básicos son muy importantes, ya que de ahí se desprenden muchas situaciones que pueden poner a profesores y alumnos en serias dificultades.

Hershkowitz (1990) y sus colegas llevaron a cabo una investigación con alumnos (de quinto a octavo grado) y con maestros en la que se utilizó el tema de cuadriláteros con el fin de indagar sobre los conceptos imagen de conceptos geométricos básicos. Los investigadores encontraron que cada concepto tiene uno o más ejemplos prototípicos que son alcanzados primero y que por lo tanto existen en la imagen concepto de la mayoría de los sujetos. Al final de la investigación encontraron evidencia de que la adquisición de conceptos geométricos es, al menos parcialmente, un resultado de características lógico analíticas.

Clements y Battista (1991, citado por Owens y Outhred, 2006) encontraron que en el caso de los cuadriláteros, el paso del nivel 2 al nivel 3 de Van Hiele es problemático. Ellos mencionan que una característica distintiva del nivel 3 es la inclusión de clase entre dos conjuntos, cuando todos los miembros del primero son miembros del segundo (por ejemplo, los cuadrados como subconjunto de los rectángulos). Una falta de reconocimiento de esta relación indicó que muchos estudiantes de 8º grado están en el nivel 2 de Van Hiele.

Matsuo (1993, citado por Owens y Outhred, 2006) sugiere que el que los estudiantes logren clasificar un cuadrado como un rectángulo depende de la propiedad en la que ellos se enfocan. Si su definición del concepto de rectángulo era cuatro ángulos rectos y lados paralelos, ellos consideraban que un cuadrado pertenecía a la clase de los rectángulos. Sin embargo, si ellos se enfocaban en los rectángulos como figuras que tienen dos lados largos y dos lados más cortos, el cuadrado era clasificado como un caso separado.

El autor muestra que hay evidencia de que la construcción del concepto imagen es una mezcla de procesos visuales y analíticos. También menciona que hay diferentes tipos de patrones de concepciones erróneas dentro de la misma población: (a) concepciones erróneas que duran, las cuales tienen el mismo patrón de incidencia general de un grado al siguiente; (b) concepciones erróneas que desaparecen con la adquisición del concepto; (c) concepciones erróneas que se incrementan con la adquisición de conceptos y que se van desarrollando con el progreso en el aprendizaje.

De Villiers (1994) también habla sobre la teoría de Van Hiele y argumenta que las definiciones formales se pueden desarrollar solamente en el nivel 3, dado que en este nivel los estudiantes empiezan a notar interrelaciones entre las propiedades de una figura. Él discutió el reconocimiento de definiciones visuales no económicas y económicas en el nivel 1 y 3, respectivamente, también consideró definiciones incluyentes y excluyentes. Las definiciones incluyentes definen los conceptos de manera tal que la mayoría de las clases particulares forman subclases de los conceptos más generales; mientras que en las definiciones excluyentes las varias subclases de los conceptos son consideradas disjuntas una de la otra. Por ejemplo, los cuadrados están excluidos de la clase de los rectángulos.

De Villiers encontró que muchos estudiantes preferían las definiciones excluyentes más que las incluyentes y concluyó que los estudiantes deberían ser involucrados para que participen activamente en la construcción de definiciones. También encontró que los estudiantes que se involucraron en la argumentación y la justificación acerca de características diferentes de una definición matemática, cambiaban su opinión como resultado de las intervenciones y discusiones con sus compañeros, además de darse cuenta que las definiciones de los textos no eran inviolables y que eran posibles las definiciones alternativas (Shir y Zalavsky, 2002; De Villiers 1994). Las definiciones que requieren de análisis animaron a los estudiantes a pensar sobre condiciones necesarias y suficientes en el nivel 3 de Van Hiele.

De Villiers (1987, 1990, citado en De Villiers 1994) llevó a cabo varias experiencias con niños del noveno al doceavo grado y presenta el caso de un alumno que no tenía problema con sacar conclusiones correctas de definiciones y hacer inclusiones jerárquicas, pero prefería no hacerlo. Clements y Battista (1962, 1963, citados en De Villiers 1994) reportan, similarmente, dos casos de estudiantes que eran capaces de seguir la lógica de la clasificación jerárquica de cuadrados y rectángulos pero tenían dificultad en aceptar los resultados de la aplicación de dicha lógica. De Villiers (1996) concluye que el problema parece ser no tanto la falta de entendimiento relacional o lógico, ni siquiera la competencia para definir, sino una falta de entendimiento funcional (es decir, no se observa cuál es la función o valor de la clasificación jerárquica de los cuadriláteros).

De Villiers (1994) reconoce dos maneras de clasificar figuras en general y a los cuadriláteros en particular: la partitiva y la jerárquica. Por clasificación jerárquica entiende que es la clasificación de un conjunto de conceptos de tal manera que los conceptos más particulares forman subconjuntos de los conceptos más generales. Este tipo de clasificación se deriva de definiciones incluyentes. En oposición a la clasificación jerárquica se encuentra la clasificación partitiva de conceptos. En este tipo de clasificación los subconjuntos de conceptos se consideran disjuntos uno del otro y se derivan de definiciones excluyentes.

En la clasificación jerárquica, por ejemplo, los rectángulos y los rombos son subconjuntos de los paralelogramos y los cuadrados son la intersección entre rectángulos y rombos. En contraste, en una clasificación partitiva los cuadrados no son rectángulos ni rombos; tampoco los rectángulos y rombos son paralelogramos.

A pesar de que el autor reconoce que la elección entre la clasificación jerárquica y partitiva es frecuentemente una situación de elección personal y conveniencia, enuncia las ventajas de usar una clasificación jerárquica:

- Lleva a definiciones económicas. Con ello se puede decir que una definición incluyente es más corta que una excluyente, por ejemplo con el caso del rectángulo: un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos. Esta definición es más corta que una partitiva que tiene que excluir a los cuadrados y requiere aumentar características, haciéndola más larga: un cuadrilátero con dos pares de lados opuestos de diferente tamaño y ángulos rectos.
- Simplifica la sistematización deductiva. Al clasificar o definir un concepto A (cuadrado) como un subconjunto (caso especial) de un concepto B (rectángulo), no es necesario repetir algunas de las propiedades del concepto (cuadrilátero con los pares de lados opuestos paralelos y con ángulos rectos), ya que todas éstas características son automáticamente implicadas en A (cuadrado) en la clasificación jerárquica, que define cuadrado como un rectángulo con lados iguales.
- Provee un esquema conceptual útil durante la resolución de problemas. En particular para probar corolarios. Por ejemplo, supóngase que uno quiere probar que un cometa (cuadrilátero con dos pares de lados adyacentes iguales) con un par de lados opuestos paralelos es un rombo. Usando la perspectiva de clasificación jerárquica, en la que los rombos están en la intersección de los cometas y los paralelogramos, es suficiente probar que la figura es un paralelogramo, ya que cualquier cometa con ambos pares de lados paralelos debe ser un rombo.
- Origina definiciones alternativas y nuevas proposiciones. Por ejemplo, si se define, alternativamente, al cuadrado como la intersección de rombo y rectángulo, surge la proposición de que las diagonales de un cuadrado son iguales (por ser rectángulo) y perpendiculares (por ser rombo). Entonces, si se consideran varios subconjuntos del conjunto total, de las propiedades de

algunos conceptos pueden ser sugeridas definiciones alternativas o nuevas proposiciones.

De Villiers (1994) se refiere también a lo que denomina “entendimiento funcional”, una condición que considera importante para lograr un mejor aprendizaje de las matemáticas, y que ya se había mencionado anteriormente, en cuanto a que las clasificaciones jerárquicas proporcionan una perspectiva global útil que puede llevar a una cohesión de las relaciones subyacentes entre conceptos y, por lo tanto, a una mejor retención. Además, dice, es gratificante ver cómo varias intersecciones entre varios conceptos más generales producen las propiedades de conceptos más especiales.

Monaghan (2000) hace una investigación en Londres con alumnos de 11 a 16 años, él solicitó a los estudiantes que describieran con sus propias palabras las diferencias entre parejas de cuadriláteros. El objetivo de la investigación era analizar el lenguaje usado por los estudiantes para describir diferencias entre figuras, para descubrir acerca de las conceptualizaciones de los niños sobre las formas.

Monaghan utiliza el modelo de Van Hiele como marco de referencia y caracteriza los niveles de los alumnos a través de las habilidades de los estudiantes para hablar, dibujar o escribir acerca de su entendimiento conceptual y concluye que son muy pocos los estudiantes que van más allá del nivel 2 y que, por lo general, los estudiantes de este nivel sólo son capaces de identificar formas básicas aisladas.

Otros resultados y recomendaciones de la investigación de Monaghan son:

- Los materiales curriculares tienden a utilizar en exceso representaciones estándares de figuras como un medio para identificar y discriminar entre ellas.

- Se puede demostrar que si se utiliza una sola representación de una figura (que tiene muchas representaciones) es poco probable que se desarrolle una conceptualización de más alto orden que permita a los alumnos reconocer que, por ejemplo, los trapecios incluyen a los cuadrados, paralelogramos, rectángulos y rombos. Los alumnos confunden una imagen mental con un concepto y necesitan de la mediación por parte del maestro para diferenciarlos (Fischbein, citado por Monaghan, 2001).
- Lo que caracteriza a un concepto es el hecho de que expresa una idea, una representación ideal y general de una clase de objetos basada en sus características comunes. En contraste, una imagen (imágenes mentales) es una representación sensorial de un objeto o fenómeno.
- La propuesta de proporcionar a los alumnos diferentes ejercicios de comparación de cuadriláteros y cuestionarlos preguntando, por ejemplo: ¿cuál es la diferencia entre un cuadrado y un rectángulo?, ¿cuál es la diferencia entre un cuadrado y un rombo? ofrece perspectivas valiosas, para ayudar a los estudiantes a moverse de los niveles 0 y 1 de Van Hiele. Así mismo, permite al profesor identificar cuáles conceptos no son claros para los alumnos (dando lugar a que planee sobre ello), o cuáles conceptos en particular no tienen los estudiantes (permitiéndole planear en un nivel individual).
- El mal uso de una palabra o cualquier uso pobre del lenguaje tiene una permanencia importante y, en consecuencia, se convierte en un problema definitivo para la buena enseñanza.
- El papel del maestro es ayudar al los estudiantes a tender un puente entre su entendimiento conceptual real y la expresión lingüística del concepto.
- Los paquetes de geometría dinámica que permiten a los estudiantes manipular las figuras geométricas en la pantalla, ofrecen maneras útiles para percibir transformaciones por parte de los estudiantes que normalmente operan en modelos más rígidos (como el trabajar en papel y lápiz).

Jones (2000) llevó a cabo una investigación sobre la clasificación de cuadriláteros con estudiantes de 12 años usando geometría dinámica. Jones dice que en los primeros años de secundaria (edades 11-13) el énfasis se mueve del reconocimiento (informal) y ordenamiento de las figuras geométricas hacia las definiciones formales requeridas para clasificar y deducir las propiedades de las relaciones entre las figuras.

En la fase uno de su investigación Jones pidió a los alumnos que reprodujeran en la computadora usando Cabri (a este programa de computadora se le dedica el apartado 2.8 más adelante) una figura (la cual hace uso de las relaciones geométricas) y no sólo un dibujo (el cual se parece a la figura solicitada pero se deforma cuando se le quiere mover).

En la segunda fase les pidió que construyeran un rombo, un cuadrado y un papalote, con la consigna de que cada uno quede construido de tal manera que sea invariante bajo arrastre y que el alumno explique por qué la figura construida es un cuadrilátero particular. En la fase tres, les pidió que hicieran una clasificación jerárquica y que explicaran las relaciones que había en ella. Los resultados derivados de esta investigación mostraron que:

- En una fase inicial los alumnos describen en lugar de explicar (muestran confianza en la percepción más que en el razonamiento matemático).
- Mediante un razonamiento mediado por el ambiente del software de geometría dinámica los alumnos pudieron cambiar su pensamiento impreciso y su uso de expresiones cotidianas, por explicaciones matemáticas precisas de acuerdo a la situación geométrica que se les planteaba.
- El software de geometría dinámica es de gran ayuda para habilitar conceptualmente el ver y aceptar la posibilidad de inclusiones jerárquicas.
- Los alumnos pueden progresar en la explicación matemática, misma que debe proporcionar un fundamento sobre el cual se puedan construir nociones de razonamiento deductivo en matemáticas.

Mora (2002) propone que se les pida a los alumnos que clasifiquen cuadriláteros, menciona que la clasificación lleva aparejado un dominio de los conceptos implicados que va más allá de recordar la definición, es necesario que se convierta en un valor de uso para averiguar cuestiones como: ¿todos los cuadrados son rombos?, ¿son trapecios los paralelogramos? Estas preguntas llevan a buenas discusiones y para encontrar respuestas satisfactorias, se debe profundizar en la definición.

Como ejemplo para trabajar la clasificación de cuadriláteros con alumnos de diez años Mora (2002) comenta acerca de un profesor que muestra un cuadrado (formado con varillas movibles) a sus alumnos; inmediatamente, y sin modificar la forma ni tamaño, gira sus manos; entonces, los alumnos ya no ven un cuadrado sino que, afirman se trata de un rombo. Con este ejercicio y otros de manipulación con las varillas es posible proporcionar una visión dinámica de las figuras geométricas, con las que no pueden competir las imágenes estáticas del libro de texto o las del pizarrón.

2.7 Uso de nuevas tecnologías en la enseñanza de la geometría

En los últimos años ha habido una cantidad considerable de investigación sobre la geometría en un ambiente computacional, debido a que los fuertes elementos visuales provistos por la computadora, su potencial interactivo y la manera en que los objetos visuales pueden ser manipulados fácilmente y vistos desde diferentes perspectivas atraen a muchos educadores de matemáticas. Esto lleva a que se manifieste un interés común en usar la interacción computadora-estudiante para crear situaciones de aprendizaje que faciliten la adquisición de destrezas visuales, conceptos geométricos específicos, o procesos de pensamiento (Hershkowitz, 1990).

Las formas de software normalmente conocidas como ambientes de geometría dinámica pueden ser útiles ya que permiten a los estudiantes interactuar con la teoría geométrica. Con la ayuda de algún software los alumnos adquieren experiencia que les permite acceder al razonamiento deductivo (Jones 2000).

La geometría es un área del plan de estudios que está íntimamente conectada con el desarrollo del método deductivo, el software de computadora generalmente conocido como ambientes de geometría dinámica (AGD) parece tener el potencial para proporcionar a los estudiantes experiencia directa de teoría geométrica y, por tanto, romper con lo que puede ser una separación desafortunada entre la construcción geométrica y la deducción (Jones, 2000). Como tal, el uso de AGD por los estudiantes podría tener un papel importante, al permitir que ellos formulen explicaciones deductivas y mantener un fundamento para el desarrollo de ideas, como podrían ser ejemplos y contraejemplo; así como de, pruebas y demostraciones.

En geometría es importante la construcción de figuras que realizan los alumnos, Laborde (1993, citado por Jones, 2000) resalta una distinción importante entre dibujo y figura: "*dibujo* se refiere a la entidad material, mientras *figura* se refiere a un objeto teórico". En términos de un paquete de geometría dinámica, un *dibujo* puede ser una yuxtaposición de objetos geométricos que se parecen mucho a la construcción que se intenta (algo que puede ser hecho para "parecer correcto"). En contraste, una figura captura adicionalmente las relaciones entre los objetos de tal manera que la figura es invariable cuando cualquier objeto básico usado en la construcción se arrastra (esto es cuando se traslada una figura de un lugar de la zona de trabajo a otro, con la ayuda del mouse). Hólzl (1995, 1996, citado por Jones, 1993) encontró que los estudiantes pueden quedar 'atorados' en alguna parte entre un dibujo y una figura.

Eso es un desarrollo clave en las matemáticas: trabajar con las representaciones como si ellas fueran "el objeto" que se está explorando. (Moreno y Waldegg, 2004). Los medios computacionales funcionan como recursos que dan estructura a la exploración matemática de los estudiantes.

Laborde (2001, citado por Owens y Outhred, 2006) resume los usos prospectivos del software de geometría dinámica de la siguiente manera:

- Facilita el dibujo con resultados similares a aquellos hechos con papel y lápiz.
- Da pauta a que en las tareas matemáticas se involucre el hecho de hacer conjeturas, también permite dibujar muchos ejemplos para llegar a la solución.
- En una tarea donde se requiere el uso de propiedades, puede ser modificada y ya no sólo se basaría en la percepción.
- Genera nuevas tareas en las que sólo se puede tener acceso en ambientes de geometría dinámica.

Se puede decir que en el momento que se usa una computadora no sólo se dispone de un soporte de representación externa (como es un cuaderno), sino de la posibilidad de someter y procesar esa información de cierta manera, debido a la accesibilidad del sistema de representación que proporciona la máquina.
La manipulación que se lleva con los objetos matemáticos ha generando un nuevo "realismo" matemático del que se puede sacar provecho didáctico (Balacheff y Kaput, 1996, citados por Owens y Outhred, 2006).

Cuando se usa la tecnología en la escuela, hay que reconocer que ésta no es en sí misma el objeto central del interés, sino el pensamiento matemático que pueden desarrollar los estudiantes bajo la mediación de dicha tecnología (Moreno y Waldegg, 2004).

Los programas de cómputo, y especialmente el software interactivo, pueden abrir perspectivas antes no conocidas. Más aún, los problemas de programación en sí mismos pueden dar a los alumnos nuevas motivaciones para el aprendizaje. Por ejemplo, el conocimiento de los alumnos de la geometría analítica puede desarrollarse de la necesidad de manipular objetos sobre la pantalla de una computadora. Las pruebas algebraicas llegan a ser necesarias a causa de que los pixeles sobre la pantalla son ‘demasiado grandes’ para permitir a los alumnos ver la posición real de dos curvas, etc. (Szendrei, 1996).

Se han realizado numerosos estudios donde se considera que el uso de la tecnología permite acercar al alumno al conocimiento de manera atractiva, y que le permite construir sus propias conjeturas dando apertura al razonamiento matemático; así mismo, el alumno accede a expresar al grupo escolar sus ideas de forma organizada.

Szendrei (1996) recalca que los materiales educativos tecnológicos no son milagrosos; su uso productivo requiere previsión y planeación**.** Los maestros deben ver, sin embargo, que los materiales educativos no pueden lograr por sí mismos la enseñanza de las matemáticas, éstas son un valor añadido al material**.** Las computadoras abren una nueva fase en el uso de herramientas en la educación matemática (y naturalmente son fuente de nuevas creencias, malentendidos y debates)**.**

Según Szendrei (1996) algunos educadores se han manifestado en contra del uso de materiales concretos con argumentos tales como los siguientes:

1) Habrá ruido en el salón de clase;
2) El niño destruirá los materiales;
3) El costo de la educación se volverá desproporcionalmente alto;
4) Los conceptos que se desarrollan usando materiales concretos nunca se volverán abstractos.

Sin embargo, opina que el papel del entrenamiento del maestro en cualquier nivel no es únicamente enseñar el contenido e introducir los diferentes materiales manipulativos sino también desarrollar habilidades, además debe tener en cuenta que las diferencias culturales y de lenguaje pueden dar buenos resultados en ciertos materiales o limitar su uso como herramientas.

Para este autor, los materiales concretos en la clase de matemáticas no producen automáticamente ni un mal ni un buen efecto. Un maestro debe planear el uso de materiales de acuerdo con las demandas de la sociedad, el lenguaje de instrucción, y la filosofía de la escuela. Naturalmente, los maestros no deben quedarse solos y sin asistencia o guía en una situación de libre elección.

Mora (2002) menciona que la utilización de recursos con la computadora obliga a trabajar en grupos, factor que influye positivamente en el aprendizaje de los estudiantes, ya que se favorece el intercambio de ideas entre el profesor y los estudiantes y entre los mismos estudiantes que han de exponer argumentos para explicar sus ideas, convencer a otros, confrontar opiniones y atender perspectivas distintas a la propia. Así mismo cuando un estudiante tiene que defender sus soluciones ante sus compañeros, habrá de clarificar mejor sus ideas y organizar su pensamiento de forma más coherente y precisa. El autor menciona que en la utilización de recursos no sólo hay que reflexionar sobre cómo y cuándo utilizarlos, sino también cómo y cuándo dejarlos de lado para pasar a otros menos figurativos, o simplemente no utilizar ninguno. Afirma también que los recursos no constituyen un fin en sí mismo sino que son más bien un medio para el aprendizaje cuyo fin es de servir de intermediario entre el conocimiento matemático y los estudiantes.

2.8 El uso de Cabri- géomètre en la enseñanza de la geometría

De Villiers (1996) menciona que Cabri-géomètre (al que se hará mención de aquí en adelante como Cabri) es un programa de geometría dinámica diseñado con la intención específica de poner a disposición de los alumnos un ambiente del tipo micro mundo para la exploración experimental de la geometría plana elemental. Afirma que en el pasado se tenían que dibujar las configuraciones geométricas en una hoja de papel, obteniendo así una representación más o menos exacta pero fija y, por lo tanto, limitando en extremo la exploración. En este programa las figuras geométricas pueden construirse por medio de acciones que son muy similares a la que se usan con papel y lápiz. En contraste con la construcción de papel y lápiz, la geometría dinámica es precisa, fácil y rápida para realizar construcciones complejas para luego modificarlas. Las figuras pueden redibujarse tomando sus elementos básicos de la pantalla y moverse mientras se mantienen las propiedades que se les han dado explícitamente. Por lo tanto, el software permite repetir fácilmente experimentos en muchas posiciones diferentes y así verificar cuáles propiedades geométricas permanecen invariantes (como el paralelismo, congruencia, perpendicularidad, etc.) si son verdaderas en general, y si no lo son, puede construir contraejemplos.

De Villiers (1996) asegura que la habilidad para transformar rápida y eficientemente las configuraciones geométricas con el software de geometría dinámica también permiten modelar eficazmente situaciones reales y problemas por medio de dibujo dinámicos a escala.

Owens y Outhred (2006) mencionan a varios autores que han trabajado sobre este tema. Por ejemplo Giraldo, Belfort y Carvalho, ellos señalan que, el que los alumnos vean y tracen objetos concretos (o dibujos) ayuda a que los estudiantes establezcan la relación abstracta de un conjunto de dibujos (o figuras). Por esa razón Cabri puede ayudar a desarrollar definiciones, por ejemplo, de los cuadriláteros; sin embargo hay maestros que recurren a tecnología de la geometría dinámica para la instrucción directa, pero da mejores resultados si es usada para implicar a los estudiantes en un reto ligado a un concepto matemático.

Sinclair (2003, citado por Owens y Outhred, 2006) dice que Cabri tiene varias ventajas entre ellas se pueden mencionar las siguientes; incluye acceso a claves numéricas, tiene la capacidad de permitir producir y perfeccionar objetos geométricos para encontrar la solución a algún problema. Así también menciona una desventaja que podría ser que la falta de exactitud en las figuras lo puede provocar un retroceso.

Hólzl, (1995, 1996, citado por Jones, 2000) menciona que en Cabri el proceso de la comprobación es controlado por el modo de arrastre (esto es cuando se traslada una figura de un lugar de la zona de trabajo a otro, con la ayuda del mouse). Este arrastre es el que permite ver la diferencia entre dibujo y figura, lo que permite que no haya confusión en los alumnos. Sin embargo, agrega que tanto más poderosa sea la herramienta computacional, se necesitaran más esfuerzos didácticos para provocar que los alumnos se enfoquen en las relaciones matemáticas.

Por su parte Balacheff (citado por Jones, 2000) resalta como un problema del programa Cabri que la organización secuencial de acciones necesarias para producir una figura con este programa introduce un orden explícito de construcción donde, para la mayoría de los usuarios, el orden no se espera normalmente o, incluso, ni siquiera importa. Por ejemplo, Cabri induce una orientación en los objetos, si se traza el segmento AB está orientado porque A es creado antes que B. Esto tiene sentido probablemente en un ambiente de manipulación directa, pero es contradictorio al hecho de que con papel y lápiz estos objetos no tienen ninguna orientación a menos que se declare explícitamente. En una figura compleja esta organización secuencial produce lo que es, en efecto, una jerarquía de dependencias dado que cada parte de la construcción depende de algo creado antes.

Hoyles (1995, citada por Jones, 2000) también identifica esto como una fuente de confusión en Cabri ya que cualquier jerarquía de relaciones que se ha establecido no puede modificarse después (sin deshacer lo que se ha trazado o sin tener que borrar y empezar toda la construcción de nuevo).

Por otro lado, al observar a estudiantes que intentan construir un rectángulo usando el paquete de software de geometría dinámica Cabri, Hólzl (1994: 11, citada por Jones, 2000) encontró que para hacer algún progreso con tal tarea los estudiantes tenían que ponerse en contacto con “la esencia misma de Cabri: que una *figura consiste de relaciones* y que hay una *jerarquía de dependencias*”. Un ejemplo de esta jerarquía de dependencias es la diferencia (en Cabri I para PC) entre punto básico, punto en un objeto y punto de intersección, mientras que los tres tipos de puntos idénticos en la pantalla, los puntos básicos y los puntos en los objetos son movibles. Sin embargo, un punto de intersección no puede arrastrarse. Esto es porque un punto de intersección depende de la posición de los objetos básicos que se cortan. Sólo los objetos básicos (como los puntos básicos, líneas, etc.) usados en una construcción pueden arrastrarse. Los objetos dependientes, tales como los puntos de intersección, sólo se mueven como una consecuencia de su dependencia en estos objetos básicos. De su estudio, (Hólzl) concluye que los estudiantes necesitan desarrollar una conciencia de tal dependencia funcional para ser exitosos con tareas de construcción geométrica no triviales al usar el software de geometría dinámica. La idea de dependencia funcional está, dentro del ambiente de geometría dinámica, íntimamente conectada con la noción de robustez de una figura bajo el arrastre, como ya se mencionó. Dadas las complejidades involucradas, Hólzl (1994) reportan que “la idea de dependencia funcional ha demostrado ser difícil de comprender (para los estudiantes)”.

Así pues, producir un dibujo con Cabri que conserve propiedades espaciales durante el arrastre, requiere del uso de propiedades geométricas para su construcción, y descalifica los procesos de ensayo y error controlados únicamente de manera perceptiva. Un proceso de construcción en Cabri “a ojo” deja de satisfacer las condiciones cuando se mueve uno de los objetos de la base. La tarea requiere el uso de relaciones geométricas y no sólo una percepción visual de éstas, como en el entrono de papel y lápiz.

Lo anterior sugiere que los AGD son recursos útiles para ayudar a construir una fundamentación para el razonamiento deductivo en los estudiantes de secundaria y entonces es importante saber qué interpretaciones hacen estos estudiantes de los objetos geométricos y las relaciones experimentadas a través de un AGD. De particular importancia en su sentido de “dibujo” y “figura” (siguiendo el trabajo de

Laborde y de Hólzl, citados por Jones, 2000) y de la naturaleza de los objetos geométricos y las relaciones, sobre todo la noción de dependencia.

Hasta aquí se han expuesto resultados de investigaciones relacionados con los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría. Como la investigación reportada en esta tesis pretende investigar las concepciones de los maestros sobre los cuadriláteros y su clasificación, en los siguientes dos apartados se reseñan resultados de investigaciones teóricas y empíricas sobre este tema.

2.9 Concepciones de maestros en la enseñanza y aprendizaje

En el plan y programas de estudios de matemáticas se presenta el enfoque, los propósitos, la secuencia y organización de los contenidos, etc., todo ello para dar a conocer una propuesta de enseñanza aprendizaje sin embargo, aunque se enuncie lo anterior de manera oficial, lo acompañan diversos factores que no se declaran de la misma manera pero que sin duda existen; es decir, cada tema lleva un toque de personalidad, conocimientos, creencias, significaciones e historia que cada docente tiene y lleva al salón de clase.

Como señalan Giménez, Llinares, y Sánchez, (1996), los profesores filtran el currículo a través de sus esquemas mentales que incluyen conocimientos matemáticos, concepciones y creencias sobre las matemáticas como disciplina, su percepción del proceso enseñanza-aprendizaje y otros aspectos relativos a su papel en el salón de clases. Así mismo, Ernest (1988) señala que los estudios empíricos han confirmado que las ideas, creencias y preferencias del profesorado sobre las matemáticas influyen en su manera de impartir clase.

Con respecto a las concepciones de maestros Sáiz (2002) dice que la interpretación de los profesores de los modelos de enseñanza oficiales orienta su labor docente. En el caso particular de las matemáticas dicha significación contiene conexiones entre elementos como sus conocimientos de los temas del *curriculum*, su dominio de los sistemas matemáticos de signos, sus propias dificultades y habilidades, sus sistemas de creencias en relación con el carácter y utilidad de las matemáticas, sus referentes teóricos y prácticos de los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

Arceo (1999) plantea que parece que el maestro tiene una teoría (de la enseñanza y el aprendizaje) que se refleja en su práctica y detrás de ella hay una historia personal y no sólo una propuesta curricular.

Guzmán (2000) menciona que los docentes tienen creencias, expectativas y actitudes sobre su práctica educativa que se cristalizan en los procesos de enseñanza e influyen y condicionan su conducta en el aula. En este sentido, el perfil y las concepciones del docente de matemáticas sirven de marco de referencia, a través del cual el profesor dirige su práctica docente.

Ernest (1988) subraya la necesidad de tener en cuenta las creencias y las actitudes de los profesores sobre las matemáticas, la pedagogía de las matemáticas y los estudiantes.

Giménez, Llinares, y Sánchez, (1996) indican que el análisis del uso que un profesor hace de su conocimiento en las situaciones de enseñanza ha indicado que sus creencias epistemológicas y las condiciones contextuales en las que se toman las decisiones también intervienen en sus procesos de razonamiento pedagógico.

Para estos autores los conocimientos y creencias de los estudiantes para profesores sobre las matemáticas y el proceso de aprendizaje, vienen determinados por la forma en que interactúan en los diferentes contextos prácticos.

Giménez, Llinares, y Sánchez (1996) mencionan que se deben tomar en cuenta cuestiones relativas a enseñar matemáticas; primero están las tradiciones pedagógicas inherentes a los sistemas educativos particulares; segundo, está la discusión sobre el conocimiento base necesario para enseñar y los procesos por los cuales los profesores generan su propio conocimiento práctico personal y agregan que éstas dos cuestiones se superponen en la práctica.

Guzmán (2000) indica que las creencias de los profesores, sus puntos de vista y sus preferencias acerca de las matemáticas y su enseñanza juegan un rol significativo, aunque sutil, al determinar la conducta educativa de los profesores, además como resultado de su investigación destaca que los profesores mostraron en común la preeminencia de prácticas tradicionalistas.

Resaltemos que en las últimas décadas (a partir de 1980) se ha llevado a cabo un fuerte desarrollo de la investigación en el campo de la Educación Matemática y dentro del conjunto de investigaciones que se llevan a cabo, ocupan un lugar significativo las dirigidas al estudio del pensamiento, creencias y concepciones acerca de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje.

Giménez, Llinares, y Sánchez (1996) mencionan, con respecto a las investigaciones, que en los primeros estudios sobre los profesores se consideraban variables criteriales (características personales de los profesores, número de cursos recibidos, etc.) y la correlación de estas variables con los resultados de exámenes de sus alumnos. Después las investigaciones empezaron a centrarse en lo que los profesores conocen y creen como variables que median en los procesos de enseñanza aprendizaje y de aprender a enseñar.

Sáiz (2002) indica que el interés sobre este tipo de investigaciones radica en el hecho de que las creencias de las personas afectan sus acciones y decisiones, derivado de ello emerge decir que las concepciones de los maestros influyen en su práctica docente.

Además, la mayor parte de estas investigaciones trabajaron sobre la premisa de que: *“para entender la enseñanza desde la perspectiva de un maestro tenemos* *que entender las creencias con las que ellos definen su trabajo"* (Nespor, 1987, citado en Thompson 1992:129).

Thompson (1992) es una pionera en este tipo de investigaciones y muestra en su trabajo una síntesis de diversas investigaciones sobre concepciones, de los profesores. En éste, ella llega a la conclusión de que es necesario distinguir entre lo que es una creencia y lo que es conocimiento. En el siguiente apartado se aborda sobre ello.

2.9.1 Creencias y conocimientos

Las creencias de los maestros se han vuelto un tema de estudio importante y hasta se podría decir que frecuente, sin embargo Thompson (1992) refiere que a pesar de la popularidad actual de las creencias de los profesores como un tópico de estudio, el concepto de creencia no ha sido tratado sustancialmente, probablemente esto se debe a que los diferentes investigadores han partido del supuesto de que quienes leen los trabajos referentes al tema saben lo que son las creencias.

Una explicación de la ausencia de discursos razonados acerca de las creencias en la literatura educacional es la complejidad para poder distinguir entre creencia y conocimiento, esto, debido a la cercanía que existe entre ambos conceptos; por lo tanto resulta complicado distinguir entre una creencia y un conocimiento: las distinciones parecen ser muy borrosas (Scheffler, 1965, citado en Thompson, 1992:129).

Algunos investigadores han observado frecuentemente casos de maestros que tratan sus creencias como conocimientos, lo que ha dirigido a algunos investigadores que sólo estaban enfocados en el conocimiento de los maestros a considerar también sus creencias. (Grossman, Wilson y Shulman, citados por Thompson, 1992)

Thompson (1992) refiere que las concepciones son: creencias, conceptos, significados, reglas, imágenes mentales y periféricas consistentes o inconsistentes.

Ahora bien, una tarea difícil es la distinción entre las creencias y el conocimiento (Thompson 1992). Algunos consideran éstos como mutuamente excluyentes: el conocimiento se compondría de creencias que uno puede justificar, pero surge entonces el problema de qué considerar como una justificación válida. Incluso en una disciplina científica algo que se considera como una justificación buena hoy, puede considerarse unos años después como un grave error.

Las creencias se han distinguido del conocimiento de diferentes maneras. Algunos aspectos característicos de las creencias han sido sintetizados por Thompson (1992) y se describen a continuación.

Las creencias pueden ser sostenidas con diferentes grados de convicción.
De acuerdo con Abelson (1979, citado en Thompson 1992), un creyente puede estar apasionadamente ligado a un cierto punto de vista, o en otro extremo puede ver un cierto conjunto de hechos como más probables que otros. Un apasionamiento de creencia estaría ausente de los sistemas de conocimientos. Es decir, no se puede afirmar fuertemente que se sabe algo. El autor lo ejemplifica como: “Yo creo que pueden encontrarse microorganismos en Marte”.

Las creencias no son consensuales.
La palabra creencia, al distinguirla de conocimiento, lleva consigo una connotación de disputabilidad; el creyente está consciente de que las otras personas pueden pensar diferente que él (Abelson, 1979, citado en Thompson 1992:130). De forma opuesta, el conocimiento está asociado con la verdad o la certeza, Scheffler (citado en Thompson, 1992) argumentaba que un llamado al conocimiento puede satisfacer una condición verdadera, mientras que las creencias son independientes de su validez. Esto se puede ver expresado en su siguiente texto:

> De manera general, si un sujeto piensa que otro está equivocado en su creencia, entonces negará que el otro sujeto sabe, no importando lo sincero que lo juzgue o qué tan fuerte considere la convicción del otro sujeto. El que un individuo sea juzgado como equivocado, es una base suficiente para rechazar al decir que sabe. Por lo tanto, si se admite que un sujeto sabe, él debe ser juzgado como que no está equivocado, y éste es el punto de condición de verdad. El saber no es compatible con estar mal o equivocado, y cuando un sujeto describe a alguien como que sabe, se está adhiriendo a sí mismo al hecho de que él no está equivocado (Thompson, 1992, p. 23-24).

Las creencias no involucran cánones de evidencia.
Un aspecto importante que caracteriza al conocimiento, es el acuerdo general acerca de cómo evaluarlo y juzgar su validez. Contrariamente, las creencias se caracterizan por una falta de acuerdo acerca de cómo deben ser evaluadas o juzgadas, se sostienen o justifican por razones que no tienen nada que ver con los criterios por los que caracterizan al conocimiento.

Nespor (1987, citado por Thompson 1992) dice que las creencias se sostienen en sistemas y que estos sistemas de creencias son de naturaleza dinámica, llevan en sí el cambio y la reestructuración cuando los individuos evalúan sus creencias contra sus experiencias; así mismo, incluyen sentimientos afectivos y evaluaciones, memorias vividas o experiencias personales y supuestos acerca de entidades y mundos alternativos, los cuales no están abiertos a la evaluación externa o al examen crítico, en el mismo sentido que los componentes de los sistemas de conocimiento lo están.

Green (1971, citado por Thompson 1992) identificó en cada sistema de creencias tres dimensiones que tienen que ver, no con el contenido de las creencias mismas, sino con la manera en que se relacionan dentro del sistema.

- Primera dimensión: Una creencia no es independiente de las otras.

No se puede considerar a una creencia totalmente independiente de las demás creencias, ya que algunas creencias están relacionadas con otras. Por lo tanto, los sistemas de creencias tienen una estructura cuasi-lógica, con ciertas creencias primarias y algunas derivadas de ésta. Por ejemplo, un maestro puede creer importante que sus alumnos aprendan geometría, ésta es una creencia primaria. Para obtener el aprendizaje el docente considera importante: a) que los alumnos aprendan a utilizar los instrumentos de geometría (regla, compás, escuadras) y que tracen figuras geométricas b) que calculen áreas y perímetros de diferentes figuras geométricas. Estas dos son creencias derivadas.

- Segunda dimensión: Grado de convicción de las creencias.

Una segunda dimensión de las creencias se relaciona con el grado de convicción con el que dichas creencias son sostenidas. Green (1971, citado por Thompson 1992) enuncia dos tipos de sistemas de creencias: los centrales y los periféricos. Los sistemas de creencias centrales son las creencias más sólidamente sostenidas, y las periféricas son las más susceptibles de cambiar o de examinar. En el ejemplo que se describió en la primera dimensión, la creencia derivada acerca de la importancia de que los alumnos calculen áreas y perímetros puede ser más importante o psicológicamente central para el maestro ya que podría pensar que en los exámenes es lo que se les pregunta a los alumnos.

- Tercera dimensión: Las creencias se sostienen en grupos.

La tercera dimensión tiene que ver con la aseveración de que las creencias se sostienen en grupos que están más o menos aislados de otros grupos y protegidos de cualquier relación con algún conjunto de creencias.

A diferencia de los sistemas de creencias, “los componentes de los sistemas de conocimiento están abiertos a la evaluación externa o al examen crítico, lo cual no sucede con los sistemas de creencias porque con mayor frecuencia estos incluyen sentimientos, evaluaciones, recuerdos o experiencias personales” (Nespor, 1987, citado en Thompson 1992:130).

2.10 Concepciones de maestros acerca de la enseñanza de las matemáticas

Thompson (1992) menciona que hay un cierto número de estudios en educación matemática, que han indicado que las creencias de los profesores acerca de las matemáticas y su enseñanza juegan un papel significativo en modelar las características de los patrones de comportamiento docente de los maestros. Ella agrega que las concepciones de los maestros, abarcan creencias, significados, concepciones, proposiciones, reglas, imágenes mentales, preferencias, etc.

Ernest (1988) notó que entre los muchos elementos clave que influyen en la práctica de la enseñanza de las matemáticas, hay tres que son los más importantes:

1.- Los contenidos o esquemas mentales de los maestros, particularmente el sistema de creencias relativo a las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje.
2.- El contexto social de la situación de los maestros, particularmente las restricciones y oportunidades que éste provee.
3.- El nivel de los procesos de reflexión del pensamiento de los maestros.

Parte de los “contenidos” mentales o esquemas de los maestros incluyen conocimiento sobre las matemáticas. Ernest (1988) dice que aunque es importante el conocimiento sobre las matemáticas, éste por sí mismo no da información acerca de las diferencias en la práctica que existen entre los maestros de matemáticas. Basándose en investigaciones acerca de las creencias sobre las matemáticas, indica que los acercamientos de los maestros a la enseñanza de las matemáticas dependen fundamentalmente de sus sistemas de creencias, particularmente de sus concepciones de la naturaleza y significado de las matemáticas y de sus modelos mentales de enseñar y aprender matemáticas.
Finalmente Thompson (1992) afirma que las concepciones que los profesores tienen acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas tienden a hacer conexiones eclécticas de creencias y puntos de vista que parecen más el resultado de sus años de experiencia en el salón de clases que un cierto tipo de estudio formal o informal.

2.11Referentes teóricos

Acerca de los estudios sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría, la mayoría de los autores mencionados coinciden en aspectos generales y no se reportan contradicciones en sus conclusiones. Muchos de ellos usan los modelos de Van Hiele para su análisis y esto los ubica en una misma línea de investigación.

En esta investigación se tomarán como referentes teóricos principales para el diseño de instrumentos de toma de datos y el análisis~~,~~ las siguientes ideas y conceptos:

- Pueden usarse dos tipos de clasificaciones para las figuras geométricas: jerárquicas y partitivas. (De Villiers, 1994)
- Ambos tipos de clasificaciones son correctas, pero la clasificación jerárquica tiene ventajas valorables desde el punto de vista de la funcionalidad de las matemáticas. (De Villiers, 1994)
- Cualquier concepto matemático evoca dos clases de conceptos en la mente del individuo: el concepto definición y el concepto imagen. (Vinner y Tall, 1981)
- Una fuente común de errores está relacionada con el uso de imágenes prototípicas y con la aplicación de juicios prototípicos (Hershkowitz, 1990).

Respecto a las concepciones, creencias y conocimientos de los maestros se usará la definición de concepción usada por Thompson (1992) para investigar y referirse a las concepciones de los maestros en torno a las matemáticas y su enseñanza, esto es: las creencias, conceptos, significados, reglas, imágenes mentales y periféricas consistentes o inconsistentes que los maestros tienen y utilizan.

Como ya se dijo, el diseño de los instrumentos de toma de datos y el taller que se llevó a cabo, se basaron en estos referentes teóricos y las situaciones hipotéticas que se plantean en algunos cuestionarios son situaciones reales reportadas por

Monaghan (2000) en un estudio con niños. Esto se mencionará y explicará con mayor detalle en el capítulo siguiente.

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA

3.1 Enfoque de la investigación

3.2 Descripción del pilotaje

3.3 Sujetos

3.4 Instrumentos

3.4.1 Instrumento definitivo

3.5 Descripción de la intervención

3.6 Recolección de datos

3.1 Enfoque de la investigación

Para esta investigación se empleó el método cualitativo, ya que éste se concibe como un proceso de búsqueda que interpreta la realidad en su contexto natural, tal y como sucede, intentando sacar sentido de, o interpretar, los fenómenos de acuerdo con los significados que tienen para las personas implicadas.

Rodríguez, Flores y García (1999:32) manifiestan que la naturaleza de la investigación cualitativa implica la utilización y recolección de una gran variedad de materiales como entrevistas, experiencia personal, historias de vida, observaciones, imágenes, y sonidos que describan la rutina y las situaciones problemáticas y los significados en la vida de las personas.

De acuerdo con Rodríguez (et al, 1999) una característica de la investigación cualitativa es que puede ser utilizada para analizar casos específicos dentro de un espacio y tiempo determinado. Por medio de un estudio de caso se exploran las características y circunstancias que influyen en un caso particular, para luego intentar ilustrar lo general.

Precisamente se utilizará este tipo de investigación porque nos ofrece técnicas especializadas para obtener respuestas de fondo acerca de las concepciones que los maestros de secundaria tienen con respecto a la construcción y clasificación de cuadriláteros.

El análisis cualitativo también nos permite comprender las actitudes, creencias, motivos y comportamientos del grupo de maestros que participaron en el taller planteado usando el software Cabri-géomètre.

3.2 Descripción del pilotaje

Para esta investigación se pretendía llevar a cabo un pilotaje con un taller inicial de doce horas y después de ello ajustar las actividades en tiempo y forma. Sin embargo surgieron algunas dificultades, entre las que describiremos las siguientes:

- Se ofreció el taller y a su vez se solicitó la sala de computación en el centro de maestros Soledad Anaya Solórzano, pero nos fue negada pues se tenía apartada para otra actividad, así que se pospuso para otro momento.
- Al darnos a conocer la fecha en la que se daría el taller, con anticipación se hizo propaganda en el centro de maestros, y también se llevó la información a dos escuelas secundarias donde se les proporcionó una invitación por escrito a los maestros en ambos turnos, este primer taller se había diseñado con duración de doce horas y el horario sugerido fue de las cuatro a las ocho de la noche, los días miércoles jueves y viernes. Desafortunadamente, no se presentó ningún maestro. Creemos que la falta de presencia se debió a que los profesores iban a presentar su examen de carrera magisterial.

Después se pidió permiso para presentar este mismo taller con duración de doce horas en el centro de maestros María Lavalle Urbina. Ahí se nos hizo la sugerencia de que el taller debería ser reducido a seis horas e impartido en dos días con permanencia de tres horas por día, esto debido a la experiencia que se tiene en ese centro de maestros en cuanto a la duración de estas actividades.

Al ajustar el taller a seis horas se le presentó a la maestra Lucía Moreno, directora del centro; ella, después de revisarlo, dio su autorización y programó el taller para que se impartiera tres horas un martes y tres horas el siguiente jueves de la misma semana. Después el centro realizó propaganda de nuestra actividad mediante carteles y llamó por teléfono a los maestros que regularmente asistían a cursos de matemáticas.

Aparentemente, hasta ese momento ya se tenían superadas las dificultades para impartir el taller, sin embargo, cabe mencionar que el día en que estaba programado el taller surgieron otros percances, entre ellos que en la primera sesión al centro de maestros le habían cortado la luz; por un momento se temió que la actividad no se llevaría a cabo por este nuevo contratiempo, pero gracias al interés que tenían los maestros en el taller le sugirieron al personal del centro que tomaran la luz del poste que estaba en la avenida, así que el maestro encargado de la sala de computación y otras personas de intendencia subieron al techo y mediante muchas maniobras pudieron conseguir la luz, ésta llegaba con poca intensidad pero afortunadamente era la suficiente para poder trabajar con las nueve computadoras que necesitábamos; así, a pesar de que fue retrasada la actividad pudimos llevar a cabo las fases del taller.

En la segunda sesión, la sala de computación estaba ocupada ya que para ese día se había programado un curso de carrera magisterial, sin embargo nos hicieron favor de prestarnos dos salones donde había Enciclomedia, por lo que podíamos utilizar las computadoras. En ellas tuvimos que cargar el programa de Cabri-Géomètre, así que nuestro grupo de seis maestros se dividió en dos partes: tres se fueron a un salón y los otros tres a otro, a cada profesor se le entregaron las fichas de la fase dos, ellos tomaban turnos para ocupar la computadora, ya que decidieron trabajar de forma individual; hacían las actividades en la computadora y contestaban las preguntas planteadas. Al final de la ficha 2.2, terminó el curso de carrera magisterial y se desocupó la sala de computación, así que nos trasladamos a esa sala, los maestros ya tenían resueltas las fichas 2.1 y la 2.2 al instalarnos para retomar la actividad dos compañeras explicaron las fichas.

Para soslayar la falta de piloteo, lo que podría ser una deficiencia del estudio, se utilizaron algunas actividades ya probadas en otros lugares y contextos. Además, los instrumentos fueron revisados una y otra vez por mi directora de tesis y, por último, tuvo que ser sometido a la revisión de la directora del centro de maestros en el que se llevó a cabo el taller y quien está en este campo de educación matemática.

3.3 Sujetos

Para esta investigación se planeó un taller dirigido a maestros de secundaria que dieran clase de matemáticas. Con estas características se presentaron nueve maestros en servicio, pero por las razones que ya se mencionaron, el taller sólo lo terminaron seis maestros, cuatro de ellos eran muy jóvenes y aparentaban tener menos de dos años de servicio, los otros dos maestros tenían más de 10 años de servicio. Cabe aclarar que en el presente trabajo se utilizan claves para identificar a los profesores, por ejemplo H para hombre, M para mujer y un número para distinguirlos fácilmente.

3.4 Instrumentos

El primer instrumento que se diseñó para realizar la investigación fue, como ya se mencionó antes, para un taller de doce horas. Se había planeado que fueran tres sesiones con duración de cuatro horas por día, en la primera sesión se tenía calculado explicar las barras, menús y ventanas del software Cabri- Géomètre, así como la exploración del mismo; también se haría mención de las reglas importantes con las que funciona Cabri, como son las jerarquías de dependencias y se abordaría parte de la fase uno en la cual esta incluido el cuestionario inicial que nos sería de gran utilidad para el análisis de resultados.

Para la segunda sesión se tenía planeado abordar desde la ficha 1.5 y toda la fase dos. En la última sesión se había proyectado presentar la fase tres. Se tenía ideado presentar diecisiete fichas a lo largo del taller. Como se ha mencionado esto no fue posible (este taller se presenta en el anexo 1).

En cuanto al segundo instrumento se trata de un taller de seis horas que fue él que se presentó y se aplicó en el Centro de Maestros “María Lavalle Urbina”, este será descrito en el siguiente apartado.

3.4.1 Instrumento definitivo

El instrumento definitivo surge del taller de doce horas; para el nuevo taller se conservó la primera parte que era el cuestionario pero ahora se le llamó fase cero, con la finalidad de que los maestros lo contestaran y lo entregaran, así evitaríamos que alguno modificara sus respuestas. El cambiar el nombre de cuestionario por fase cero, presentaba la ventaja de que los maestros se sintieran en confianza dando sus respuestas. También se conservó toda la explicación y exploración de Cabri-géomètre.

Para la fase uno de este taller se eliminaron dos fichas, la 1.3.1 sobre perpendicularidad ya que el tema de perpendiculares se abordaba en la ficha 1.3 (sólo que en la ficha 1.3.1 se proponía mayor grado de dificultad) y la ficha 1.5 de desplazamiento, ya que se pensó que esta podía estar englobada en las dos fichas siguientes, que proponían reproducir una figura. La fase dos y la fase tres quedaron comprendidas en una sola.

En la fase dos, se había incluido la construcción de un paralelogramo y en la fase tres se retomaba la construcción de otro paralelogramo, por lo que se decidió que de estas dos se integrara una sola. En la fase tres se pretendía que se trabajara en dos fichas sobre trapecios, se decidió que se recuperaran las dos y formar una ficha para la fase dos de este nuevo taller. Al final quedaron trece fichas. Las fases del taller se presentan en el siguiente capítulo.

3.5 Descripción de la intervención

Al iniciar el taller me presenté con los profesores como la conductora del mismo, les mencioné el nombre del taller así como su objetivo, también les dije que el taller era una idea de cómo abordar un tema de geometría usando Cabri-géomètre y que en este caso se trataba de cuadriláteros.

Después se dio una breve introducción sobre el origen del software y se continuó mostrando y explicando el uso de las barras de herramientas, los menús y ventanas. También se mencionó que con Cabri podemos formar figuras que conservan sus características y ver la diferencia cuando se forman dibujos, además de que Cabri seguía unas reglas de dependencia que durante esta primera parte irían descubriendo.

A continuación de esto se les dijo que el taller estaba integrado por tres fases: cero, uno y dos. Al mismo tiempo se les entregó la fase cero y se les pidió que la contestaran; ellos decidieron hacerlo de manera individual.

Cada vez que alguno terminaba, entregaba la fase cero. Cuando todos ya habían terminado se les pidió permiso para grabar en video las dos partes del taller. Se les explicó que esto era con la finalidad de mejorarlo y todos los maestros aceptaron.

Así que continuamos con la fase uno. Se entregaron las fichas de esta parte y se les pidió que escribieran su nombre; en seguida se les dijo que todos haríamos la primera ficha al mismo tiempo y cualquier duda que surgiera la podían externar, así que la conductora leyó en voz alta la ficha 1.1 al mismo tiempo que caminaba cerca de los participantes para que todos fueran siguiendo las acciones. Cuando se presentaban las preguntas se les pedía que respondieran, la conductora observaba y veía cuándo terminaban, así que pedía que alguien la volviera a hacer o que la explicara en su computadora para que todos nos acercáramos y revisáramos cómo se habían llevado a cabo las acciones de la ficha. En general, los maestros se mostraban un poco indecisos, por lo que la conductora se dirigía a una persona y mostraba el procedimiento que había seguido.

La ficha 2.2 y 2.3 fueron abordadas de la misma forma, es decir, se leyeron en voz alta, se realizaban de manera individual las acciones, se contestaban las preguntas formuladas, y cuando la mayoría terminaba, algún maestro volvía a hacerla en su lugar y explicaba para todos.

Cabe mencionar que los profesores no habían tenido experiencia con el software, así que les costaba mucho usar la computadora, mover el mouse en la pantalla y seguir las acciones que se pedían en la ficha. Cuando esto sucedía, se les decía que no se desesperaran y que si tenían dudas o dificultades trabajaran en parejas, a pesar de ello cada uno se quedó en su lugar y con su computadora.

De la ficha 2.4 en adelante los maestros las trabajaron de manera individual, y cuando la mayoría terminaba se pedía a algún profesor que de favor explicara para todos lo que había hecho. En todas las fichas, cuando los profesores tenían alguna dificultad o pregunta de Cabri no dudaban y se acercaban a la conductora del taller.

3.6 Recolección de datos

Con el taller tuvimos la oportunidad de documentar las creencias y concepciones de los maestros a partir de los comentarios que vertieron en los cuestionarios que se les proporcionaron. También fue de gran ayuda video-grabar las sesiones del taller, pues de la captura de las grabaciones también se obtuvieron datos relevantes para el desarrollo de esta tesis (ver anexo dos).

CAPÍTULO IV

PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE LOS DATOS

4.1 Presentación y análisis de los datos

En este capítulo se dan a conocer los resultados obtenidos durante la investigación. Para la presentación se consideran por un lado las respuestas dadas por los maestros a los cuestionarios escritos y por el otro las intervenciones que se dieron durante el desarrollo del taller propuesto. Después se explica cómo fueron analizados y se hacen comentarios.

4.2 Descripción de las categorías de análisis

Para el análisis de las respuestas a las preguntas del cuestionario, se crearon categorías tomadas o derivadas, principalmente, de los trabajos de Hershkowitz (1990) y De Villiers (1994)

Para cada pregunta del cuestionario de la fase cero y dos, se mencionan y describen las categorías de análisis usadas para clasificar las respuestas que los maestros dieron, las respuestas se presentan en tablas para identificar fácilmente la categoría en la que podrían estar ubicadas.

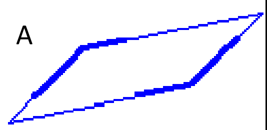
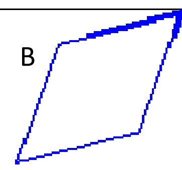
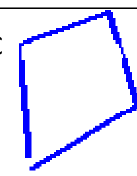
4.3 Fase cero

En la primera pregunta del cuestionario se mostró a los integrantes del curso tres figuras y se les pidió que escribieran el nombre de cada una.

Las respuestas que pudieron haber escrito son las siguientes:
Figura A: cuadrilátero, paralelogramo o romboide.
Figura B: cuadrilátero, paralelogramo o rombo.
Figura C: cuadrilátero, trapezoide, romboide o papalote.

En el caso de la figura A y la figura C mencionamos que a las dos las pueden conocer como romboide, debido a que en internet a estas figuras indistintamente las llaman de esa manera. También en los materiales para la educación primaria de la SEP, al paralelogramo oblicuo le llaman romboide y lo distinguen del rectángulo.

En seguida se presenta el concentrado de respuestas dadas por los profesores en la actividad preliminar correspondiente a la fase cero. Se han subrayado las respuestas que pueden considerarse incorrectas.

Escriba los nombres con los que usted conoce a las siguientes figuras	A 	B 	C 
H1	Romboide	Rombo	Trapezoide
H2	Cuadrilátero	Rombo	Rombo
H3	Romboide	Rombo	Cuadrilátero irregular
M1	Paralelogramo	Paralelogramo	Rombo
M2	Romboide	Rombo	Papalote Cuadrilátero
M3	Romboide	Rombo	Trapecio escaleno
M4	Rectángulo	Rombo	Cuadrilátero
M5	Cuadrilátero paralelogramo rombo	Cuadrilátero paralelogramo ó rombo	Cuadrilátero ó rombo
M6	Paralelogramo	Rombo	Romboide

En seguida se muestra el análisis de los datos, la referencia a los maestros será en base a las claves propuestas.

H1, H3, M2, M3 y M6 no tuvieron problemas y mencionaron alguno de los nombres esperados para las figuras.

Por otra parte:

H2 a la figura C la llama rombo.

M1 a la figura C la llama rombo.

M4 a la figura A la llama rectángulo.

M5 a las figuras A y B las reconoce como cuadriláteros, paralelogramos y rombos, a la figura C la conoce igual que a las anteriores sólo que a esta ya no le llama paralelogramo.

Lo anterior conduce a pensar que estos maestros confunden las figuras y desconocen las características relevantes (Hershkowitz, 1990) de algunos cuadriláteros.

En el caso de estos maestros se puede especular que la adquisición de los conceptos geométricos de las figuras básicas como rectángulo, rombo y, quizá también, el paralelogramo no ha sido el resultado en base a las características lógico analíticas.

Se muestra una carencia de completitud de estos conceptos, pues se denota ausencia de conocimientos de los elementos que definirían la diferencia entre las figuras. Puede ser que los procesos visuales que utilizan para la construcción de sus conceptos básicos, los basen en ejemplos prototípicos que se derivan de su pensamiento visual por sí mismo (Hershkowitz, 1990).

Para situar a un sujeto de acuerdo con los niveles de Van Hiele se requiere de instrumentos más elaborados, sin embargo se podría decir que las respuestas dadas a estas preguntas no reflejan conocimientos que puedan ubicarse más allá del nivel cero porque se observa que, al menos aparentemente, los maestros reconocen a estas figuras basándose en su apariencia física, como un todo.

Los maestros contestaron acertadamente en la figura B donde se trataba de un rombo, a pesar de que esta figura no fue presentada en la posición que habitualmente aparece en los libros de texto y que probablemente más se utiliza en la enseñanza (ver por ejemplo; Balderas, 2005; Barrón, 2005; Sandoval, 2005).

Sin embargo, a pesar de que todos identificaron el nombre de la figura, algunos maestros escribieron esta respuesta sin identificar plenamente las características de su forma, lo cual coincide con resultados obtenidos por Arceo (2002); esto dicho en base a que H2, M1 y M5 llamaron a la figura C rombo, pasando por alto el atributo relevante del rombo que es tener cuatro lados iguales.

En la siguiente parte de la fase cero, que va de la pregunta dos a la cinco, se propusieron situaciones hipotéticas donde los profesores tenían que hacer un comentario de acuerdo al contexto. La investigación de Monaghan (2000) sirvió de referente para el planteamiento de las preguntas, pues en su investigación cuestiona a los alumnos sobre las diferencias que encuentran en parejas de conjuntos de figuras. Por ejemplo, se hacían interrogantes como ¿qué diferencia encuentras entre un paralelogramo y el rectángulo?

Además, para clasificar las respuestas de esta parte del cuestionario se utilizaron algunas categorías que surgen del marco teórico y del análisis del texto en cuestión.

Estas categorías son:

1. Clasificación partitiva (C.P). Se agrupan en esta categoría respuestas que ponen en evidencia que el maestro está utilizando una clasificación partitiva (De Villiers, 1994 y Hershkowitz ,1987).

2. Clasificación jerárquica (C.J). Se agrupan en esta categoría respuestas que ponen en evidencia que el maestro está utilizando una clasificación jerárquica (De Villiers, 1994 y Hershkowitz, 1987).

3. Casos especiales (C.E). Esta categoría es vista como una sub-categoría de la clasificación jerárquica. Por ejemplo, en esta sub-categoría se encuentran

maestros que explican que los cuadrados son casos especiales del conjunto de los rectángulos, de los rombos, etc.

4. Sin matemáticas (S.M). Se agrupan en esta categoría respuestas donde no se pueden recuperar concepciones matemáticas sobre los contenidos matemáticos involucrados. En muchos casos son enunciados de tipo didáctico, preguntas que ayuden al alumno, etc.

5. Otras (O). Para respuestas que no pertenecen a ninguna de las categorías anteriores.

A continuación se presentan las respuestas dadas por los integrantes a las preguntas 2, 3, 4 y 5, así mismo se escribe la clave propuesta para cada categoría.

2.- Ana es profesora de secundaria, le preguntó a un alumno: ¿cuál es la diferencia entre un cuadrado y un rectángulo? El alumno respondió: “La diferencia es que el cuadrado tiene cuatro ángulos rectos y en un rectángulo todos los lados opuestos son iguales”. En el lugar de Ana, usted ¿qué le diría al alumno?		
H1	SM	Le preguntaría ¿qué otras características observas en las figuras?
H2	C.J	Estás en lo cierto en parte, pues en un cuadrado también los lados opuestos son iguales.
H3	C.P	La mejor forma de diferenciarlos es por sus lados, el cuadrado tiene todos sus lados iguales y el rectángulo sólo dos pares iguales, pero diferentes entre sí.
M1	C.J	Explicaría la respuesta dada por el alumno en el pizarrón para darle a entender que ambos tienen esas diferencias, y que así él busque realmente una diferencia.
M2	C.P	Que el cuadrado tiene todos sus lados iguales y el rectángulo dos pares de lados diferentes.
M3	C.P	El tamaño de sus lados. El cuadrado tiene sus lados iguales y el rectángulo dos pares de lados; un par largo y uno corto.
M4	C.J	Que tanto el cuadrado como el rectángulo tienen ángulos rectos, así que la diferencia no radicaría ahí. Además, el cuadrado es un rectángulo pero un rectángulo no puede ser un cuadrado.
M5	C.E	Un cuadrado es un caso especial del rectángulo, la única diferencia es que las diagonales del cuadrado al intersecarse forman ángulos rectos y la de los rectángulos forman dos agudos y dos obtusos, además de que el cuadrado tiene sus cuatro lados iguales. “Todo cuadrado es un rectángulo pero no todo rectángulo es un cuadrado”.
M6	O	Le diría que midiera los ángulos del rectángulo, así se daría cuenta de su error y le pediría otra diferencia que sí sea correcta.

3.- Después Ana le preguntó: ¿Cuál es la diferencia entre un rectángulo y un paralelogramo? El alumno contestó: "Un paralelogramo tiene dos lados cortos y dos lados largos también, pero los lados cortos están como diagonales". ¿Usted qué le diría al alumno?		
H1	S.M	Le mostraría diversas figuras y le preguntaría por las características de cada una para que observara las diferencias.
H2	C.P	Es cierto, pero una característica mayor es la diferencia de los ángulos entre una figura y otra.
H3	C.J	En este caso es necesario enfatizar que un paralelogramo puede tener varias figuras con ángulos diferentes al recto, y el rectángulo tiene todos sus ángulos rectos.
M1	S.M	Creo que lo mismo, pero no sólo se lo diría sino se lo ejemplificaría.
M2	C.P	Que el paralelogramo sólo tiene parejas de lados paralelos entre sí y el rectángulo además tiene ángulos rectos.
M3	C.P	El ángulo en que se cortan los lados del rectángulo es recto y en el romboide son un par de ángulos agudos opuestos y un par de ángulos obtusos opuestos.
M4	C.J	Que un paralelogramo y un rectángulo son iguales puesto que sus lados opuestos son paralelos y que no importa mucho que estén inclinados.
M5	C.E	Que el rectángulo es un paralelogramo por ser sus lados opuestos paralelos sólo que los lados del rectángulo en sus vértices forma ángulos rectos, o sea que el rectángulo es un caso especial del paralelogramo. "Todo rectángulo es un paralelogramo pero no todos los paralelogramos son rectángulos"
M6	S.M	¿Entonces cómo son los ángulos? ¿Cuánto deben de medir en el rectángulo?

4. - Cuando Ana le preguntó la diferencia entre un cuadrado y un rombo. El alumno contestó: "sólo es la manera en que están colocados". ¿Usted qué le diría al alumno?		
H1	S.M	Nuevamente le preguntaría por las características que observa en ambas figuras.
H2	S.M	Puede ser pero obsérvalos bien.
H3	C.P	Tanto el rombo como el cuadrado tienen sus lados iguales pero sus ángulos no, el cuadrado tiene sólo ángulos rectos y el rombo no tiene ninguno recto.
M1	O	Que está bien, pero el rombo no siempre va a tener todos sus lados iguales.
M2	C.P	Que los ángulos del cuadrado son iguales entre sí y los rombos sólo los ángulos opuestos son iguales.
M3	C.P	La diferencia se encuentra en los ángulos que forman sus vértices.
M4	C.P	Que el rombo es un cuadrado siempre y cuando tenga la misma longitud de sus lados y que sus diagonales tengan la misma longitud.
M5	C.E	Todo cuadrado es un rombo pero no todo rombo es un cuadrado", la diferencia radica en que los ángulos de un cuadrado, tanto del cruce de sus lados como el de sus diagonales son rectos y sus lados iguales y el del rombo pueden ser o no ser iguales.
M6	S.M	Mide los ángulos ¿En verdad sólo cambia la manera de colocarlos?

5.- Cuando Ana le pregunto cuál es la diferencia entre un trapecio y un paralelogramo El alumno contestó: "El trapecio es un paralelogramo". ¿Usted qué le diría al alumno?		
H1	S.M	Compararíamos ambas figuras y se definirían las características.
H2	O	Estás en lo correcto.
H3	C.P	No lo es, pues un trapecio puede tener sólo un par de lados paralelos pero el otro no, por la condición de paralelogramo, no lo cumple.
M1	S.M C.P	De nuevo dibujaría ambas figuras para que el alumno notase las diferencias y las similitudes. No sería un paralelogramo.
M2	C.P	Que no, es un cuadrilátero pero no es un paralelogramo por que tiene una pareja de lados que no son paralelos y por ello no es un paralelogramo.
M3	C.P	El paralelogramo tiene dos pares de lados paralelos y el trapecio sólo un par.
M4	C.P	Que podría estar confundido el paralelogramo tiene dos pares de lados paralelos.
M5	C.J	Que esta en lo cierto pero sólo es un par de lados los cuales son paralelos entre sí el otro puede ser o no serlo.
M6	S.M	Vamos a revisar el concepto de paralelogramo ¿Qué es un paralelogramo?

En seguida se hace un concentrado en el que se presenta el número de la pregunta y la clasificación en la que queda ubicada la respuesta dada por cada integrante del taller.

Pregunta	Clasificación partitiva	Clasificación jerárquica	Casos especiales	Sin matemáticas	Otras
2	H3, M2, M3	H2, M1, M4,	M5	H1	M6
3	H2, M2, M3	H3, M4	M5	H1, M1, M6	
4	H3, M2, M3, M4		M5	H1, H2, M6	M1
5	H3, M1, M2, M3, M4	M5		H1, M1, M6	H2

A continuación se presenta el análisis de los datos tomando en cuenta las respuestas dadas por los maestros; nos referiremos a ellos mencionando la clave que les fue asignada:

En la pregunta numero dos:

H1 se ubicó en la categoría sin matemáticas.

H2, M1, M4, y M5 son maestros que usaron una clasificación jerárquica, de acuerdo con sus respuestas dieron a entender que el cuadrado es un caso especial del rectángulo.

H3, M2, y M3 se ubican dentro de una clasificación partitiva, estos maestros perciben la diferencia entre el cuadrado y el rectángulo de una manera similar; se refieren a la diferencia en el tamaño de sus lados. En las respuestas de estos tres maestros se puede ver la rigidez de su visión de rectángulo como un oblongo (más largo que ancho); podemos decir que la conceptualización de forma que tienen los maestros es gobernada por las representaciones estándar que se encuentran generalmente en los libros de texto (Monaghan 1993).

M6 se ubicó en la categoría de “otras”, ya que con su respuesta nos permite ver que él piensa que el cuadrado y el rectángulo tienen ángulos rectos, así también con su respuesta no manifiesta ningún tipo de clasificación.

En la pregunta numero tres.

H1, M1 y M6 se ubicaron en la categoría sin matemáticas.

H2, M2 y M3 se ubicaron en la categoría de clasificación partitiva. La percepción que dan a conocer radica en los ángulos y a pesar de que a M1 se le ubique en la categoría sin matemáticas, su respuesta sugiere que ella está de acuerdo con el niño en cuanto a que un rectángulo no es paralelogramo porque dos de sus lados están “inclinados”. Sobre estos casos, Triadafillidis (1995, citado por Monaghan 1993) dice que la relación entre diagrama y definición surge de lo persuasivo de los modelos visuales en el proceso de aprendizaje. A pesar de que los diagramas generalizados no existen para una figura dada, hay una tendencia a poner atención en ciertos prototipos para un concepto geométrico. Es decir, los maestros parecen fijarse en un prototipo de paralelogramo, que es aquel cuyos ángulos no son rectos. Así, derivando del prototipo la definición, le atribuyen a esta figura más atributos, como es que la medida de los ángulos (Herskowitz, 1990) no sea de 90°. Con esta definición excluyente ellos no incluyen a los rectángulos dentro de los paralelogramos.

H3, M4 y M5 hicieron una clasificación jerárquica, se percataron de que los rectángulos son paralelogramos. La maestra M4, en esta pregunta, menciona que el paralelogramo y el rectángulo son iguales; quizá ella quiso decir que el rectángulo es un caso especial del paralelogramo, pero sólo afirma que “son iguales”, esto nos da pauta a pensar en la dificultad que se presenta para elaborar definiciones de conceptos geométricos sencillos; ella muestra que puede hacer clasificaciones jerárquicas. Sin embargo, su construcción del concepto imagen de las figuras sólo parece tener apariencia visual y no procesos analíticos. Esto se reafirma si se hace un seguimiento de sus respuestas; recordemos que en la primera parte de la fase cero, a la figura A (un paralelogramo oblicuo o romboide) lo llama rectángulo, respuesta matemáticamente incorrecta que surge, quizá, de su idea correcta: los rectángulos y los paralelogramos comparten ambos la característica de tener dos pares de lados paralelos; pero ella no acabar de apropiarse de la lógica y de las definiciones que se derivan de las clasificaciones jerárquicas, confunde el hecho de que los rectángulos son un caso especial de paralelogramos, y piensa lo contrario: que los paralelogramos (oblicuos) son un caso especial de rectángulo.

En la pregunta cuatro.

H1, H2 y M6 se ubicaron en la categoría sin matemáticas.

H3, M2, M3 y M4 utilizaron clasificaciones partitivas. El maestro H3, a pesar de que menciona que ambas figuras tienen sus lados iguales, hace más larga la lista de atributos de los rombos, para excluir a los cuadrados de ese conjunto. Así, dice que los rombos no tienen ángulos rectos. Los otros maestros dan por hecho que los lados son iguales, sin embargo agregan la condición de los ángulos para separar a los cuadrados de los rombos.

M1 menciona que la respuesta del alumno es correcta diciendo que la diferencia entre un rombo y un cuadrado es sólo la manera en que están colocados; además agrega que el rombo no siempre va a tener todos sus lados iguales, lo cual contradice la definición misma de rombo. Parece que esta maestra toma en cuenta sólo el ejemplo prototípico (Hershkowitz, 1990) de los cuadrados y los rombos. Se puede observar que no está tomando en cuenta las características especiales de cada figura, ya que menciona que el rombo no siempre tiene lados iguales, situación matemáticamente incorrecta pues todos los rombos tienen lados iguales.

M5 fue la única que en esta pregunta mostró una clasificación jerárquica diciendo que todo cuadrado es un rombo, además mencionó algunas de las características de las figuras. En las preguntas anteriores esta maestra da explicaciones que revelan clasificaciones jerárquicas; sin embargo, haciendo un seguimiento de sus respuestas pudimos ver que en la fase cero a todas las figuras las llamó rombos, lo que nos podría indicar que sabe responder a los cuestionamientos, sin embargo muestra que su conocimiento es poco funcional (Arceo 2002).

En la pregunta cinco.

H1, M1 y M6, se ubicaron en la categoría sin matemáticas.

H3, M1 y M6, hicieron clasificaciones partitivas, diciendo acertadamente que el trapecio no es un paralelogramo.

M5 da una respuesta cercana a la que podría derivarse de una clasificación jerárquica, pero no acaba de explicar que el paralelogramo es, entonces, un caso especial de trapecio. Su respuesta no es lo suficientemente clara al respecto, a pesar de que en las preguntas anteriores sus explicaciones eran contundentes. Aquí, parece referirse al trapecio como aquel que tiene al menos un par de lados paralelos, pero no menciona que el paralelogramo es un caso especial de trapecio.

Sin embargo, cabe destacar que en este caso la pregunta estuvo planteada inversamente, es decir, se menciona que el caso general es un subconjunto del caso particular (los trapecios siempre son paralelogramos) con la finalidad de analizar cómo respondían los maestros, ya que usando una clasificación jerárquica se puede decir que todos los paralelogramos son trapecios. Tal vez esto llevó al maestro H2 a confundirse, dando por resultado que expresara que el alumno estaba en lo correcto, diciendo que el trapecio es un paralelogramo.

Cabe hacer el comentario que el maestro con clave H1 en todas las respuestas de esta parte de la fase cero fue ubicado en la categoría sin matemáticas, debido a que en sus respuestas muestra recursos didácticos que usaría para explicarle al alumno (se puede ver que no trata de dar la respuesta correcta, sino de guiar con el fin de que el alumno construya su conocimiento). Aparentemente se podría pensar que por su falta de conocimientos estaría evadiendo la pregunta, sin embargo en el desarrollo del taller él se mostró participativo y en todas las fichas aportó ideas.

Lo anterior se puede constatar por ejemplo con un fragmento de la transcripción de la filmación de la ficha 1.2, donde se tenía que construir el simétrico de un punto cualquiera, y 1.3 con el trazo de perpendiculares (ver anexo 2).

Ficha 1.2. Titulo: Simétrico de un punto cualquiera.

C: ¿Cómo trazó el simétrico?

H1: Por circunferencia finalmente esta el punto P, bueno esta la recta R, el punto P, lo que hice fue marcar dos puntos sobre la recta, tomé, bueno, en este caso tomé A como centro de la circunferencia, tomé de radio AP tracé la circunferencia, tomé como radio B, digo, como centro B, y radio BP tracé la circunferencia y el punto de intersección, eh…, es lo que me da el punto simétrico (Nota: se refiere a la intersección de ambas circunferencias…)

Ficha 1.3. Titulo: Perpendiculares.

C: ¿Nos explica cómo trazó las perpendiculares?

H1: Mi procedimiento es semejante al anterior del simétrico, igual tracé la recta R, el punto C, marqué dos puntos sobre la recta el punto F y el punto G. Con centro en F y radio FC tracé una circunferencia; con centro en G y radio GC marqué otra circunferencia, tracé el punto de intersección que llamé C’ y uní esos dos puntos de C con C’. El punto de intersección finalmente es H y el segmento en este caso se trata de la perpendicular […]

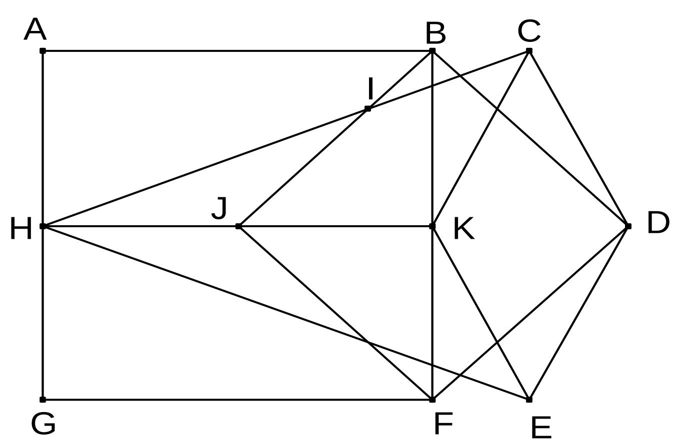
La otra parte del cuestionario de la fase cero consistió en que los integrantes del curso identificaran algunas figuras que estaban contenidas dentro de otra.

Monaghan (2000) menciona que con este ejercicio se puede ver cómo los alumnos tienen una idea de cómo se ven las formas y navegando en su mapa mental pueden descubrir las figuras que se les solicita.

En el primer cuestionamiento se pedía que identificaran rectángulos. Los rectángulos que se pueden identificar en la figura son: ABFG, ABKH, HKFG, BDFJ.

Las respuestas dadas por los maestros se presentan en seguida, así también algunas respuestas están subrayadas para denotar que aunque los maestros sí identifican la figura la manera de nombrarlos es errónea:

De la siguiente figura por favor anote lo que se pide:



¿Qué puntos describen un rectángulo? ____________________

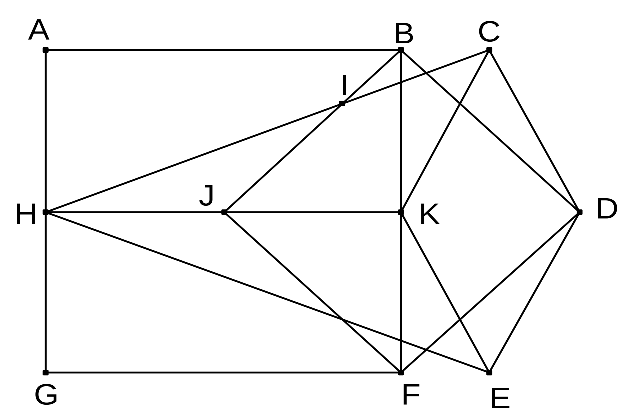
H1	ABFG, ABKH, HKFG, BDFJ
H2	ABKH y KHGF
H3	ABKH y HKGF
M1	HKFG
M2	ABHK y HKFG
M3	ABKH y HKGF
M4	ABHK, HKGF, ABGF y BDJF
M5	ABKH, HKFG, ABFG, BDFJ
M6	ABHK

En la siguiente tabla se muestra el total de rectángulos identificados por los maestros.

Integrantes del taller	Rectángulos detectados
M1, M6	1
H2, H3, M2, M3	2
	3
H1, M4, M5	4

En la siguiente pregunta se pedía que identificaran cuadrados. La figura muestra dos cuadrados: ABFG y BDFJ. En la siguiente tabla se muestran las respuestas de los maestros.

De la siguiente figura por favor anote lo que se pide:



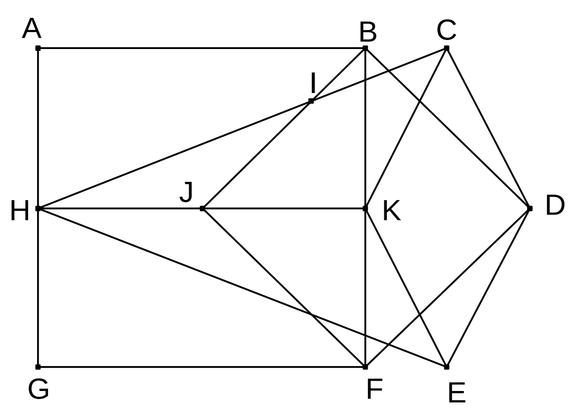
¿Qué puntos describen un cuadrado?______________________

H1	ABFG y BDFJ
H2	ABFG y BDJF
H3	ABFG y BDFJ
M1	JFDB
M2	ABGF y BDFJ
M3	BDEJ y ABFG
M4	ABGF y BDJF
M5	BDFJ y ABFG
M6	BJFD

En las respuestas, dos integrantes no identificaron la figura ABFG quizá porque el trazo no parece exacto para ser cuadrado, pero en general se puede decir que todos identificaron esta figura fácilmente.

Para la siguiente pregunta se pedía que identificaran rombos, éstos eran tres: BJFD, CKED y ABFG. En seguida se expone la tabla de respuestas dadas por los maestros. (Las respuestas que se consideran matemáticamente incorrectas se han subrayado)

De la siguiente figura por favor anote lo que se pide:



¿Qué puntos describen un rombo?________________________

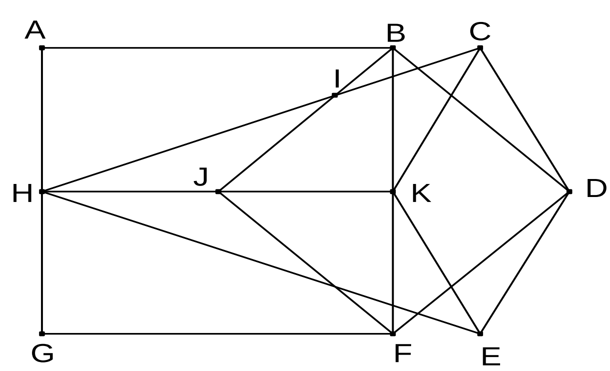
H1	ABFG, CDEK, BDFJ
H2	JBDF y CKED
H3	CDEK
M1	BJED
M2	CDEK, BDFJ
M3	CDEK
M4	ABGF, BDJF y CDKE.
M5	ABFG, BDFJ, CDEK y ICKJ
M6	HKDF

En el siguiente cuadro se muestra el número de rombos que fueron identificados por cada maestro.

Integrantes	Rombos detectados
M1, M6	0
H3, M3, M4	1
H2, M2	2
H1, M5	3

En la pregunta siguiente se pedía que identificaran trapecios, se esperaba que los integrantes del curso mencionaran dos trapecios: ABJH, HJFG y, siguiendo una clasificación jerárquica, también se esperaba que nombraran los rombos, cuadrados y rectángulos ya que todos los paralelogramos son trapecios. Según esto debieron haber mencionado las siguientes figuras: ABJH, HJFG, ABFG, ABKH, HKFG, CDEK, BJFD, CKED.

De la siguiente figura por favor anote lo que se pide:



¿Qué puntos describen un trapecio?_______________________

H1	ABJH, HJFG
H2	CKED
H3	HJFG
M1	KCDE
M2	ABJH; HJFG
M3	---
M4	CDKE
M5	CDEK
M6	HJFG

En seguida se presentan los trapecios identificados por los integrantes del taller.

No. de trapecios identificados.	Integrante
0	M3, H2, M4
1	H3 y M6
2	H1

En la siguiente pregunta se pidió que encontraran otros cuadriláteros, las respuestas dadas se muestran a continuación:

¿Qué otros cuadriláteros encuentra en la figura? Escriba sus nombres geométricos y las letras que los forman.	
H1	--
H2	--
H3	ABJH Trapecio irregular HCDE Romboide irregular
M1	JKF Triángulo acutángulo. HJI Triángulo obtusángulo.
M2	CDEH Cuadrilátero. CDEH Papalote
M3	CKEH Trapezoide. CDEH Trapezoide.
M4	--
M5	CDEK Romboide.
M6	HCKE Trapezoide simétrico cóncavo. JICK Trapezoide.

De acuerdo con las respuestas dadas se presenta la siguiente clasificación.

Cuadriláteros encontrados	Integrantes
Ninguno.	H1, H2, H4
Figura que no es un cuadrilátero.	M1
Papalote.	H3, M2, M3, M6
Cuadrilátero cóncavo.	M3, M6
Cuadrilátero irregular.	M6

En seguida haremos el análisis de los datos de esta segunda parte de la fase cero, tomando en cuenta las respuestas.

Todos los maestros reconocieron a los cuadrados, aunque uno de ellos no estuviera expuesto en una posición prototípica, lo que indica que tienen bien conocidas las características de esta figura geométrica.

Siguiendo las respuestas de los maestros, en la primera parte de la fase cero H2, M1 y M6 usaron una clasificación jerárquica cuando se les cuestionó sobre el cuadrado y el rectángulo; sin embargo, en esta segunda parte no mencionaron al cuadrado como rectángulo.

En cambio, el maestro con clave H1, cuyas concepciones no habíamos podido identificar por haber quedado en la categoría “sin matemáticas”, aquí reconoce a los cuadrados como rectángulos, lo que ratifica que en las preguntas anteriores sus respuestas se deben a que se centra en la parte didáctica de la situación hipotética que se le planteaba.

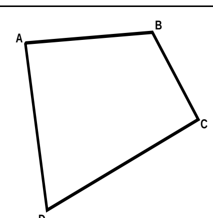
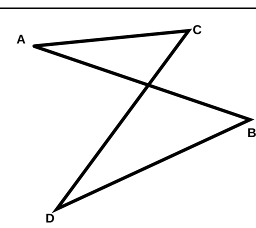
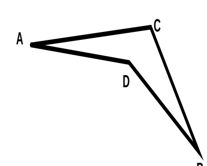
Los maestros H2, M4 y M5 mencionaron un rombo como trapecio, lo cual es correcto y ratifica el perfil de estos maestros, puesto en evidencia en otras preguntas, como maestros que usan la clasificación jerárquica.

El maestro H3 identifica un trapecio irregular cuando se le pide que mencione otros cuadriláteros, no lo reconoció antes pero después lo menciona.

La maestra M5, cuando se le pide que identifique otros cuadriláteros nombra una figura como romboide, esta misma figura ya la había identificado como rombo. Siguiendo las respuestas de la maestra y, como ya se ha comentado, se puede ver que ella tiene confusión en cuanto al concepto definición de rombo.

En la última pregunta de la fase cero se les presentaron tres cuadriláteros, en seguida se presentan las respuestas que dieron:

<table>
<tr><td>La maestra Luz dijo que todas las siguientes figuras son cuadriláteros.

¿Usted qué opina?</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>H1</td><td colspan="3">Que no, la figura dos y la tres no son cuadriláteros</td></tr>
<tr><td>H2</td><td colspan="3">La figura tres no lo es, por el número de lados que posee.</td></tr>
<tr><td>H3</td><td colspan="3">No, sólo dos, la figura donde se cruzan los segmentos a los lados no lo es (señala la segunda)</td></tr>
<tr><td>M1</td><td colspan="3">Si, pero deformados dos lados.</td></tr>
<tr><td>M2</td><td colspan="3">Sólo hay una que no es cuadrilátero son dos triángulos (señala la segunda)</td></tr>
<tr><td>M3</td><td colspan="3">No la figura (señala la segunda) no es un cuadrilátero, tiene 4 líneas pero</td></tr>
</table>

	2 se intersecan originando 2 figuras triangulares.
M4	Que tiene razón puesto que un cuadrilátero tiene 4 lados y puede ser una figura regular o irregular.
M5	No, solamente las que están encerradas por tener cuatro lados, la otra no (el sujeto encierra la primera y la tercera)
M6	No, sólo dos son, la otra no es (tacha la segunda).

De acuerdo a las respuestas dadas se hace la siguiente clasificación:

Maestros que identifican a las figuras como cuadriláteros:		
Figura 1	Figura 2	Figura 3
H1, H2, H3, M1, M2, M3, M4, M5, M6	H2, M1, M4	H3, M1, M2, M3, M4, M5, M6

La siguiente tabla muestra el número de cuadriláteros que identificaron los maestros.

No. de cuadriláteros	Integrantes
1	H1
2	H2, H3, M2, M3, M5, M6
3	M1, M4,

De acuerdo con lo anterior nos podemos dar cuenta que todos pudieron identificar como cuadrilátero la primera figura. En la figura dos, a pesar de que estaban marcados los vértices del cuadrilátero, algunos se mostraron desconcertados, como la maestra con clave M2 quien mencionó que se formaban dos triángulos. La figura tres también tiene marcados los vértices; sin embargo, no la vieron como cuadrilátero e incluso un integrante del taller mencionó que no era un cuadrilátero por el número de lados que poseía.

En este caso podemos conjeturar que todos los maestros toman un ejemplo prototípico de cuadrilátero como lo es la figura uno, ésta es usada como marco de referencia de cuadrilátero y, basando sus juicios en los atributos propios de ella, tratan de imponerlos a otros ejemplos del concepto, por lo que la mayoría puede decir que la figura tres también es un cuadrilátero (basándose en el número de lados). Sin embargo el número de lados ya no es ejemplo (o al menos causa confusión el que en la figura dos lados se crucen) para la figura dos. Por lo que al no encajar, ellos no aceptan a la figura tres como ejemplo del concepto de cuadrilátero que en este caso era la figura uno. Esto nos recuerda el juicio prototípico tipo 2 de Vinner y Hershkowitz (1983, citados por Hershkowitz, 1990).

4.4 Fase uno

El objetivo General de la fase fue que los participantes adquirieran experiencia con Cabri conociendo la esencia misma del software (una figura consiste de relaciones y jerarquía de dependencias), y que fueran introducidos a la restricción de robustez de una figura.

En seguida se presentan las seis fichas y en ellas tablas de las respuestas vertidas por los maestros, también se presentan comentarios acerca de ellas.

Ficha 1.1 Título: Rectas y segmentos.

El objetivo específico de esta ficha era la conservación de una propiedad por desplazamiento, punto de intersección, punto base. Nombrar un punto. En las acciones se pedía que el participante del taller realizara lo siguiente:

a) Construya un segmento cualquiera AB y una recta que contenga a este segmento, llámela r.
b) Determine un punto sobre la recta AB.
c) Dejando el botón del mouse apretado desplace el mouse sobre "este segmento" y suéltelo. Nombre P al punto creado sobre el segmento AB.
d) Ubique un punto M sobre la recta r

Así mismo se daba la siguiente indicación: Desplace el punto M. ¿Por dónde puede desplazarse?

H1	Por toda la recta r
H2	Sobre la recta r
H3	Se desplaza solo sobre la recta r
M1	Sobre toda la recta
M2	Por la recta r
M3	Sobre la recta
M4	Por la recta r
M5	Sobre la recta r
M6	Por la recta se desplaza

La segunda pregunta para esta Ficha 1.1 era: Desplace el punto P. ¿Por dónde puede desplazarse?

H1	Por el segmento AB
H2	Sobre el segmento AB
H3	Sólo se puede desplazar por el segmento AB
M1	Sólo sobre el segmento AB
M2	El segmento AB
M3	Sobre el segmento AB
M4	Sobre el AB
M5	Sobre el segmento AB
M6	Por el segmento AB

En los dos cuestionamientos, todos los participantes contestaron perfectamente, lo que indica que realizaron correctamente el trazo lo que implica que se cumplió satisfactoriamente el objetivo específico de la ficha.

Ficha 1.2 Título: Simétrico de un punto cualquiera.

El objetivo específico de la ficha era la conservación de una propiedad por desplazamiento, punto de intersección, punto base. Nombrar un punto.

Las acciones que se pidieron fueron las siguientes:

a) Determine un punto cualquiera.
b) Nombre P al punto.
c) Dibuje una recta cualquiera y llámela r.
d) Construya el simétrico de P respecto a r y llámelo P'.
e) Manipule el punto P. Describa qué ocurre.

En seguida se muestra las respuestas dadas por los integrantes del grupo a los cuestionamientos planteados.

H1	Al desplazar P se desplaza P' y coinciden en el punto de intersección con la recta y se convierte en punto de tangencia de las dos circunferencias.
H2	Al moverlo, P' se mueve en sentido contrario, conservando la misma distancia de P' al centro como de P al centro.
H3	Tanto el desplazamiento de P como P' se mueven siempre simétricamente con respecto a la recta r.
M1	Gira en sentido contrario de P' conserva la simetría ya que la recta tiene como punto medio el centro de la circunferencia
M2	Se mueve P' conservando la misma distancia, solo se agrandan o reducen según sea

	el caso o las circunferencias.
M3	Se mueve P’ si mueves P, debido a que depende de éste y conservan la misma distancia con respecto al eje de simetría.
M4	P’ se mueve a lado contrario de P pero conservando la misma distancia entre la recta y el punto P.
M5	Cada vez que se mueve P, la distancia de P a la recta es la misma que de P’ a la recta, ya que el radio dichas distancias de la circunferencia que toca a los puntos.
M6	Se mueve P’.

Cuando se les cuestiona qué pasa cuando manipulan el punto P’ todos contestan lo esperado, que este punto no puede moverse.

H1	No se mueve.
H2	No presenta movimiento.
H3	Queda sin movimiento.
M1	Está fijo.
M2	No se puede mover.
M3	No se mueve.
M4	Está fijo.
M5	Imposible de mover.
M6	No se mueve.

Después se les cuestiona: ¿por qué cree que suceda lo que describió en la pregunta anterior?

H1	Porque son simétricos.
H2	Por ser simétricos.
H3	Porque se construyó con la jerarquía de dependencia P’ depende de P.
M1	Porque P’ depende de P.
M2	El trazo está en función de P y no de P’ y hay una jerarquía de dependencia.
M3	Son simétricos.
M4	Porque hubo un trazo erróneo.
M5	Porque es simétrico a P, por tanto depende de este punto que se mueva P.
M6	Hay jerarquía de dependencia.

Cabe mencionar que esta ficha les costó mucho trabajo ya que habían olvidado cómo trazar el simétrico. Sin embargo conviene mencionar que Cabri fue de gran ayuda para que recordaran cómo trazar el simétrico de un punto.
Un fragmento de lo ocurrido en el taller en esta ficha puede ilustrar lo anterior:

[…] La maestra M4 llama a la conductora para que la observe trazar una recta; luego, de un punto exterior traza una circunferencia, en la circunferencia traza un diámetro y un punto en un extremo del diámetro; la línea o diámetro se mueve fuera de la recta. [Con el trabajo anterior no se observa la simetría] La maestra al observar su trazo dice:

M4: No, estoy mal.

La conductora del curso pregunta: ¿Estás mal?

M4: Si, éste es P y éste es P'.

C: Sí.

M4: Bueno al mover el P, no es simétrico, porque de este lado…, bueno de los dos lados, este punto (señala P) de aquí a la recta, es menor que de aquí a acá (señala la distancia que hay de la recta a P') […]

En el diálogo anterior se evidencia que la maestra, al hacer sus trazos y manipularlos, puede validar su trabajo diciendo: "estoy mal". Además se observa que ella conoce la cualidad de los puntos simétricos de estar a la misma distancia del eje de simetría. Al contestar los cuestionamientos de la ficha, la maestra M4 explica cómo trazar el simétrico de un punto de manera correcta, también manifiesta que P' no se mueve porque hubo un trazo erróneo; quizá esta confusión se debe a que, al intentar manipular los puntos, no puede debido al mal estado del mouse.

En el ejemplo que se acaba de presentar se puede ver que el software Cabri permite repetir fácilmente experimentos y, de esa manera, verificar cuáles propiedades geométricas permanecen invariantes, permitiendo a la maestra ver si las propiedades son verdaderas o no; además, con la construcción de contraejemplos valida su trabajo. Después la maestra borró y empezó de nuevo la actividad.

Con la declaración de la maestra podemos ver que, a pesar de que Cabri le permite recordar cómo hacer el trazo del simétrico de un punto, no se da cuenta que el software introduce un orden de construcción; esto es, la maestra no se da cuenta de la jerarquía de dependencias con las que trabaja Cabri. Balacheff (citado por Keith Jones, 1996) señala que para la mayoría de los usuarios el orden no es evidente, ya que con lápiz y papel no hay una organización donde se observe que existe un orden secuencial a menos que esto se declare explícitamente y menciona esta situación como una fuente de confusión de Cabri.

Al final todos los integrantes del taller consiguieron hacer el simétrico y en todos los cuestionamientos los maestros responden de acuerdo a lo esperado, además el objetivo específico de la ficha fue cumplido satisfactoriamente.

Ficha 1.3. Título: Perpendiculares.

El objetivo específico era la conservación de una propiedad por desplazamiento, punto de intersección, punto base. Nombrar una recta y un punto. Las acciones que se pidieron fueron las siguientes:

a) Trace una recta r y un punto C fuera de la recta.
b) Trace una recta AB perpendicular a r que pase por C.

Después se pidió que escribieran la propiedad de las rectas perpendiculares.

H1	Deben formar ángulos de 90°.
H2	Deben formar un ángulo de 90° entre sí.
H3	Las rectas perpendiculares, mantienen siempre ángulos rectos.
M1	Que formen un ángulo recto con respecto a la recta original.
M2	Que forman ángulos rectos entre sí.
M3	Forman ángulos de 90 grados.
M4	Tener un ángulo de 90° con respecto a la recta R.
M5	La intersección debe formar ángulos de 90°
M6	Que forman ángulos rectos entre sí.

De acuerdo con sus respuestas se puede concluir que todos contestaron correctamente; así también el objetivo especifico de la ficha fue cumplido satisfactoriamente.

Ficha 1.4. Título: Paralelas.

El objetivo específico era la conservación de la propiedad por desplazamiento, punto de intersección, punto base, nombrar una recta y un punto y la jerarquía de dependencias. Las acciones fueron las siguientes:

a) Dibuje una recta cualquiera y llámela r. Elija un punto A que no pertenezca a la recta r.
b) Trace por el punto A una recta que sea paralela a la recta r.
c) Llame a esta recta d.

Además, se les preguntaba si podían mover el punto A. Las respuestas fueron las siguientes:

H1	Sí.
H2	Sí.
H3	Sí.
M1	Sí.
M2	Sí.
M3	Sí.
M4	Sí y sigue siendo paralelo.
M5	Sí.
M6	Sí.

En seguida se pedía que, en caso de haber dado una respuesta afirmativa, explicaran lo que sucedía con las rectas r y d al desplazar A.

H1	Conservan la misma distancia entre ellas.
H2	Sigue siendo paralelas .
H3	No se cortan .
M1	Las rectas se mantienen paralelas entre sí.
M2	No se cortan.
M3	Conservan el paralelismo.
M4	Siguen siendo paralelos.
M5	Siguen siendo paralelas.
M6	No se cortan.

Después se les preguntó si podían mover las rectas d y r.

H1	Sólo r; d no se puede mover.
H2	Sólo R.
H3	Sólo se puede mover la r.
M1	Sólo r.
M2	Sí, r.
M3	Sí la recta R.
M4	Sí R.
M5	La r sí, pero d no.
M6	Sí r.

En el último cuestionamiento de la ficha se indicó que si podían mover alguna de las rectas lo hicieran y que observaran qué pasaba con la otra recta. Así mismo que describieran sus observaciones.

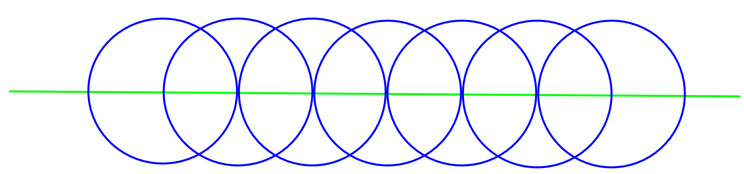
H1	Se puede mover pero la paralela “d” no.
H2	Al mover “e” la recta “d” se mantiene paralela a “r”.
H3	Siempre guardan la misma distancia una con relación a la otra.
M1	“d” se mueve de igual manera a “r” manteniéndose paralelas.
M2	Conserva su distancia.

M3	Conservan la misma distancia.
M4	La recta r la podemos mover y sigue siendo paralela con la recta d, pero la recta d no se mueve porque depende de la recta r.
M5	Continúan siendo paralelas, a pesar de que se mueva r y cambie su sentido d se mueve en dirección con r.
M6	Conservan su distancia.

En todas las respuestas se puede observar que los maestros realizaron correctamente sus trazos y que identificaron el paralelismo. En esta ficha se constata con claridad que la maestra con clave M4 ya observa la jerarquía de dependencias, explícitamente ella dice que la recta d no se mueve porque depende de la recta r. Finalmente el objetivo de la ficha se llevó a cabo satisfactoriamente.

Ficha 1.5. Título: Desplazamiento.

En el objetivo específico se planteaba la conservación de una propiedad por desplazamiento y la jerarquía de dependencia. En las acciones se pedía que se reprodujera con Cabri la siguiente figura.



Así mismo, al terminar su trazo se pedía que desplazaran las circunferencias y escribieran lo que habían observado. Las observaciones son las siguientes:

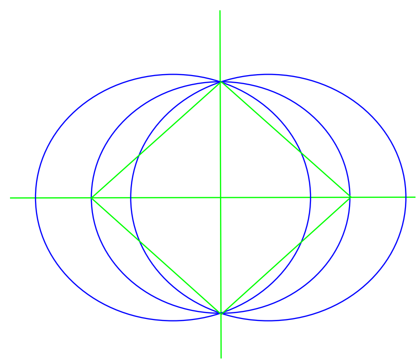
H1	Las circunferencias no se deforman, conservan sus radios (longitudes) al ampliarlos o reducirlos.
H2	No importa si se mueve el punto del centro de la 1ª circunferencia, los demás se mueven del mismo modo.
H3	Todas las circunferencias se modifican igual que la primera y si se mueve la recta se mueve toda la figura.
M1	Sólo necesitamos mover la primera circunferencia para que las demás también se muevan, ya que son dependientes.
M2	Que si se mueve la primera circunferencia todos los círculos se mueven, si se toma otra circunferencia no se mueve.
M3	Primero observé que se deformaban y me di cuenta que mi construcción estaba mal hecha, luego hice depender todas las circunferencias con respecto a la primera y ya se hacían grandes o pequeñas respecto a la primera.
M4	Que el desplazamiento y el tamaño de todos los círculos dependen del primer círculo que hicimos.
M5	Los que siguen dependen de la primera circunferencia que marqué, si comenzamos a

	mover la primera circunferencia, ya sea hacia adentro o hacia fuera, las demás se amplían o disminuyen en la misma proporción.
M6	Si se mueve la primera circunferencia que se trazó, se hace más grande o pequeña y si tomo el centro se mueve sobre la recta.

Todos los maestros logran reproducir la figura. El objetivo de la ficha se realiza satisfactoriamente.

Ficha 1.6 Título: Desplazamiento.

Esta última ficha fue parecida a la anterior, se pedía que el participante del taller



reprodujera con Cabri la siguiente figura:

El objetivo específico era el mismo que en la ficha anterior, observar la conservación de una propiedad por desplazamiento y la jerarquía de dependencias. Se les pidió que desplazaran la figura y escribieran lo que habían observado.

H1	Se desplaza sin deformarse, que las circunferencias están trazadas sobre la recta y el centro de ellas depende de los puntos de intersección sucesivos.
H2	La figura se mantiene constante, cuando se desplaza uno de los puntos de la figura.
H3	Si mueves la recta, se desplazan horizontal o vertical y, si se mueve el primer punto de referencia, se escala la figura.
M1	Al mover la figura no se deforma.
M2	Si muevo el punto A se mueve la figura sin deformarse; si se mueve el punto B sólo se mueve de forma horizontal y vertical; si se mueve la primera recta se gira la figura y si se quiere mover alguna circunferencia no se mueve.
M3	Pasa lo mismo que en la construcción anterior, se conserva la regla de dependencia y mi figura no se deforma ya que hice depender todo de mi punto A.
M4	Cada vez que se alargan o se estrechan las circunferencias la figura mantiene sus propiedades sin deformarse.
M5	Que la figura no se deforma.
M6	Si mueves la circunferencia (primera que tracé) se hace más grande o pequeña, si muevo el punto R se mueve a izquierda o derecha.

De acuerdo a lo descrito por los integrantes del curso, todos lograron exitosamente concluir que la figura no se deformaba y consiguieron ver la jerarquía de dependencia. El objetivo específico de la ficha se llevó a cabo satisfactoriamente.

Comentarios adicionales de la fase uno

- En esta fase no se les permitió utilizar ninguna de las siguientes herramientas de Cabri: simetría, perpendicularidad y paralelismo; esto les permitió usar el razonamiento y el descubrimiento de las propiedades en cada trazo.
- A pesar de que a los maestros les costó mucho trabajo usar el software de Cabri pudieron adaptarse a él; al término de la fase se mostraron más seguros y lo demostraron al momento de reproducir la figura de la última ficha.
- Quedó claro que con Cabri se tenían que formar figuras y no dibujos, esto dicho con base en el planteamiento anterior.
- Pudimos observar que Cabri le permitió a cada uno de los maestros poder dar validez a sus respuestas.

Finalmente se puede concluir que se cumplió con el objetivo general y objetivos específicos de esta fase.

4.5 Fase dos

En esta fase se hace uso de las mismas categorías de análisis ya usadas (ver apartado 4.2). El objetivo general de la fase era que los participantes profundizaran en el significado de la noción de robustez de una figura relacionada con propiedades geométricas de la figura.

Para todas las fichas el objetivo específico fue la observación de la conservación de las propiedades bajo desplazamiento así como de la jerarquía de dependencias y su relación con las propiedades geométricas de la figura.

Ficha 2.1 Título: construcción de un cuadrilátero.

En esta ficha se pedía que construyeran un cuadrilátero y que nombraran sus vértices A, B, C, D, respectivamente. Después, tenían que mover los vértices del cuadrilátero, y registrar sus observaciones.Las observaciones que registraron fueron las siguientes:

H1	Sólo se mueven los 2 lados que lo contienen (al punto).
H2	El cuadrilátero en uno de sus lados se mueve según el movimiento del vértice.
M1	Se forma otro cuadrilátero.
M3	Que la figura va obteniendo diferentes formas pero siguen siendo cuadriláteros.
M4	Que los dos lados que se encuentran unidos por este vértice se mueven de manera proporcional a las medidas originales.
M5	Se mueven los lados que al juntarse forman el vértice que se desee mover (A, B, C, o D), pero sigue manteniendo la característica de ser cuadriláteros.

De acuerdo con el registro:

M1, M3, M5, ubican que se forman otras figuras, que son otros cuadriláteros.

H1, H2, M4, sólo ven el movimiento de los vértices; es decir, no mencionan que se forman otros cuadriláteros.

Llama la atención que el maestro H1, a pesar de que elaboró un cuadrilátero general, cuando se le pide que registre sus observaciones sólo toma en cuenta la intersección de las rectas; quizá esto fue debido a que en la fase uno se pedía que se fijaran en el movimiento de los vértices.

En esta ficha pudimos observar que sólo H1 y M1 trazaron un cuadrilátero general, los otros maestros hicieron un cuadrado o un rectángulo. A continuación se presenta una transcripción de lo sucedido en esta actividad.

C: En esta ficha se tiene que hacer la construcción de un cuadrilátero (se acerca y revisa la construcción de M1). ¿Usaste la herramienta de polígono?

M1: Ajá.

C: ¿Y nada más ése sería cuadrilátero? (M1 trazó un cuadrado).

M1: No.

C: Haz otro, para que te des cuenta qué pasa.

La conductora se acerca a otro integrante del taller: H2.

C: ¿Cómo hiciste la construcción del cuadrilátero de la ficha 2.1?

H2: Tracé un segmento, luego busco una recta perpendicular a este segmento (corta al segmento y hace pasar la perpendicular), trazo otro segmento (traza otro segmento cualquiera sobre la perpendicular que ya había trazado, después en el extremo del segmento traza otra perpendicular, para finalizar nombra a su cuadrilátero).

C: Cuando terminen de hacer su figura manipúlenla para que la vean. ¿Qué pasa? (Se dirige al grupo).

H2: Y ya, con eso lo tracé (manipula y sólo puede observar un cuadrado y un rectángulo).

C: ¿Cómo trazaste tu cuadrilátero?

M1: Con segmentos.

C: Con segmentos, ¿a ver?, muévelos.

C: ¿Lo puedes explicar para todos?

M1: Ajá; sí.

C: Vamos a ver rápidamente la ficha dos punto uno, por el tiempo que sea rápido, la vemos para que su compañera la explique.

M1: Nada más tracé los segmentos, tracé un segmento y luego en este punto (señala el extremo del segmento) tracé otro segmento y el siguiente segmento lo puse a partir de este punto (señala el extremo del último segmento) y así trace los demás segmentos.

Nota: Termina con la construcción del cuadrilátero.

C: Manipula la figura.

C: Esta ficha es para que se den cuenta cuántos cuadriláteros salen a partir de ese cuadrilátero general.

Con la tarea que se propuso en esta ficha se pudo observar que el concepto geométrico básico de cuadrilátero tiene un ejemplo prototípico que es usado e identificado de manera rápida por la mayoría de los maestros: el cuadrado, es decir, esta imagen del concepto es la que tiene características visuales más fuertes (cuatro lados y cuatro ángulos iguales) que la hacen ejemplo de cuadrilátero para la mayoría de ellos.

Ficha 2.2 Título: Construcción de un cuadrado.

Esta ficha pedía la construcción de un cuadrado de manera que se pudiera mover, agrandar o reducir pero sin que se deformar, es decir, que sus lados siguieran siendo iguales entre sí y sus ángulos rectos. Al finalizar se pedía que nombraran sus vértices A, B, C y D, respectivamente. Se les preguntaba si podían mover los vértices y que escribieran sus observaciones. En seguida se presenta el registro de las observaciones hechas por los maestros.

H1	Sí, al ampliar o reducir la figura conserva sus propiedades de cuadrado.
H2	Sí, al mover un vértice la figura puede ser aumentada o disminuida de tamaño pero sin deformarse.
M1	Sólo un vértice, el primero, y como los demás dependen de él, la figura se agranda y disminuye al mover éste.
M3	Se elaboró un paralelogramo (escribe cuadrado, después tacha esta palabra y escribe debajo de ella paralelogramo) con los conceptos perpendicular y paralelismo en la cual cumplió con las propiedades de un paralelogramo.
M4	Sólo el vértice A se puede mover, los demás vértices no, debido a que se encuentran en función de vértice A.
M5	Sí, y lo que sucede es que el cuadrado sigue siendo un cuadrado sólo que sus lados son más pequeños o grandes, según se mueva un vértice.

En su registro encontramos que todos los integrantes del taller elaboraron satisfactoriamente la ficha; podían agrandar y reducir el cuadrado, así también ellos registraron la jerarquía de dependencias. La maestra M3 revela su concepto imagen (Vinner y Hershkowitz, 1983, citado por Hershkowitz, 1990) de los cuadriláteros mencionando que tienen dos propiedades que son la perpendicularidad y el paralelismo; por ello su ejemplo prototípico de paralelogramo es un cuadrado.

Ficha 2.3 Título: Construcción de un paralelogramo.

En esta ficha se pedía que se realizara la construcción de un paralelogramo de manera que se pudiera mover, cambiar de posición, agrandar o reducir, pero que no perdiera las cualidades de paralelogramo. Se les preguntaba si podían mover sus vértices, cuáles sí y cuáles no y qué sucedía con la figura cuando se movían. Las respuestas se muestran a continuación.

H1	Sí, se pueden mover los vértices excepto el último que queda dependiente de los otros.
H2	Al mover otro vértice se puede ver otras figuras. No pierde sus propiedades.
M1	Sólo [se pueden mover] los vértices que forman con la primera recta y al mover estos puntos se forman otros paralelogramos.
M3	Construyendo paralelas y perpendiculares se cumplen los objetivos que nos marca la actividad, que al cambiar de posición o agrandar o reducir no se modifiquen las propiedades.
M4	Sólo puedo mover 2 vértices: P y Q. Cuando desplazo uno de estos vértices se mueve el vértice opuesto, la misma distancia, hacia la dirección contraria.
M5	Sólo 2 (P, Q) cuando se mueven dichos vértices se pueden intercambiar los lados, pero siguen siendo paralelos.

Después se les pedía que, si al mover los vértices el paralelogramo que habían trazado no perdía la cualidad de tener lados paralelos, siguieran adelante y, si perdía esta cualidad, borraran todo y empezaran de nuevo. Posteriormente, se les preguntó si su paralelogramo se podía transformar en otras figuras, como un rectángulo, un cuadrado o un rombo. El concentrado de sus respuestas se presenta a continuación:

Maestros	Un rectángulo	Un cuadrado	Un rombo
H1	Sí	Sí	Sí
H2	Sí	Sí	No
M1	Sí	Sí	Sí
M3	Sí	Sí	Sí
M4	Sí	No	No
M5	Sí	Sí	No

Finalmente se les pidió que escribieran sus observaciones, y que anotaran alguna conclusión. Las conclusiones fueron las siguientes.

H1	El movimiento me permite obtener los diferentes paralelogramos, inclusive el romboide.
H2	Debido a la construcción del paralelogramo, puedo formar un cuadrado y un rectángulo, no así un rombo. Al cambiar la posición y forma de construirlo es posible dar pie al rombo.
M1	Observamos la dependencia de puntos, ya que el movimiento de la figura depende sólo de los primeros vértices que se forman.
M3	Es una forma fácil para describir qué es un paralelogramo y en cuántas formas podemos cambiarlo y cuántos tipos de figuras podemos obtener.
M4	Creí que había hecho un paralelogramo que se transformaba en rectángulo, cuadrado y rombo. Lo que logré fue construir un trapecio que se transformaba en rectángulo.
M5	La manera en que cada uno haya trazado un paralelogramo es la forma en que se pueda mover y mirar otras figuras, sin embargo, la figura s es un paralelogramo bien construido siempre será un paralelogramo, aunque se manipulen 2 vértices (P, Q).

De acuerdo con las respuestas de la primera pregunta:

- Tres maestros sólo observaron el movimiento de los vértices
- Tres maestros identifican el movimiento de los vértices y manifiestan que se pueden formar otras figuras, en este caso paralelogramos.

En la segunda pregunta se encontró que:

- Tres maestros sí pudieron transformar el paralelogramo en rectángulo, cuadrado y rombo.
- Dos maestros sólo la pudieron trasformar en rectángulo y cuadrado.
- Una maestra sólo la pudo transformar en un rectángulo.

En las conclusiones que vertieron los maestros encontramos que:

- Dos maestros (H1 y M3) confirman que el movimiento le permite obtener diferentes paralelogramos.
- Dos maestros (H2 y M5) sólo reconocen dos figuras como paralelogramos: al cuadrado y al rectángulo. No obstante, H2 menciona que si se cambiara la manera de construirlo se podría formar el rombo; sin embargo no parece que reconozca a esta última figura como paralelogramo. M5, a pesar de que la construcción le puede mostrar otras figuras, dice que un paralelogramo bien construido siempre será un paralelogramo; situación que nos lleva a concluir que ella, al igual que H2, no reconoce al rombo como paralelogramo.
- M1 sigue prestando atención al movimiento de los vértices, y no a las figuras en que se puede transformar su construcción.
- M3 da a entender que Cabri le ayuda a ver cuántos paralelogramos se pueden formar a partir de trazar uno general.
- M4 hace bien la construcción; incluso menciona que lo que hizo fue construir un trapecio que se transformaba en rectángulo. En su comentario parece confundida, pero el trazo que ella hace le permite ver que todo paralelogramo es un trapecio.

Cabe mencionar que esta ficha costó más trabajo que aquella en la que se pedía trazar un cuadrado; por ejemplo, inicialmente la mayoría trazó cuadrados o rectángulos, pero con la discusión se fue comprendiendo. Veamos lo ocurrido durante el trabajo con la ficha.

(Nota: M4 trazó cuatro segmentos y los colocó uno al lado de otro, formando el dibujo de un cuadrilátero; entonces la conductora le pide que lo manipule y éste se deforma).

C: Parecía una figura correcta pero es un dibujo, una figura no debe deformarse; entonces, con sus herramientas, busque como hacer un paralelogramo.

M4: Pero que no se deforme entonces, que tenga sus características.

C: Sí, debe cambiar, o sea debe… más que deformarse debe dar pauta para que usted vea otras figuras.

M3: Ah, que siga conservando la misma propiedad.

C: Sí.

M4: Entonces éste no me funcionó para eso.

C. Usted qué cree, a ver…

M3: No, no porque al momento de deformarse, o de cambiar la forma, ya no está… ya no sigue siendo un paralelogramo.

C: Ya no es un paralelogramo.

M3: Ah bueno.

C: Tiene que ser un paralelogramo.

M3: ¿Al momento de moverse tiene que seguir conservando la propiedad?

C: Sí.

M3: Muy bien.

(Nota la conductora se acerca a otra compañera M4)

C: ¿Ya trazaste tu paralelogramo?

M4: Sí.

C: ¿Tiene lados paralelos?

M4: Sí, éste con éste y éste con éste (señala los lados opuestos de un rombo).

C: ¿Y puedes hacer otras figuras?

M4: ¿Con éste? (señala el rombo)

C. Sí.

M4: Un cuadrado.

C: ¿Otra?

M4. Nada más el rombo.

C: ¿Otras?

M4: Rombo y luego con ésta un cuadrado…

Por otra parte algunos logran mucha claridad:

H1: Bueno, aquí tracé el segmento, el AB, listo; después, tracé una recta paralela a este segmento que fue la CD; de allí tracé un segmento el BC, una recta que pasara por B y por C bueno, perdón, un segmento: el AD y después tracé una recta paralela a ese segmento. Esto ya me asegura que tengo dos pares de lados paralelos y esto finalmente me da un paralelogramo, entonces […] lo puedo mover, lo puedo cambiar de posición, lo puedo agrandar o puedo reducir y en ningún caso pierde su condición de paralelogramo.

Es relevante comentar lo sucedido durante el desarrollo de la ficha pues de ahí se puede ver cómo iban haciendo las transformaciones del paralelogramo:

- Para H1 fue fácil hacer las transformaciones y observar los diferentes paralelogramos que se formaban.
- M3 fue una maestra que al principio había trazado un cuadrado, pues entre las propiedades de un paralelogramo mencionó que debe tener perpendicularidad y paralelismo, sin embargo con el diálogo que tuvo con H1 pudo cambiar sus creencias sobre el paralelogramo y ver que se pueden formar otras figuras, como el rectángulo y el rombo.
- Por otra parte, M5, a pesar de que escucha la conversación y observa la transformación del paralelogramo, no se convence y decide quedarse con su explicación. Esto llama la atención pues esta maestra mostró mayor claridad en la fase cero, donde fue la que utilizó más clasificaciones jerárquicas.

A continuación se presenta un fragmento del diálogo que se llevó a cabo durante esta ficha; después de trazar su paralelogramo, el maestro H1 explica:

H1: Este… tal vez un rectángulo, posiblemente cuadrado, un rombo, incluso el romboide y de ahí… bueno, es la condición.

M3: Prácticamente nada más son tres figuras que son paralelogramos, no…

H1: Cuatro.

M3: Cuatro: el cuadrado, rectángulo, el rombo y el romboide.

M5: Serían dos ¿no?, porque el cuadrado es un rectángulo y el rombo es un romboide.

M3: Pero por las características de un cuadrado… dice que el cuadrado tiene sus lados iguales y el rectángulo tiene dos iguales.

H1: De hecho son "cuadrastas", nada más que el cuadrado es un caso específico del rectángulo y un caso específico del rombo, pero en realidad son "cuadrastas" por sus características…

De este diálogo podemos rescatar situaciones interesantes; entre ellas:

- Cuando la integrante M5 manifiesta: "Serían dos ¿no?, porque el cuadrado es un rectángulo y el rombo es un romboide", parece estar usando clasificaciones jerárquicas; esto ya lo había manifestado desde la segunda parte de la fase cero, sin embargo en la ficha 2.3 ella no aceptaba a los rectángulos y cuadrados como paralelogramos. Su idea de paralelogramo es la de un paralelogramo oblicuo o romboide. Es decir, su manera de clasificar cuadriláteros es parcialmente jerárquica.

- En la explicación que da el maestro H1 se puede ver que usa una palabra que no se ha encontrado en ningún diccionario: "cuadrastas". Esto nos remite a una reflexión: el mal uso de una palabra o cualquier uso pobre del lenguaje matemático tienen una permanencia en la audiencia que se convierte en un problema definitivo para la buena enseñanza. Ignoramos si este maestro escuchó de sus propios maestros o formadores esta palabra, o si alguna otra la fue deformando. De cualquier manera la pregunta es si el utiliza este término en sus clases y, sobretodo, si tiene una definición congruente de la misma. Al respecto, Monaghan (2000) argumenta que el lenguaje usando de manera ambigua puede acarrear una influencia negativa en el aprendizaje y es central a la percepción.

Ficha 2.4 Título: Transformaciones.

Las acciones solicitadas fueron:

- Construir un rectángulo de manera que no perdiera la cualidad de tener cuatro ángulos rectos.
- Después, que movieran algunos puntos y vieran si es posible que la figura obtenida se transformara en un cuadrado y, si esto era posible, que respondieran si consideraban que su figura original estaba bien hecha:

Las respuestas se muestran a continuación:

H1	Sí.
H2	Sí.
M1	Sí.
M3	Sí.
M4	Sí.
M5	Sí.

Después se les pedía que escribieran sus observaciones y obtuvieran una conclusión. Las conclusiones a las que llegan son las siguientes:

H1	C.E	El cuadrado es un caso particular del rectángulo.
H2	C.J	El rectángulo posee un par de lados paralelos, al igual que el cuadrado, por esta característica fue posible transformar el rectángulo en cuadrado. Sólo es posible mover aquellos vértices de inicio.
M1	J.D	Al mover los puntos se mueve toda la recta, a mi parecer porque la recta depende del punto.
M3	C.J	Para la elaboración de un cuadrado o rectángulo se trazaron rectas perpendiculares y paralelas y la figura conservó sus ángulos rectos al mover un punto.
M4	C.J	Observé que sí es posible formar un cuadrado y partiendo de éste un rectángulo.
M5	C.J	Para hacer un rectángulo y que mantenga sus características de tener sus cuatro ángulos rectos permanentemente, hay que trazar una paralela a un segmento y luego sus perpendiculares a ese segmento pasando por su paralela. Para la construcción de un rectángulo siempre hay que recordar que sus ángulos son rectos por consecuencia del trazo de rectas perpendiculares.

En la primera pregunta todos responden que sí estaba bien hecha la figura. Esto puede conducir a pensar que todos los maestros ubican al cuadrado como un rectángulo.

Las conclusiones fueron clasificadas esencialmente con las mismas categorías usadas para el análisis de los datos obtenidos en la fase cero, a saber:

1. Clasificación partitiva (C.P). Se agrupan en esta categoría respuestas que ponen en evidencia que el maestro está utilizando una clasificación partitiva (De Villiers 1994, Hershkowitz ,1987).

2. Clasificación jerárquica (C.J). Se agrupan en esta categoría respuestas que ponen en evidencia que el maestro está utilizando una clasificación jerárquica (De Villiers 1994, Hershkowitz, 1987).

3. Casos especiales (C.E). Esta categoría es vista como una sub categoría de la clasificación jerárquica, por ejemplo en esta sub categoría los maestros explican que los cuadrados son casos especiales del conjunto de los rectángulos, de los rombos, etc.

4. Sólo ven la jerarquía de dependencia (J.D)

Clasificación partitiva	Clasificación jerárquica	Casos especiales	Solo ve la jerarquía de dependencias
	H2, M3, M4 y M5	H1	M1

De acuerdo con lo anterior:
Cuatro maestros utilizan una clasificación jerárquica, aunque las explicaciones de M5 sólo se refieren al rectángulo; pero esta maestra ya ha repetido que el cuadrado es un caso particular de rectángulo.
Un maestro se refiere a los casos especiales, es decir, usa una clasificación jerárquica y la enuncia de manera completa, explicando que el cuadrado es un rectángulo pero no al revés.

Una maestra sólo ve la jerarquía de dependencias y no se refiere a la clasificación de las figuras.

Con los datos obtenidos por el trabajo de los maestros con esta ficha, podemos ver que el maestro H1 utiliza la clasificación jerárquica y reconoce al cuadrado como un caso particular de los rectángulos, lo que no sucedió en la fase cero. Aunque, como se había dicho, quizás sus respuestas, en aquel momento, se enfocaban en la parte didáctica de la situación hipotética presentada.

Ficha 2.5 Título: Transformaciones.

Se pedía que construyeran un rombo de manera que éste se pudiera transformar en otra figura por ejemplo un cuadrado, luego se les cuestionaba si al arrastrarlo seguía siendo un rombo. Posteriormente se les preguntaba si su rombo se podía transformar en un cuadrado y si consideraban que sus trazos estaban bien hechos. Como se ve en la tabla siguiente, cinco de seis maestros consideran que un rombo se puede transformar en un cuadrado.

	¿Sigue siendo un rombo?	Si su rombo se puede transformar en un cuadrado ¿Considera que sus trazos están bien hechos?
H1	Sí	Sí
H2	-----	-----
M1	Sí	Sí
M3	Sí	Sí
M4	Sí	Sí
M5	Sí	Sí

Para finalizar la ficha, se les pidió escribieran sus observaciones y obtuvieran una conclusión. La tabla muestra estas observaciones y conclusiones.

H1	C.E	El cuadrado es un caso específico del rombo
H2	C.J	Como se utilizan dos circunferencias para este trazo son las que se manipulan para comprobar que el rombo puede transformarse a cuadrado
M1	D.E	Un rombo también tiene cuatro lados iguales, pero puede no tenerlos, así que si queremos un rombo con lados iguales, a mi parecer el trazo está bien al poder convertirse en cuadrado
M3	S.M	Para elaborar un rombo y cuadrado con su trazo con las herramientas de Cabri que es un material didáctico muy fácil y práctico que nos facilita el conocer los conceptos y propiedades de nuestra actualidad
M4	C.J	El cuadrado puede ser un rombo pero en ocasiones un rombo no puede llegar a ser un cuadrado.

M5	C.P	Como lo escribí en pruebas pasadas un rombo puede ser un cuadrado, pero éste no puede ser un rombo, ya que de esta manera se asegura que los lados sean iguales.

Para exponer sus respuestas se usan las mismas categorías de la pregunta anterior, añadiendo una más:

5. Sin matemáticas (S.M). Se agrupan en esta categoría respuestas donde no se pueden recuperar concepciones matemáticas sobre los contenidos matemáticos involucrados. En muchos casos son enunciados de tipo didáctico, preguntas que ayuden al alumno, etc.

Casos especiales	Clasificación Jerárquica	Clasificación partitiva	Error conceptual	Sin matemáticas
H1	H2 y M4	M5	M1	M3

De acuerdo con los comentarios emitidos por los maestros podemos interpretar lo siguiente:

H1 usa una clasificación jerárquica, de hecho queda clasificado en la categoría de casos especiales. Esto permite confirmar que en la primera parte de la fase cero su preocupación se centra en responder didácticamente de acuerdo a la situación hipotética planteada y no que rehúya enfrentar la parte matemática de la situación.

H2 utiliza una clasificación jerárquica. Manifiesta en un segmento de su discurso que el rombo puede transformarse en cuadrado; esto lo podemos interpretar como que el maestro podría estar diciendo que los cuadrados son un subconjunto de los rombos.

M4 dice también que un rombo puede llegar a ser cuadrado [el cuadrado es un caso particular de rombo] y subraya que los cuadrados no se pueden transformar en rombos [que no sean rectángulos]. Vale la pena recordar que al inicio de la fase cero este maestro afirmaba que un cuadrado no podía ser un rombo. Es posible que el taller y el programa Cabri le hayan convencido de que una clasificación jerárquica es posible y correcta.

M5 repite, aunque ahora de manera confusa, que el cuadrado no puede ser rombo. Recuérdese que esta maestra sí ve al cuadrado como caso especial del rectángulo y al rombo como caso especial de los romboides, pero no a los rectángulos como casos especiales de los paralelogramos (oblongos o romboides) y, por tanto, no puede ver al cuadrado como rombo. Sin embargo, lo que observa en Cabri la confunde y la lleva a aceptar que un rombo puede ser [transformado en] un cuadrado, pero continúa diciendo que un cuadrado no puede ser un rombo, porque para ella los rombos no puede tener ángulos rectos.

M1 traza correctamente la figura, pero piensa que los rombos no tienen lados iguales, quizás confundiéndolos con los papalotes. A pesar que en el taller se ha trabajado con el rombo como una figura con cuatro lados iguales, sus creencias están muy arraigadas y no le permiten ver esta característica de la figura. Pareciera que los conocimientos y creencias de esta maestra y su proceso de aprendizaje están determinados por la forma en que interactúa en los diferentes contextos prácticos; la profesora genera su propio conocimiento práctico personal y estas cuestiones se superponen a la práctica que ella podría tener con Cabri (Giménez, Llinares y Sánchez;1996).

M3 parece muy complacida con el software de Cabri por lo que no pierde la oportunidad de decirnos que es un material didáctico que permite conocer las propiedades [quizá quería decir] de las figuras.

Ficha 2.6 Título: Transformaciones.

En las acciones se pedía que construyeran un trapecio y movieran algún punto de manera que la figura se pudiera transformar en otras figuras, sin dejar de tener las características de un trapecio, esto es, tener un par de lados paralelos. También se cuestionaba si era posible transformarla en un paralelogramo, en un rombo y también que mencionaran en que otras figuras la habían podido transformar. A continuación se presenta el concentrado de respuestas.

		¿Es posible transformarla en un paralelogramo?	¿Es posible transformarla en un rombo?	¿En qué otras figuras la pudo transformar?
H1	C.P	No	No	No, sólo en otros trapecios (isósceles, rectángulo y escaleno)
H2	C.J	Sí	Sí	Cuadrilátero
M1	C.J	Sí	Sí	Rectángulo y cuadrado
M3	C.P	Sí	---	Trapezoide
M4	C.P	Sí	No	En ninguna otra
M5	O	Sí	No	Triangulo escaleno

Después se les dijo que, si se podía transformar el trapecio en paralelogramo o rombo, que respondieran si consideraba que la construcción de su trapecio era correcta. Las respuestas fueron las siguientes.

H1	No
H2	Sí
M1	Sí
M3	Dependiendo
M4	Sí
M5	Sí

Para finalizar la ficha se les pedía que hicieran sus observaciones y que obtuvieran una conclusión. En seguida se presentan las observaciones de los participantes.

H1	C.P	El trapecio no se puede transformar en paralelogramo ya que pierde sus características de trapecio
H2	C.J	Por los trazos realizados, da pie a que se formen las figuras especificadas. Es un trazo correcto pues al manipularlo sin importar que se inicie por un trapecio, es posible moldearlo.
M1	C.J	Podemos mover 3 puntos y la figura sigue siendo un trapecio ya que sigue conservando dos lados paralelos que es la característica principal del trapecio.
M3	O	Aquí se trazaron paralelas para construir rombos y trapecio cumpliendo con sus características. Es necesario practicar
M4	C.J	Cumplí con las características del trapecio pero no me salió el rombo ni ninguna otra figura.
M5	O	Nuevamente depende de la perspectiva desde la cual tomes la construcción, así sea la forma de cómo se vean las siguientes construcciones

Para clasificar las respuestas se utilizaron tres de las categorías de los análisis hechos anteriormente, como se ve en la tabla siguiente.

Clasificación partitiva	Clasificación jerárquica	Otras
H1, M3 y M4	H2 y M1	M5

Las observaciones de los maestros dan lugar a ubicarlos de la siguiente manera:

Clasificación partitiva	Clasificación jerárquica	Otras
H1 y M4	H2 y M1	M3 y M5

Así podemos ver que tres maestros utilizan una clasificación partitiva, dos usan una clasificación jerárquica y dos maestros se ubican en otras, ya que sus comentarios los hicieron en base al uso del software y no sobre las figuras.

En seguida se presenta un extracto de la trascripción del video en donde se puede apreciar un diálogo interesante para el análisis que estamos realizando.

H1: Bueno, de acuerdo con la ficha aquí dice: construya un trapecio… bueno, aquí hay dos formas de construirlo.

C: Ajá.

H1: En este caso dice "construya un trapecio, mueva algún punto de manera que esta figura se pueda transformar en otras figuras"… bueno, aquí está (mueve un segmento de su trapecio y mueve un vértice de un triángulo que ya tiene trazado del cual surge su trapecio).

C: Pero sería la misma.

H1: No

C: ¿No? a ver
H1: Otras figuras en cuanto… bueno, a diferentes trapecios, a fin de cuentas tengo tres tipos de trapecios que serían: el rectangular, isósceles y el escaleno, como figuras, finalmente, son tres distintas.

C: Sí.

H1: Pero hay una característica que dice que se pueden conservar estas figuras pero sin dejar de tener las características de un trapecio, entonces ésta ya no cumple (se refiere a un trapecio que ya había trazado y que puede transformar en un paralelogramo), por que se forman otras figuras y deja de tener características de trapecio, por lo tanto ésta no se puede, ésta no puede ser de acuerdo con la ficha.

H1: Bueno así como la entendí.

C: Sí, está bien, vamos a oír la explicación de su compañero.

(Nota: Para la explicación que va a dar a los demás integrantes del taller el maestro borra el trapecio que podía ser trasformado en paralelogramo y decide quedarse con el trapecio que surge a partir de un triángulo.)

H1: Ahora, esta figura se puede transformar en otras figuras sin dejar de tener las características del trapecio, esto es, tener un par de lados paralelos, ésa es la condición clara que se está poniendo; ahora bien, partiendo de que un trapecio se obtiene de un triángulo, lo que hice fue trazar esta recta AB y marqué un punto, y ya de ahí tracé el triángulo de este punto externo hacia el punto A y del punto externo a B; de ahí trace una recta paralela a la primer recta (se refiere a AB): sería ésta (CD) y entonces, ya de ahí, puedo transformar (toma el punto externo) si yo muevo el punto, finalmente es para obtener los tres diferente tipos de triángulo: en este caso el rectángulo un isósceles y un escaleno. F finalmente obtengo los tres tipos de trapecio que se están pidiendo, entonces ya de ahí muevo las rectas paralelas no, no importa que las mueva, no deja de tener las características del trapecio que es: un par de lados paralelos.

C: Muy bien alguna pregunta, objeción, duda, ¿no?

M1: Pero es que nada más te está diciendo que puedas formar otra figura y que mantengas los lados paralelos, entonces no necesariamente tienen que ser sólo trapecios, dice que puedas formar otras figuras, manteniendo lados paralelos.

H1: Por eso sin dejar de tener las características de un trapecio.

M1: Pero es que no se forman otras figuras, sigue siendo un trapecio

H1: Ah es que ahí es la condición, porque después dice: “¿Es posible transformarla en un paralelogramo? Si puedes formar entonces un paralelogramo ¿seguiría conservando entonces las características del trapecio?”

M1: Si, seguiría con un par de lados paralelos.

H1. Y entonces ¿cuál es la condición para poder tener un trapecio?

M1: Pues que tenga lados paralelos.

H1: Ok.

M1: Un par de lados paralelos.

H1: Un par, un par de lados paralelos es lo que necesito, entonces, si tú lo puedes trasformar a un paralelogramo seguiría conservando esa característica.

M1: Seguiría teniendo lados paralelos.

H1: Ah, sí pero.

M5: ¿Entonces el paralelogramo necesariamente tendría que tener dos pares de lados paralelos?

H1: ¿El paralelogramo? Sí, debe tener dos pares de lados paralelos, entonces el trapecio, para que sea trapecio debes de tener solamente uno, es una condición necesaria y suficiente vaya, ésa es la diferencia, si tú conservas esas dos características de lo necesario y lo suficiente entonces me aseguras que es un trapecio, por eso es que en este caso dice ¿es posible transformarla en un paralelogramo? Paralelogramo, en este caso no, en un rombo no, porque entonces ya estarías hablando que los trapecios son casos especiales de los rombos y no es cierto, de acuerdo con el trazo.

M1: Es que si mueves los lados de las rectas… bueno… (y se calla)

C: A ver, vamos a ver la construcción de su compañera.

M1: Primero tracé una recta y a ésta le tracé una paralela; ya de ahí tracé dos segmentos cualquiera entonces, si movemos este punto (se refiere a un vértice del trapecio), se forma otra figura, pero te digo que es un paralelogramo; entonces, si mueves ésta (su primera recta) se forma un rombo y éste debe tener lados paralelos.

H1: No, el rombo la característica es que los cuatro lados son iguales.

M1: Bueno hay rombos que no necesariamente tienen que tener los cuatro lados iguales.

H1: Sí, no es que la condición para trazar un rombo es que tenga los cuatro lados iguales.

C: Pero si manipulas tu figura sí puedes formar un rombo. A ver, mueve una paralela, a ver mueve tu recta… ése ¿no sería un rombo? ¿Cómo se llamaría esa figura?

M5: Romboide

C: Romboide dice ella ¿ustedes cómo lo conocen?

H1: Cuáles son las características del romboide.

C: ¿Qué nombre le asignan a esa figura?

M3: Cuadrilátero.

H1: Un cuadrilátero.

C: Un cuadrilátero.

M5: Un trapecio.

C: Un trapecio.

H1: ¿Conserva su par de lados paralelos?

C: Conserva su par de lados paralelos.

Después de ver el video llaman la atención varias situaciones. Entre ellas mencionamos las siguientes:

El maestro H1 dice que el trapecio se puede trazar de dos maneras, una la lleva a cabo con el uso de paralelas, esto le permite ver que sí se puede formar un paralelogramo, por lo que este modo de trazar le parece incorrecto y lo descarta argumentando que no es posible, ya que forma otras figuras que dejan de tener las características de un trapecio. Dice “no, que no es lo que pide la ficha”, por ello decide quedarse con el trazo de un trapecio que sólo le permite ver otros trapecios.

Con este ejemplo podemos decir que los atributos relevantes (un solo par de lados paralelos) del prototipo (el trapecio) tienen fuertes características visuales en el maestro, estos actúan como distractores y no le permiten ver otras posibilidades de transformación, como mencionan Vinner y Hershkowitz, (1983, citado por Hershkowitz 1990).

La condición impuesta a un cuadrilátero para ser trapecio: tener un par de lados paralelos es necesaria y suficiente, como bien dice el maestro; pero esto no implica que **sólo** debe tener un par de lados paralelos, esta es otra característica que él impone al trapecio y así su definición no es económica en el sentido de De Villiers (1994).

El maestro está usando un juicio prototípico para los trapecios: usa como marco de referencia al ejemplo prototípico, el trapecio isósceles con un solo par de lados paralelos, y trata de imponerlo a las figuras que va obteniendo al arrastrar su trapecio, pero al llegar al paralelogramo, la idea de un único par de lados paralelos no le funciona, por tanto rechaza la nueva figura como la transformación de un trapecio (Vinner y Hershkowitz, 1983, citado por Hershkowitz 1990).

El profesor reconoce a los trapecios, hace el trazo de la figura de dos formas diferentes, pero prefiere la que sólo le permite ver que un trapecio es un cuadrilátero con un par de lados paralelos, así mismo en el diálogo expresa que la característica de un trapecio es tener un par de lados paralelos, con esta definición el maestro excluye a los paralelogramos de los trapecios (Villiers 1994).

Llama la atención que el maestro, a pesar de que a partir de paralelas formó el trapecio, y aun viéndolo convertirse en paralelogramo, descarta que un paralelogramo pueda considerarse [un caso particular de] trapecio, lo que da pauta a pensar que el peso de sus concepciones no le permiten aceptar lo que le muestra Cabri, aferrándose a sus concepciones originales. Esto llama la atención más aún ya que este maestro es el que con más claridad y seguridad usaba y manejaba las clasificaciones jerárquicas.

En contraparte, la maestra M1, cambia su posicionamiento al reconocer que con el trazo de paralelas se puede formar un trapecio y que la instrucción de la ficha sí le permite mantener la condición inicial de trapecio al formar un paralelogramo.

Así mismo con el diálogo y la intervención de esta maestra el profesor H1 tenía la oportunidad de analizar el comentario de la compañera; sin embargo, al parecer, las concepciones del profesor con respecto al trapecio no le permiten dejar de decir que la nueva figura perdía las características de un trapecio.

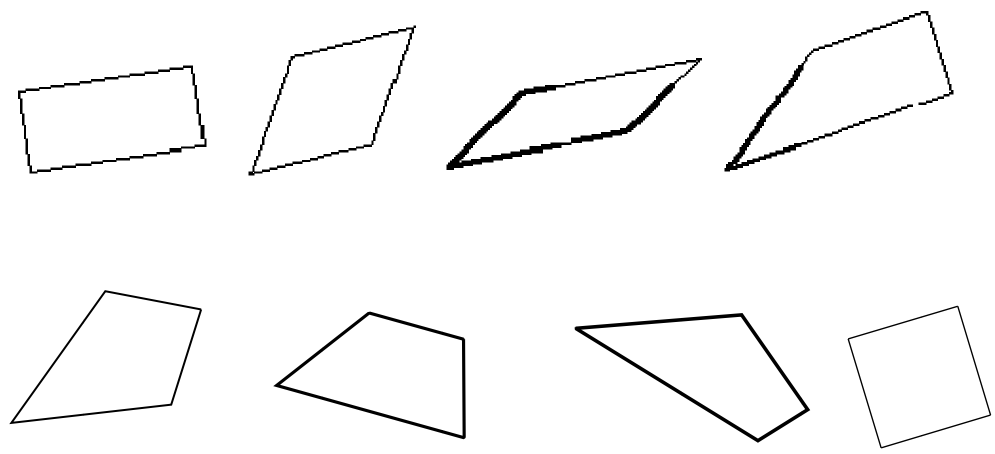
Fragmento donde el profesor no acepta la aportación de la maestra.

H1: Pero hay una característica que dice que se pueden conservar estas figuras pero sin dejar de tener las características de un trapecio, entonces ésta ya no cumple, (se refiere a un trapecio que ya había trazado, la trasforma en un paralelogramo) porque se forman otras figuras y deja de tener características de trapecio, por lo tanto, ésta no se puede, ésta no puede ser de acuerdo con la ficha … Bueno, así como la entendí.

Como se observa en el extracto de transcripción anterior, la maestra M5 muestra interés en el desarrollo de la discusión que se da entre los maestros H1 y M1; ella escucha y observa la explicación de la compañera M1 e interviene cuando se pregunta el nombre de una figura contestando, acertadamente, que la nueva figura es un romboide; esta conversación permite constatar su avance con respecto a los nombres de las figuras, ya que en la fase 0 no utilizaba el término.

Ficha 2.7 Título: Relaciones entre cuadriláteros.

El objetivo específico era hacer una clasificación jerárquica de la familia de cuadriláteros y explicar las relaciones dentro de esa familia. La ficha tenía una pequeña nota donde se les decía que los cuadriláteros se pueden clasificar de acuerdo con el paralelismo de sus lados o con el tamaño de sus lados o con características de sus diagonales. Estos fueron los cuadriláteros que se les pedía que clasificaran:



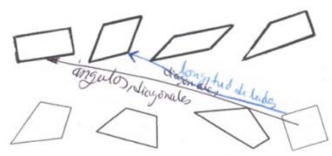
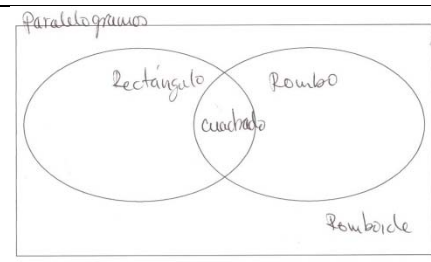
Se les mostraron varias opciones para que cada uno eligiera la manera de clasificarlos. Se les sugería que unieran con flechas los cuadriláteros y que la flecha debería indicar que el cuadrilátero que estaba al inicio de la flecha era un caso particular del cuadrilátero que estaba a la derecha de la punta de la flecha.

Por otra parte, si estaban aplicando el paralelismo de los lados, usaran una flecha de color rojo y si estaban aplicando la clasificación de acuerdo con la longitud de los lados usaran una flecha azul y, si estaban aplicando características de las diagonales, usaran algún otro color.

También podían hacer la clasificación de acuerdo:
- Con el paralelismo.
- Con la longitud de los lados.
- Con diagonales.
- Y por último si ninguna de las anteriores clasificaciones lo convencía dibujara su propia clasificación.

En seguida se muestra la clasificación que hizo cada participante del taller.

Maestro con clave H1

	De acuerdo al paralelismo de los lados use una flecha de color rojo; si está aplicando la clasificación de acuerdo con la longitud de los lados use una flecha azul.	De acuerdo con las diagonales	Si ninguna de las anteriores lo convence dibuje su propia clasificación
H1			Por paralelismo Paralelogramo { Cuadrado, Rombo, Rectángulo, Romboide Trapecio { isósceles, Escaleno, Rectángulo Trapezoide { simétrico, asimétrico

En su primer intento por clasificar el maestro lo hace de acuerdo con la longitud de sus lados, así unió el cuadrado con el rombo, después unió el cuadrado con el rectángulo y debajo de las flechas anotó ángulos y diagonales.

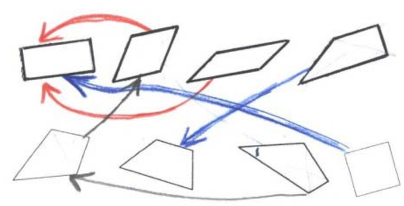
El profesor decide abandonar esa clasificación e intenta otra; esta vez la hace utilizando las diagonales mencionando que se trata del conjunto de los paralelogramos en el cual hay otros subconjuntos el de los rectángulos y los rombos y su intersección los cuadrados también incluye al romboide.

El profesor aparentemente sabe que no ha tomado en cuenta a todas las figuras por lo tanto decide hacer su propia clasificación y escribe que es en base al paralelismo, separando a los paralelogramos e indicando que éstos son: cuadrado, rombo, rectángulo, romboide. Posteriormente forma otra subclase, por así decirlo, y menciona a los trapecios, en ellos incluye al isósceles, escaleno y rectángulo, finaliza con los trapezoides diciendo que son el simétrico y el asimétrico.

Lo que se puede interpretar como que el maestro separa primero las figuras que tienen dos pares de lados paralelos, luego las figuras que tienen sólo un par de lados paralelos y finalmente las que no tienen lados paralelos.

Como se puede ver el maestro trabaja con una clasificación partitiva lo cual no es un error, ya que está poniendo las condiciones necesarias para formar ese conjunto de figuras que eligió y son congruentes con las definiciones que el dio durante el taller.

El maestro H2 usa la siguiente clasificación.

	De acuerdo al paralelismo de los lados use una flecha de color rojo; si está aplicando la clasificación de acuerdo con la longitud de los lados use una flecha azul; si está aplicando características de las diagonales use algún otro color.
H2	

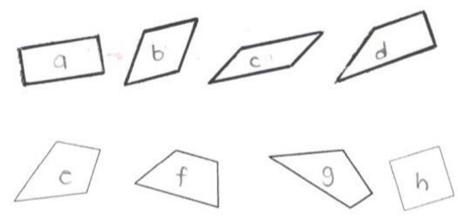
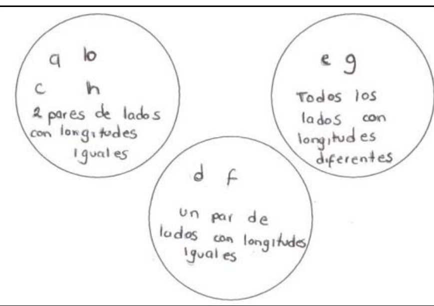
El maestro, por el paralelismo de los lados, toma en cuenta al rombo y lo une al rectángulo lo mismo que al romboide, es decir, para él estos cuatro son ejemplos de la misma clase, quizás la de figuras con dos pares de lados paralelos, aunque no toma en cuenta al cuadrado.

De acuerdo a la longitud de los lados une al cuadrado y al rectángulo, con esa misma característica une dos trapecios. Posteriormente, vemos que usa otro color, el cual nos indica que ahora hace la clasificación de acuerdo con las diagonales y une un cuadrilátero con un cometa y el cometa con el rombo.

Se puede interpretar como que un trapecio rectángulo es un caso particular de trapecio, Luego toma un cuadrilátero general, sin lados iguales por pares, luego al rombo que tiene cuatro lados iguales, de ahí se va al rectángulo y también del paralelogramo al rectángulo.

Esto da pauta a pensar que el maestro elige el prototipo de la figura para el concepto que quiere representar. Él muestra una clasificación partitiva.

La maestra con clave M1 muestra la siguiente clasificación.

	A las figuras originales les escribió letras para después clasificarlas	De acuerdo con la longitud de los lados
M1		

Para llevar a cabo su clasificación escribe letras en las figuras, hace uso de la clasificación de a cuerdo con la longitud de sus lados.

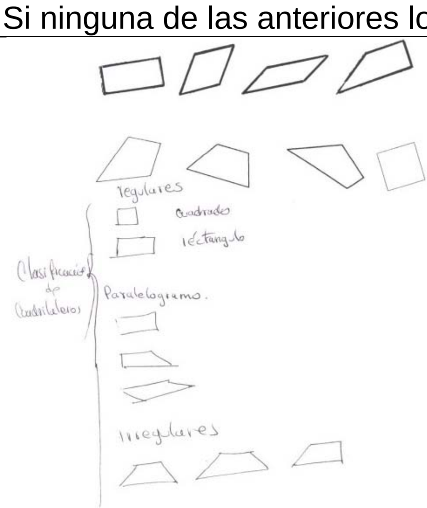
Presentan tres conjuntos separados y dice que el rectángulo, el rombo, romboide y el cuadrado tienen dos pares de lados con longitudes iguales.

En otro conjunto ubica al papalote y al cuadrilátero general, diciendo que son figuras que tienen todos los lados con longitudes diferentes; parece que no identifica que el cometa tiene dos pares de lados con longitudes iguales (recordemos que a esta figura en la fase cero ella le llama rombo, y de antemano sabemos que ella define a los rombos como figuras que pueden no tienen los lados iguales).

Finalmente agrupa al trapecio rectángulo y al trapecio escaleno, diciendo que son figuras que tienen un par de lados con longitudes iguales. (Lo que no es cierto en el caso del trapecio escaleno).

Podemos ver claramente que las definiciones que expuso la maestra durante el taller la condujeron a clasificar a las figuras de esa manera. Así pues, la maestra hace uso de clasificaciones partitivas o bien de definiciones excluyentes.

La maestra con clave M3 decide hacer su propia clasificación.

	Si ninguna de las anteriores lo convence dibuje su propia clasificación.
M3	

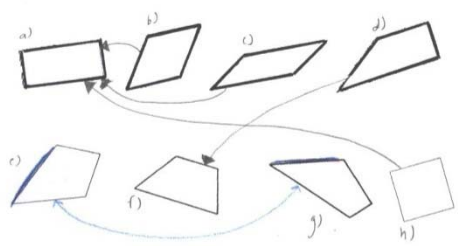
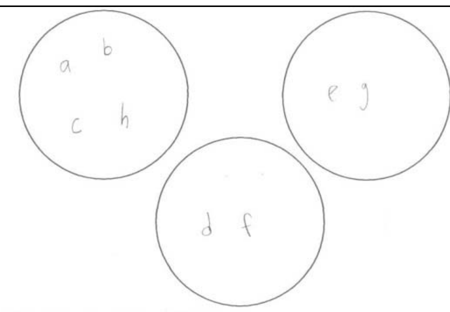
La profesora dibuja algunas figuras y los llama cuadriláteros, estos a su vez los separa en regulares (cuadrado y rectángulo), luego en paralelogramos (rectángulo, trapecio y romboide) y finalmente escribe cuadriláteros irregulares (trapecio escaleno, trapecio rectángulo).

La maestra hace uso no sólo de una clasificación partitiva, sino que sus criterios son variables. Al juntar cuadrado y rectángulo bajo el nombre de regulares, podría pensarse que para ella “regular” significa que tienen ángulos rectos.

En el caso del conjunto que ella denomina “paralelogramos” incluye un trapecio rectángulo, lo que lleva a pensar que para ella los paralelogramos son figuras con al menos un par de lados paralelos. Sin embargo no incluye a los otros trapecios y los manda a otro conjunto que denomina irregulares, lo que lleva a pensar de nuevo que la “regularidad” para ella está relacionada con tener ángulos rectos.

El trapecio rectángulo aparece en paralelogramos y en irregulares, por lo que puede pensarse que hace dos tipos de clasificaciones Por un lado se manifiesta partitiva y por otro parece ser jerárquica.

La maestra con clave M4 hace dos clasificaciones en seguida se muestra.

	Una con flechas los siguientes cuadriláteros. La flecha debe indicar que el cuadrilátero que está al inicio de la flecha es un caso particular del cuadrilátero que está a la derecha de la punta de la flecha.	De acuerdo con la longitud de los lados.
M4		

Así pues manifiesta que:

El cuadrado es un caso particular del rectángulo.

El paralelogramo es un caso particular del rectángulo.

El rombo es un caso particular del rectángulo.

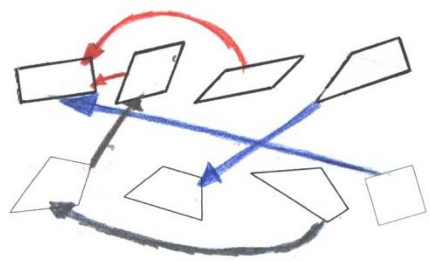
El trapecio rectángulo es un caso particular del trapecio escaleno.

Se puede ver que la maestra muestra confusión en sus concepciones sobre lo que es un caso particular. El rectángulo y el rombo son casos particulares de paralelogramos. Para el papalote y el cuadrilátero general la flecha va de ida y vuelta. Se puede interpretar como que el papalote es un caso particular del cuadrilátero y el cuadrilátero es un caso particular del papalote o que ambos son cuadriláteros que no tiene más características particulares.

La maestra a lo largo del taller en muchas ocasiones mostró hacer clasificaciones jerárquicas y en esta última ficha intenta hacerlo de nuevo, sin embargo, no toma en cuenta a todas las figuras y termina haciendo una clasificación mixta.

La segunda clasificación la hace de acuerdo a la longitud de los lados, pero no la toma en cuenta. Ya que se pudo notar que escribe lo mismo que la maestra con clave M1, sin que hubiera sido comentada dicha clasificación.

La maestra con clave M5 hace su clasificación usando flechas y colores.

	Una con flechas los siguientes cuadriláteros. La flecha debe indicar que el cuadrilátero que está al inicio de la flecha es un caso particular del cuadrilátero que está a la derecha de la punta de la flecha.
M5	

Lo que escribió se puede interpretar como:

El cuadrado es un caso particular de un rectángulo.

El romboide es un caso particular del rectángulo.

El rombo es un caso particular del rectángulo.

El papalote es un caso particular del rombo.

El cuadrilátero es un caso particular del papalote.

El trapecio rectángulo es un caso particular del trapecio escaleno.

A lo largo del taller la maestra realizó clasificaciones jerárquicas y en esta última parte hace un buen intento, pero podemos notar que sigue confundida. Además de que hace una clasificación más bien partitiva.

4.6 Conclusiones obtenidas del análisis

La lectura y análisis de las respuestas de los maestros a los cuestionarios, así como de las transcripciones de las discusiones surgidas a lo largo del taller permiten dar respuesta a las preguntas de investigación planteadas inicialmente. A continuación se responde a esas preguntas. Iniciamos con las dos primeras:

- ¿Qué concepciones sobre los cuadriláteros tienen los maestros que participen en el taller?
- ¿Qué cuadriláteros reconocen los maestros que participen en el taller?

Antes de comentar las concepciones y conocimientos de los maestros vale la pena comentar que no existe un acuerdo general respecto a los nombres de las cuadriláteros en los libros de texto de matemáticas o de geometría. Ni siquiera en los libros de matemáticas de primaria para el niño. En éstos se usan indistintamente los términos paralelogramo y romboide, aunque un análisis más a fondo parece indicar que implícitamente, el término romboide se refiere a los paralelogramos con lados oblicuos.

Para algunos autores, un trapezoide es un cuadrilátero que no tiene lados paralelos. En otros casos un trapezoide es un trapecio escaleno.

Con esto en mente, podemos resumir las concepciones de los maestros sobre los cuadriláteros a partir del análisis aplicado a las respuestas a las preguntas del cuestionario aplicado el primer día del taller:

- Los maestros no tienen definiciones precisas y claras sobre los diferentes cuadriláteros y esto se evidencia en las incongruencias de algunas de sus respuestas.
- Los maestros conocen los nombres de la mayoría de los cuadriláteros que se estudian en la escuela primaria y secundaria.
- El conocimiento de los cuadriláteros que tienen los maestros está relacionado con el reconocimiento de prototipos: pueden ser capaces de reconocer algunas figuras como el cuadrado, rectángulo, rombo pero desconocen sus características y, por tanto, fallan cuando tienen que identificarlas en dibujos en los que no aparecen de manera aislada y en sus explicaciones hipotéticas a los niños.
- El rombo es una figura que no está completamente asimilada por los maestros. No todos lo identifican como un cuadrilátero de cuatro lados iguales, algunos explícitamente mencionan que no es necesario que así sea y llaman indistintamente rombo y papalote a estos últimos.
- Aunque ni el rombo ni el papalote les fueron presentados en sus posiciones prototípicas, es posible que para ellos el papalote sea un rombo porque comparte el tener diagonales de diferente longitud y perpendicular entre si.

- Para algunos maestros un paralelogramo tiene necesariamente lados oblicuos. Sólo algunos nombran romboide a este tipo de paralelogramo, para otros los papalotes son romboides; para otros los papalotes son trapezoides.
- Ocho de nueve maestros no identifican los trapecios en el último ejercicio del cuestionario. Algunos parecen confundir este término con rombo, esto sería correcto si esos maestros consideraran a los paralelogramos como casos particulares de los trapecios, pero al revisar otras respuestas de estos maestros no parece ser el caso. De hecho uno de estos maestros piensa que el trapecio es un caso particular de paralelogramo.

Sobre la siguiente pregunta:
¿Cómo clasifican los cuadriláteros los maestros de secundaria que participen en el taller?

Las respuestas dadas por los maestros en el cuestionario inicial, así como algunos de los problemas que tuvieron para desarrollar las actividades del taller muestran que los maestros tienen problemas para clasificar los cuadriláteros. Ni siquiera puede decirse que algunos maestros utilicen clasificaciones jerárquicas y otros partitivas, ya que aunque su desempeño muestra preferencia por alguna de estas dos maneras de clasificarlos, sus criterios de clasificación no son constantes, cambian de criterios de un ejemplo a otro y contradicen sus propias definiciones. En resumen:

- La mayoría de los maestros utilizan clasificaciones partitivas, pero no consistentemente.
- Algunos maestros utilizan clasificaciones jerárquicas y partitivas pero no de manera sistemática.
- Una maestra usa clasificaciones jerárquicas y reconoce a los cuadrados como casos particulares de los rectángulos y los rombos, pero durante el taller manifiesta ideas que contradicen sus propias clasificaciones.

La última pregunta de investigación era:

- ¿Influyen positivamente las actividades con geometría dinámica para que los maestros que participen en el taller cambien algunas de sus concepciones con respecto a los cuadriláteros, así como su manera de clasificarlos?

Sobre esto podemos decir que el taller no pudo influir mayormente en los maestros a modo de que se lograrán reconceptualizaciones importantes, ya que el taller fue muy breve y se dio como una experiencia aislada. Sin embargo, el taller sí logró que los maestros cuestionaran algunas de sus concepciones. En muchos casos fue evidente que las creencias de los maestros eran puestas en duda al encontrar que habiendo utilizado correctamente las propiedades de una figura para dibujarla con Cabri, ésta se deformaba sin perder estos atributos críticos convirtiéndose en casos particulares de esas mismas figuras, mismos que para ellos no podían pertenecer a esa clase dado que ellos atribuían a las figuras originales otros atributos extra que no habían usado al hacer el dibujo. Por ejemplo, un rectángulo era dibujado sobre la base de ser un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos, pero al poder transformarlo en cuadrado esto les causaba un conflicto difícil de resolver. Sólo algunos lograron resolverlo y sólo en algunos casos, viendo que lo que ellos creían figuras totalmente distintas eran en realidad casos particulares de las figuras dibujadas.

Algunas explicaciones sobre los resultados obtenidos se enlistan a continuación:

- Uso casi exclusivo de representaciones gráficas estereotipadas que se presentan en los libros de texto.
- Ausencia de definiciones claras y explícitas de las figuras en los materiales de apoyo que la SEP brinda a los maestros.
- Ausencia absoluta en los materiales de la SEP y en otros libros de una discusión acerca de los diferentes tipos de definiciones y de clasificaciones que pueden hacerse con las figuras geométricas, así como de su funcionalidad.

- Las creencias de los maestros acerca de los cuadriláteros y su clasificación, adquiridas durante su paso por las escuelas están muy arraigadas y son difíciles de cambiar, sobretodo en un taller tan corto y aislado.

4.7 Algunos resultados adicionales

Además de lo encontrado acerca de las preguntas de investigación, algunos resultados colaterales que vale la pena mencionar son los siguientes:

- El lenguaje geométrico que usaron los maestros de este estudio frecuentemente fue pobre e incorrecto, quizá debido al poco contacto que se tiene con los temas de geometría.
- La mayoría de los maestros que participaron en el taller desconocen la manera aceptada de nombrar los cuadriláteros usando sus vértices, es decir, pasan por alto que se esto debe hacerse iniciando con la letra de un vértice y luego hacia la |derecha, en sentido contrario a las manecillas del reloj.
- La preocupación e insistencia de estos maestros porque el taller se llevara a cabo refleja su interés por actualizarse en cuestiones geométricas usando la computadora.

La mayoría de las preguntas y actividades propuestas en el taller dieron lugar a que los maestros reflexionaran sobre muchos conceptos geométricos que aparentemente son fáciles, con ello podemos constatar lo conveniente de presentar a los maestros situaciones didácticas hipotéticas así como actividades que los lleven a reflexionar sobre sus propias concepciones y conocimientos.

El potencial del programa Cabri ha sido demostrado por muchas investigaciones, sin embargo existe poca oferta para que los maestros aprendan a utilizarlo y lo apliquen tanto para mejorar sus propios conocimientos como para preparar materiales para sus clases y utilizarlo en sus propias aulas.

BIBLIOGRAFIA

Arceo, E. (1999) ¿Problemas de geometría o problemas con la geometría? *Educación Matemática***.** 11 (1), 25- 45.

Barrón, H. (2005). *Matemáticas 1, Ábaco*. México: Ed. Caleidoscopio.

Balderas, V. (2005) *Matemáticas 1*. México: Ed. Noriega.

Brown, C. A., y Cooney, T. J. (1982). Research on teacher education: A philosophical orientation. *Journal of Research and Development in Education*, 15 (4), 13-18.

Carbó, C., Galera, P. y Ruiz, J. (2002). El espacio en forma en Calvo, X. (Ed.) *La geometría de las ideas del espacio al espacio de las ideas en el aula*. México: Editorial Laboratorio Educativo. Págs. 115-125.

Cortina, J. L. (en prensa). *El aprendizaje de las matemáticas en Iberoamérica según lo reportado en el documento PISA 2006, Science Competencies for Tomorrow's World. Una reseña critica.* Ejemplar proporcionado por el autor.

De Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the learning of mathematics. 14 (1), 11-18.*

De Villiers, M. *(1996) The future of Secondary Shool Geometry. Recuperado de* http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/future.pdf *el 15 de febrero de 2008.*

Ernest, P. (1988). The impact of Beliefs on the teaching of Mathematics, (Ed) *Mathematics Teaching.* London. Págs. 249 – 254.

Excale, Procesos de Construcción y características básicas. Los temas de la Evaluación, Colección de folletos no. 8. INEE 2005

Fortuny M.J. (2002). *La educación geométrica 12-16. Sistemática para su implementación* en Calvo, X. (Ed.) *La geometría de las ideas del espacio al espacio de las ideas en el aula*. México: Editorial Laboratorio Educativo. Págs. 105-113.

Giménez, J., Llinares, S y Sánchez, V. (1996). *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática*. Granada: Comares.

Guzmán, M. L. (2000). Formación, concepciones y práctica de los profesores de matemáticas. *Educación Matemática*. 12, (2). 139-140.

Hershkowitz, R. (1990) Psychological Aspects of Learning Geometry. En *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Gran Bretaña: Cambridge University Press. Págs. 70-95.

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving matematical explanations. *Educational Studies in Mathematics 44 (1-3)***,** 55-85.

Monaghan, F. (2000). What difference does it make? Children`s views of the differences between some quadrilaterals. *Educational Studies in Mathematics 42*(2), 179-196.

Mora, J. A. (2002). Los recursos didácticos en el aprendizaje de la geometría en Calvo, X. (Ed.) *La geometría de las ideas del espacio al espacio de las ideas en el aula*. México: Editorial Laboratorio Educativo. Págs. 33-55.

Moreno, L. y Waldegg, G. (2004). *Las tecnologías en la educación matemática. Aprendizaje, matemáticas y tecnología*. *Una visión integral para el maestro*. México: Santillana.

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática.* (Versión en castellano realizada por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Basada en la versión original del NCTM, de los Estados Unidos de Norteamérica).

Owens, K. y Outhred, L. (2006). The complexity of learning geometry and measurement en Gutiérrez, A. y Boero, P. (Eds.) *Handbook of research on the Psychology of mathematics Education. Past Present and Future*. The Netherlands: Sense Publishers. Págs. 83 a 115.

Pérez, R. (2002). Construir la geometría en Calvo, X. (Ed.) *La geometría de las ideas del espacio al espacio de las ideas en el aula*. México: Editorial Laboratorio Educativo. Págs. 11-31.

Piaget, J., Inhelder, B. y Szeminska, A. (1970). *The child's conception of geometry*. Londres, GB: Routledge and Kegan Paul.

Rico, L., y Segovia, I. (2000). Representación y resolución de problemas geométricos por profesores de metamatemáticas en formación. *Educación matemática.* 12 (2), 5-26.

Rodríguez, G., Flores, G. y García, E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa*. México: Ediciones Aljibe.

Sáiz, M. (2002). *El Pensamiento del Maestro de Primaria acerca del Concepto Volumen y de su Enseñanza*. Tesis doctoral. México: Cinvestav.

Sandoval, F. (2005). *Matemáticas 1, a partir de la solución de problemas*. México: Fernández editores.

SEP. (1997). Libro para el maestro. Educación Secundaria, matemáticas.
Secretaría de Educación Pública. (1993). Educación básica, Secundaria. Plan y Programas de estudio.

SEP. (2006). Educación básica, Secundaria. Programas de estudio, matemáticas.

SEP. (2001). Fichero de actividades didácticas. Educación Secundaria, matemáticas.

Szendrei, J. (1996). Concrete Materials in the Classroom, en *International Handbook of Mathematics Education*. Bishop et al. (Eds.). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Thompson, A. G. (1992). Creencias y concepciones de los maestros, síntesis de la investigación, (127-146). En *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Mac Millan.

Van Hiele, P.M. (2004). The Child's Thought and Geometry en Carpenter, Dossey and Koehler (Eds.) *Classics in Mathematics Education Research.* EUA: NCTM. Págs. 60-66.

Vinner, S. y Tall D. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics 12* (2), 151-169.

ANEXO UNO

TALLER DE DOCE HORAS

“Uso de Cabri-géomètre en la enseñanza de la geometría”

Nombre del taller: Uso de Cabri-géomètre en la enseñanza de la geometría.

Objetivo del taller: Proporcionar una herramienta a los profesores que les permita mejorar sus clases de geometría y lograr que sus alumnos tengan un mejor desempeño en esta rama de las matemáticas.

FASE UNO

Objetivo General de la fase: Que los participantes adquieran experiencia con Cabri-géomètre y que sean introducidos a la restricción de robustez de una figura.

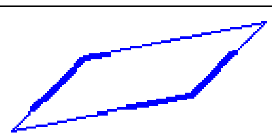
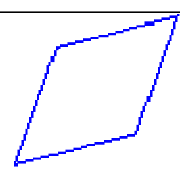
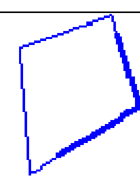
Programa de actividades:

A) Los asistentes resolverán el siguiente cuestionario exploratorio (esta parte se planteó con el fin de evaluar si el ambiente de geometría dinámica les ayudaba a cambiar o conservar algunas de las ideas, pensamientos u opiniones que ellos tuvieran acerca de los cuadriláteros).

Cuestionario.

Nombre:____

Escriba los nombres con los que usted conoce a las siguientes figuras.

 ____________________	 ____________________	 ____________________

1. Conteste de acuerdo con su experiencia.

Ana es profesora de secundaria y le preguntó a un alumno: ¿cuál es la diferencia entre un cuadrado y un rectángulo?

> El alumno respondió:
>
> “La diferencia es que el cuadrado tiene cuatro ángulos rectos y un rectángulo todos los lados opuestos son iguales”.

En el lugar de Ana, usted ¿qué le diría al alumno?

____

Después Ana le preguntó: ¿Cuál es la diferencia entre un rectángulo y un paralelogramo?

> El alumno contestó:
>
> “Un paralelogramo tiene dos lados cortos y dos lados largos también, pero los lados cortos están como diagonales”.

¿Usted qué le diría al alumno?

___

Cuando Ana le preguntó la diferencia entre un cuadrado y un rombo, el alumno contestó "sólo es la manera en que están colocados".

¿Usted qué le diría al alumno?

___

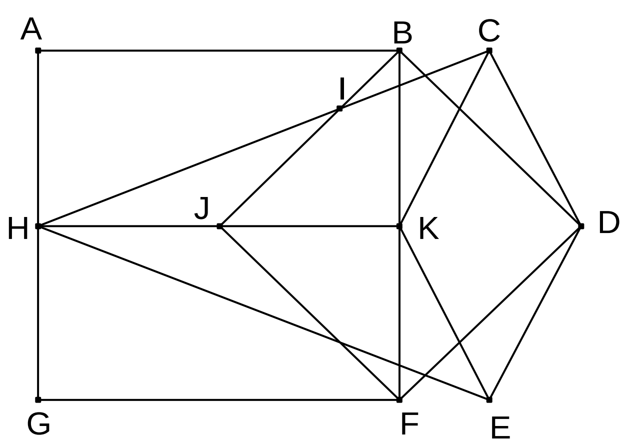
Cuando Ana le pregunto cuál es la diferencia entre un trapecio y un paralelogramo, el alumno contestó: "El trapecio es un paralelogramo".

¿Usted qué le diría al alumno?

___

2. De la siguiente figura por favor anote lo que se pide:

¿Qué puntos describen un rectángulo? ____________________



¿Qué puntos describen un cuadrado?______________________

¿Qué puntos describen un rombo?________________________

¿Qué puntos describen un trapecio?_______________________

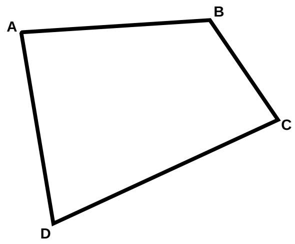
¿Qué otros cuadriláteros encuentra en la figura? Escriba sus nombres geométricos y las letras que los forman.

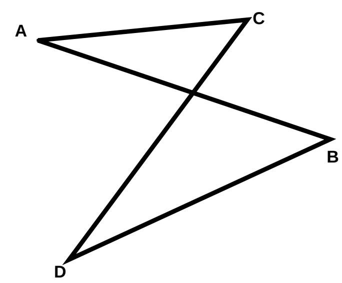
___

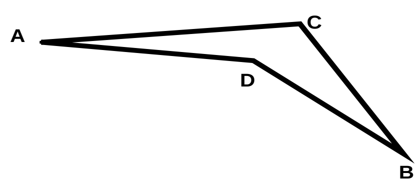
3. La maestra Luz dijo que todas las siguientes figuras son cuadriláteros.

¿Usted qué opina?

___







Después de que los maestros respondan al cuestionario anterior, se pasa a la parte B.

B) Explicación sobre el origen e importancia del uso de Cabri-géomètre.

Cabri-géomètre (de Cahier brouillon interactif pour I' apprentissage de la géomètrie) que traducido al español significa "Cuaderno de borradores de aprendizaje interactivo de la geometría"

Se explica al principio que en este taller se iban a construir figuras, no dibujos.

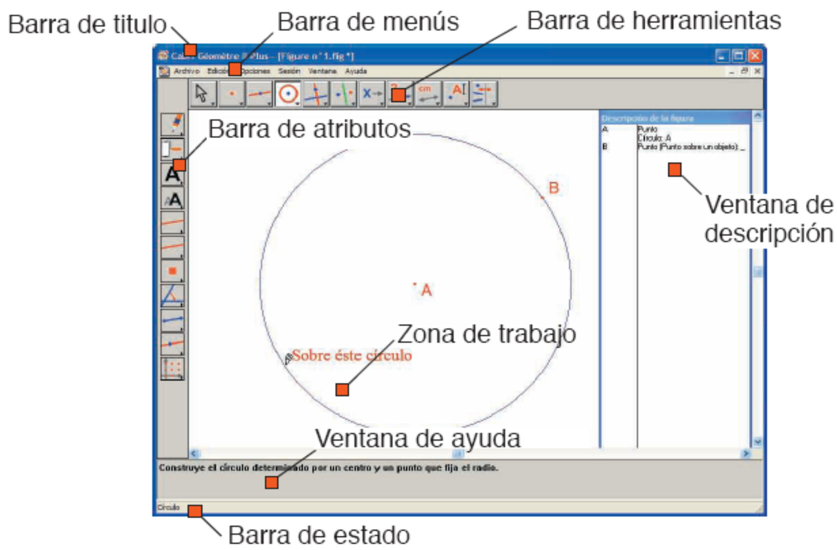
Donde:

"**Dibujo** se refiere a la entidad material, mientras **figura** se refiere a un objeto teórico". En términos de un paquete de geometría dinámica, un **dibujo** puede ser una reunión de objetos geométricos que se parecen mucho a la construcción intentada (algo que puede ser hecho para "parecer correcto"). En contraste, una **figura** captura adicionalmente las relaciones entre los objetos de tal manera que la figura es invariable cuando cualquier objeto básico usado en la construcción se arrastra (en otras palabras, que pasa la prueba del arrastre). (Laborde 1993, p.49 citado por Jones, 2000: 53).

Se dirá, que una figura consiste de relaciones y que existen jerarquías de dependencias

La tercera parte de la primera fase consiste en la presentación del software.

C) Se presenta la pantalla principal de Cabri, se muestran las diferentes barras y se explica el uso del Mouse.

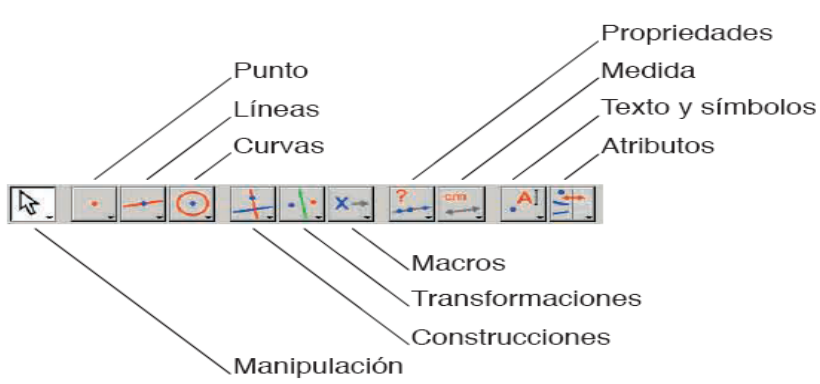


La ***barra de título*** indica el nombre del archivo que contiene la figura, o Figura nº 1, 2... si a la figura no se le ha asignado aún un nombre.

La ***barra de menús*** permite acceder a los comandos de la aplicación, que corresponden a los comandos usuales encontrados usualmente en los softwares.

La ***barra de herramientas*** proporciona las herramientas que permiten crear y manipular la figura. Está constituida de varios paquetes de herramientas, a cada uno de los cuales contiene, una herramienta visible que corresponde a un icono de la barra.

La herramienta activa se representa por un botón oprimido, con un fondo blanco. Las otras herramientas se representan por botones no oprimidos, con un fondo gris. Un clic corto sobre un botón activa la herramienta correspondiente. Una presión prolongada sobre un botón despliega el paquete de herramientas y permite ahí elegir otra herramienta. Esta otra herramienta será la que esté visible de ese paquete y la que estará activa.



Nota: Si se desea borrar un trazo se selecciona manipulación, se selecciona el trazo y se oprime la tecla supr.

La ***barra de estado*** en la parte inferior de la ventana indica de forma permanente la herramienta activa.

La ***barra de atributos*** permite modificar los atributos de los objetos: colores, estilos, tamaños… Se activa con el comando [Opciones] Mostrar los atributos, y se oculta con
[Opciones] Ocultar los atributos, o con la tecla F9.

La ***ventana de ayuda*** proporciona una ayuda breve sobre la herramienta seleccionada. Indica los objetos esperados por la herramienta y lo que será construido. Se activa/oculta con la tecla F1.

La ***ventana de descripción*** (Windows solamente) contiene una descripción de la figura en formato de texto. Ahí se encuentra el conjunto de los objetos construidos y su método de construcción. Se activa con el comando [Opciones] Mostrar la descripción y se oculta con [Opciones] Ocultar la descripción, o con la tecla F10.

Finalmente, la ***zona de trabajo*** representa una porción de la hoja de trabajo. Es en la zona de trabajo donde se efectúan las construcciones geométricas.

D) Se explica la utilización del ratón.

Las acciones sobre el ratón son el desplazamiento, la presión sobre un botón y la liberación de un botón. En ausencia de indicación contraria, se tratará del botón izquierdo del ratón.

E) Para poder familiarizarse con el programa mediante la manipulación elemental de los menús y el uso del mouse, se pide a los integrantes del taller que hagan construcciones sin fines directamente geométricos, se dejará que creen libremente dibujos y personajes.

F) Para seguir con el aprendizaje del uso de Cabri se proporcionarán fichas con actividades que conduzcan a la exploración y conocimiento de Cabri, así mismo se empezará a descubrir propiedades que se relacionan con:

1. El desplazamiento.
2. Las dependencias que se generan de acuerdo a los trazos que se realizan.
3. La robustez de una figura (si a la figura se le desplaza no debe perder sus características geométricas).

Ficha 1.1 Título: Rectas y segmentos.

Conocimientos necesarios:

a) Matemáticos: Recta y segmento.
b) Cabri: Iniciación (menús y mouse)

Objetivo específico: Conservación de una propiedad por desplazamiento, punto de intersección, punto base. Nombrar un punto.

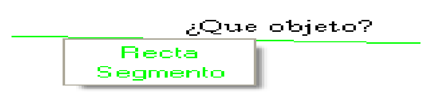
ACCIONES:

e) En la barra de menús seleccione Sesión y presione donde dice “comenzar a guardar”, escriba su nombre y sesión 1.1.
f) Construya un segmento cualquiera AB y una recta que contenga a este segmento, llámela r.
g) Determine un punto sobre la recta AB.

Nota: Atención cuando se quiere definir un punto sobre el segmento AB, Cabri-géomètre no sabe si quiere ubicarlo en la recta o el segmento, así que pregunta ¿Qué objeto?

¿Qué objeto?

Cuando vea la pregunta ¿qué objeto?, apriete el botón del Mouse (manténgalo apretado) y aparecerá una lista en forma de menú sobre el cual usted debe elegir la opción que desean. Aquí usted tendría este menú:



- Dejando el botón del mouse apretado desplace el mouse sobre “este segmento” y suéltelo. Nombre P al punto creado sobre el segmento AB.
- Ubique un punto M sobre la recta r (utilice “Punto sobre el objeto” del menú Puntos).
- Si obtiene otra vez el mensaje “Qué objeto”, desplace el mouse sobre la expresión “esta recta” del menú.

Desplace el punto M. ¿Por dónde puede desplazarse?

Desplace el punto P. ¿Por dónde puede desplazarse?

h) En la barra de menús seleccione Sesión y presione donde dice “detener guardado”.

Lo que acaba de observar le va a ser de utilidad para otras construcciones, así que recuérdelo siempre.

Ficha 1.2 Título: Simétrico de un punto cualquiera.

Conocimientos necesarios:

a) Matemáticos: Trazo del simétrico respecto a una recta dada de un punto dado con regla y compás.
b) Cabri: Iniciación con menús y mouse.

Objetivo específico: Conservación de una propiedad por desplazamiento, punto de intersección, punto base. Nombrar un punto.

ACCIONES:

f) En la barra de menús seleccione Sesión y presione donde dice “comenzar a guardar”, escriba su nombre y sesión 1.2.
g) Determine un punto cualquiera (punto del botón puntos).
h) Nombre P al punto (etiqueta del botón ver).
i) Dibuje una recta cualquiera y llámela r.
j) Construya el simétrico de P respecto a r y llámelo P’.

Indicaciones especiales:

Desplace P, observen si P’ conserva la propiedad de simetría. Si no sucede de esa manera se deberá rehacer el procedimiento.

Manipule el punto P. Describa qué ocurre:

Manipule el punto P’. Describa qué sucede:

¿Por qué cree que suceda lo que describió en la pregunta anterior?

Desplace la recta r y vea qué sucede con P’. Si P’ no cambia, entonces su construcción está mal hecha y debe volver a empezar. Borre todo e inicie de nuevo desde el inciso b.

Cuando al mover el punto P, P' siga siendo el simétrico de P y cuando al mover la recta r, el punto P' siga siendo el simétrico de P, usted habrá terminado.

k) En la barra de menús seleccione Sesión y presione donde dice "detener guardado".

Ficha 1.3 Título: Perpendiculares.

Conocimientos necesarios:

a) Matemáticos: Trazo de rectas perpendiculares con regla y compás.
b) Cabri: Iniciación con menús y Mouse.

Objetivo específico: Conservación de una propiedad por desplazamiento, punto de intersección, punto base; nombrar una recta y un punto.

ACCIONES:

a) En la barra de menús seleccione Sesión y presione donde dice "comenzar a guardar", escriba su nombre y sesión 1.3
b) Trace una recta perpendicular AB por el punto C.
c) Esta recta corta a AB en el punto H. (Use el comando etiqueta del botón Ver).
d) Determine la perpendicular a HC por C. Llamen d a la recta.
e) Seleccione "Sesión" en la barra de menús y presione "detener guardado".

Indicaciones especiales:

Para nombrar al punto acerquen el Mouse hasta que salga el letrero "punto de intersección" o con la acción del botón puntos.

Nota:

Se puede mejorar la presentación del dibujo ocultando las rectas reemplazándolas por segmentos. Para ocultar utilicen la opción ocultar/ mostrar del botón Dibujo. Cuando hayan terminado de ocultar hagan un clic con el Mouse en la hoja.

En el recuadro escriba qué propiedad deben tener las rectas perpendiculares:

Ficha 1.3.1 Título: Perpendiculares.

Conocimientos necesarios:

a) Matemáticos: Trazo de rectas perpendiculares con regla y compás.
b) Cabri: Iniciación con menús y Mouse.

Objetivo específico: Conservación de una propiedad por desplazamiento, punto de intersección, punto base. Nombrar una recta y un punto. Jerarquía de dependencias.

ACCIONES:

a) En la barra de menús seleccione Sesión y presione donde dice "comenzar a guardar", escriba su nombre y sesión 1.3.1.
b) Determinen una recta BC y un punto A que no le pertenezca.
c) Luego tracen la recta CA.
d) Determinen la recta d1 perpendicular a BC por A y la recta d2 perpendicular a CA por B.
e) Las rectas d1 y d2 se cortan en el punto H
f) Determinen la recta CH.
g) Tracen la perpendicular AB por C.

Escriba en el recuadro las observaciones que pueda hacer sobre el punto H.
¿Dónde se encuentra ubicado?, ¿Si desplazaran las rectas qué pasaría con H?

Desplace uno detrás del otro los puntos A, B o C y observe la figura:
¿Las observaciones anteriores siguen siendo verdaderas?

h) Elija el menú "Sesión", despliéguelo y elija "detener guardado".

Ficha 1.4 Título: Paralelas.

Conocimientos necesarios:

a) Matemáticos: Trazo de rectas paralelas con regla y compás.
b) Cabri: Iniciación con menús y Mouse.

Objetivo especifico: Conservación de una propiedad por desplazamiento, punto de intersección, punto base; nombrar una recta y un punto y Jerarquía de dependencias.

ACCIONES:

d) En la barra de menús seleccione Sesión y presione donde dice "comenzar a guardar", escriba su nombres y sesión 1.4.

e) Dibuje una recta cualquiera y llámela r. Elija un punto A que no pertenezca a la recta r.
f) Trace por el punto A una recta que sea paralela a la recta r.
g) Llame a esta recta d.

¿Puede mover el punto A?

Si su respuesta es afirmativa, explique qué sucede con las rectas r y d al desplazar A.

¿Puede mover las rectas d y r?

Si puede mover alguna de las rectas hágalo y observe qué pasa con la otra recta. Describa sus observaciones en el recuadro siguiente:

Si al mover la recta r o el punto A, la recta d sigue siendo paralela a r, usted ha terminado. Si no, debe borrar todo y volver a empezar desde el inciso b. Si ya quedó bien, pase al inciso e.

e) Elija el menú "Sesión", despliéguelo y elija "detener guardado".

Ficha 1.5 Título: Desplazamiento

Conocimientos necesarios:

a) Matemáticos: recta, segmento, circunferencia.
b) Cabri: Iniciación (Menús y mouse).

Objetivo específico: Conservación de una propiedad por desplazamiento, punto de intersección, punto base y nombrar un punto.

ACCIONES:

a) En la barra de menús seleccione Sesión y presione donde dice "comenzar a guardar", escriba su nombre y sesión 1.5.

b) Determine dos puntos cualesquiera (punto del botón puntos).
c) Nombre A y B, respectivamente, a los dos puntos (etiqueta del botón ver).
d) Construya una circunferencia utilizando como centro el punto A y use el punto B para determinar el radio (botón curvas).
e) Nombre a la circunferencia con la letra C.
f) Determine una recta que pase por el centro de la circunferencia y que no pase por B. Llame d a dicha recta.

Indicaciones especiales:

Desplace A, luego B y observe si la recta d pasa por el centro de la circunferencia. Si no sucede de esa manera se deberá borrar todo e iniciar en el inciso b; si al mover A y B la recta sigue pasando por el centro de la circunferencia vaya al inciso g.

g) La recta d corta a la circunferencia en dos puntos, llámelos R y S, respectivamente.

Atención: Para poder marcarlos, use el menú *Punto de Intersección* del botón *Puntos.*

h) Construya la recta BS y marque el punto medio del segmento BS, llámenlo M. (punto medio del menú construir).
i) Determine una recta que pase por M y que sea perpendicular a BS (recta perpendicular del botón construir). Desplace A, B y, después, todos los puntos que puedan moverse.
j) Anote en el cuadro todo lo que usted considere importante al observar la figura cuando desplazan los puntos.

Cuando se desplaza el …	Se mueven	No se mueven
Punto A		
Punto B		
Punto C		

k) Elija el menú “Sesión”, despliéguelo y elija “detener guardado”.

Para concluir con esta actividad se revisará la tabla de manera colectiva.
Se mencionará que Cabri tiene un orden explícito de construcción donde a veces, para los usuarios, el orden no es visto de manera clara, por ejemplo en Cabri-Géomètre se induce una orientación en los objetos: AB está orientado porque A es creado antes que B, en contraparte cuando se realiza el trazo con papel y lápiz estos objetos no tienen ninguna orientación a menos que se diga explícitamente. En una figura más elaborada esta organización produce una jerarquía

de dependencias, dado que cada parte de la construcción depende de algo creado antes. (Jones, 2000)

Ficha 1.5.1 Título: Desplazamiento

Conocimientos necesarios:

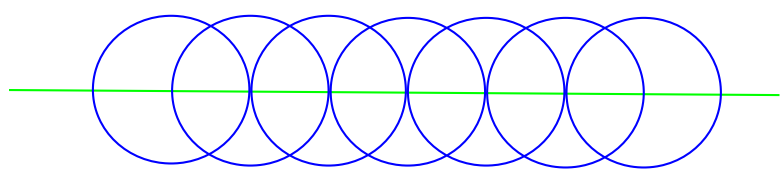
a) Matemáticos: recta, segmento, circunferencia.
b) Cabri: Iniciación (Menús y mouse).

Objetivos específicos:

a) Conservación de una propiedad por desplazamiento
b) Jerarquía de dependencia,

ACCIONES:

a) En la barra de menús seleccione Sesión y presione donde dice “comenzar a guardar”, escriba su nombre y sesión 1.5.1
b) Reproduzca con Cabri la siguiente figura.



Indicaciones especiales:

Desplace la figura, si observa que la figura se deforma se deberá comenzar el nuevo procedimiento.

Desplace las circunferencias y comente ampliamente en el recuadro lo que observó.

c) Elija el menú “Sesión”, despliéguelo y elija “detener guardado”.

En la clase se comunicarán los resultados para que se llegue a un acuerdo sobre lo encontrado. Podría ser el aspecto de dependencia funcional como es comprendido en el software, en cuanto a que algunos objetos pueden arrastrarse mientras otros no pueden.
Se espera que la noción de la restricción de robustez de una figura bajo arrastre se una con el uso de puntos de intersección para intentar mantener unida a la figura.

Ficha 1.5.2 Título: Desplazamiento

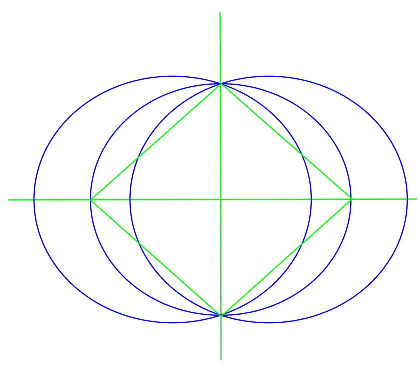
Conocimientos necesarios:

a) Matemáticos: recta, segmento, circunferencia.
b) Cabri: Iniciación (Menús y mouse).

Objetivo específico: Conservación de una propiedad por desplazamiento y Jerarquías de dependencias.

ACCIONES:

a) En la barra de menús seleccione Sesión y presione donde dice “comenzar a guardar”, escriba su nombre y sesión 1.5.2
b) Reproduzca con Cabri la siguiente figura.



Indicaciones especiales:

Desplace la figura, si observa que la figura se deforma se deberá borrar todo y comenzar de nuevo el procedimiento.

Desplace la figura y comente ampliamente lo que observa en el recuadro.

Si la figura no se deforma al hacer sus desplazamientos pase al inciso c).

c) Elija el menú “Sesión”, despliéguelo y elija “detener guardado”.

En la clase se comunicarán los resultados para que se llegue a un acuerdo sobre lo observado, esto podría ser sobre el aspecto de dependencia funcional, como es comprendido en el software en cuanto a que algunos objetos pueden arrastrarse mientras otros no pueden.

Se espera que la noción de la restricción de robustez de una figura bajo arrastre se una con el uso de puntos de intersección para intentar mantener unida a la figura.

FASE DOS

Objetivo: que los participantes profundicen en el significado de la noción de robustez de una figura relacionada con propiedades geométricas de la figura.

Programa de actividades:

A) Se proporcionarán fichas donde el participante del grupo anotará sus observaciones, comentarios y/o conclusiones

Ficha 2.1 Título: Construcción de un cuadrilátero.

Conocimientos necesarios:

a) Matemáticos: concepto de rectas perpendiculares, paralelas, concepto de cuadrilátero.
b) Cabri: uso de menús y mouse.

Objetivo específico: Conservación de una propiedad por desplazamiento, jerarquía de dependencias, así como su relación con las propiedades geométricas de la figura.

ACCIONES:

a) En la barra de menús seleccione Sesión y presione donde dice “comenzar a guardar”, escriba su nombre y sesión 2.1
b) Construya un cuadrilátero.
c) Nombre sus vértices A, B, C, D, respectivamente.

Al mover los vértices del cuadrilátero que observa:

____

Ficha 2.2 Título: Construcción del cuadrado

Conocimientos necesarios:

a) Matemáticos: concepto de: rectas perpendiculares, paralelas, concepto de cuadrado.
b) Cabri: Jerarquía de dependencias, iniciación a noción de robustez, uso de menús y mouse.

Objetivo específico: Conservación de una propiedad por desplazamiento, jerarquía de dependencias, así como su relación con las propiedades geométricas de la figura.

ACCIONES:

a) En la barra de menús seleccione Sesión y presione donde dice “comenzar a guardar”, escriba su nombre y sesión 2.2
b) Construya un cuadrado de manera que se pueda mover, agrandar o reducir pero que no se deforme, es decir que sus lados sigan siendo iguales entre sí.
c) Nombre sus vértices: A, B, C y D, respectivamente.

¿Puede mover los vértices? escriba en el recuadro lo que observó:

Ficha 2.3 Título: Construcción de un paralelogramo.

Conocimientos necesarios:

a) Matemáticos: concepto de: rectas paralelas, concepto de paralelogramo.

b) Cabri: Jerarquía de dependencias, iniciación a noción de robustez uso de menús y mouse.

Objetivo específico: Conservación de una propiedad por desplazamiento, jerarquía de dependencias, así como su relación con las propiedades geométricas de la figura.

ACCIONES:

a) En la barra de menús seleccione Sesión y presione donde dice “comenzar a guardar”, escriba su nombre y sesión 2.1
b) Construya un paralelogramo de modo tal que se pueda mover, cambiar de posición, agrandar o reducir pero que no pierda sus cualidades de paralelogramo.
c) Nombre sus vértices: P, Q, R y S, respectivamente.

¿Puede mover sus vértices?, ¿Cuáles sí y cuáles no?, ¿Qué sucede con la figura cuando se mueven los vértices? Escriba en el recuadro lo que observó.

Si al mover los vértices su paralelogramo no pierde la cualidad de tener dos pares de lados paralelos pase al punto d). Si pierde estas cualidades, borre todo y empiece de nuevo en el punto b).

d) Elija el menú “Sesión”, despliéguelo y elija “detener guardado”.

FASE TRES

Objetivo: que los participantes adquieran en la noción de robustez de una figura y que continúen relacionando dicha noción con propiedades geométricas de la figuras.

Actividades:

a) Construir un paralelogramo que no se deforme. Transformarlo en rectángulo y cuadrado.
b) Construir un rectángulo y al arrastrarlo ver que no se deforme pero que se puede transformar en un cuadrado.
c) Construir un rombo y que al arrastrarlo no se deforme pero ver que se puede transformar en un cuadrado.
d) Construir un trapecio que no se deforme pero que pueda ser transformado en un paralelogramo.
e) Construir un cometa que no se deforme pero se pueda transformar en rombo.
f) Completar una clasificación jerárquica de la familia de cuadriláteros y explicar las relaciones de esa familia.
g) Aplicar el cuestionario.

Ficha 3.1 Título: Transformaciones.

Conocimientos necesarios:

a) Matemáticos: concepto de paralelogramo, rectángulo y cuadrado.
b) Cabri: Trazo de rectas paralelas, perpendiculares, usando las herramientas del programa.

Objetivo específico: Conservación de las propiedades por desplazamiento.

Acciones:

a) En la barra de menús seleccione Sesión y presione donde dice “comenzar a guardar”, escriba su nombre y sesión 3.1
b) Construya un paralelogramo de manera que esta figura se pueda transformar en otras pero no deje de ser paralelogramo. ¿Se puede transformar en un rectángulo? _______ ¿en un cuadrado? ______ ¿en un rombo? ___________
c) Elija el menú “Sesión”, despliéguelo y elija “detener guardado”.

En el recuadro comente ampliamente sus observaciones, sus respuestas a las preguntas planteadas y obtenga alguna conclusión.

Ficha 3.2 Título: Transformaciones.

Conocimientos necesarios:

a) Matemáticos: concepto de cuadrado y de rectángulo.
b) Cabri: Trazo de rectas paralelas, perpendiculares, usando las herramientas del programa.

Objetivo específico: Conservación de las propiedades por desplazamiento,

Acciones:

a) En la barra de menús seleccione Sesión y presione donde dice “comenzar a guardar”, escriba su nombre y sesión 3.2
b) Construya un rectángulo de manera que no pierda la cualidad de tener cuatro ángulos rectos.
c) Mueva algunos puntos y vea si es posible que la figura obtenida al mover puntos sea un cuadrado.
d) Si es posible transformar el rectángulo en cuadrado ¿considera que su figura original está bien hecha? __________
e) Elija el menú “Sesión”, despliéguelo y elija “detener guardado”.

En el recuadro comente ampliamente sus observaciones, las respuestas a las preguntas planteadas y obtenga alguna conclusión.

Ficha 3.3 Título: Transformaciones.

Conocimientos necesarios:

a) Matemáticos: concepto de cuadrado y rombo.
b) Cabri: Trazo de rectas paralelas, perpendiculares, usando las herramientas del programa.

Objetivo específico: Conservación de las propiedades por desplazamiento,

Acciones:

a) En la barra de menús seleccione Sesión y presione donde dice “comenzar a guardar”, escriba su nombre y sesión 3.3
b) Construya un rombo de manera que esta figura se pueda transformar en otra figura, por ejemplo un cuadrado. ¿Sigue siendo un rombo? ________

c) Si su rombo se puede transformar en un cuadrado ¿considera que sus trazos están bien hechos? _________
d) Elija el menú “Sesión”, despliéguelo y elija “detener guardado”.

En el recuadro comente ampliamente sus observaciones, las respuestas a las preguntas planteadas y obtenga alguna conclusión.

Ficha 3.4
Título: Transformaciones.
Conocimientos necesarios:

a) Matemáticos: concepto de trapecio y paralelogramo.
b) Cabri: Trazo de rectas paralelas, perpendiculares, usando las herramientas del programa.

Objetivo específico: Conservación de las propiedades por desplazamiento.

Acciones:

a) En la barra de menús seleccione Sesión y presione donde dice “comenzar a guardar”, escriba su nombre y sesión 3.4
b) Construya un trapecio de manera que esta figura se pueda transformar en otras figuras sin dejar de tener las características de un trapecio, esto es, tener un par de lados paralelos.
c) Mueva algún punto y trate de transformar el trapecio en un paralelogramo (o romboide). ¿Es posible hacer esto? _____________
d) Si es posible transformar el trapecio en paralelogramo, ¿considera que su construcción está bien hecha? ___________________
e) Elija el menú “Sesión”, despliéguelo y elija “detener guardado”.

En el recuadro comente ampliamente sus observaciones, las respuestas a las preguntas planteadas y obtenga alguna conclusión.

Ficha 3.5 Título: Transformaciones.
Conocimientos necesarios:

a) Matemáticos: concepto de romboide y rombo.

b) Cabri: Trazo de rectas paralelas, perpendiculares, usando las herramientas del programa.

Objetivo específico: Conservación de las propiedades por desplazamiento.

Acciones:

a) En la barra de menús seleccione Sesión y presione donde dice “comenzar a guardar”, escriba su nombre y sesión 3.5
b) Construya un trapecio de manera que esta figura se pueda transformar en otras figuras sin dejar de ser trapecio. ¿Es posible transformarla en un paralelogramo? ________ ¿y en un rombo?
c) Si se puede transformar el trapecio en paralelogramo o rombo ¿considera que su construcción del trapecio fue correcta? ______
d) Elija el menú “Sesión”, despliéguelo y elija “detener guardado”.

En el recuadro comente ampliamente sus observaciones, las respuestas a las preguntas planteadas y obtenga alguna conclusión.

Ficha 3.6 Título: Relaciones entre cuadriláteros.

Conocimientos necesarios:

a) Matemáticos: conocer las propiedades de los cuadriláteros.
b) Discutir diferentes maneras de clasificar cuadriláteros.

Objetivo específico: Hacer una clasificación jerárquica de la familia de cuadriláteros y explicar las relaciones dentro de esa familia.

Acciones:

a) Los cuadriláteros se pueden clasificar de acuerdo con el paralelismo de sus lados o con el tamaño de sus lados o con características de sus diagonales. Una con flechas los siguientes cuadriláteros. La flecha debe indicar que el cuadrilátero que está al inicio de la flecha es un caso particular del cuadrilátero que está a la derecha de la punta de la flecha.
b) Si está aplicando o el paralelismo de los lados use una flecha de color rojo; si está aplicando la clasificación de acuerdo con la longitud de los lados use una flecha azul; si está aplicando características de las diagonales use algún otro color.

ANEXO DOS

Transcripción del video del taller

Simbología usada para la transcripción del taller:

Conductora: C
Participantes del taller: H1, H2, H3, M1, M2, M3, M4, M5, M6.

Desarrollo.

C: Buenas tardes debido a la falta de energía eléctrica empezamos un poco tarde gracias por esperar a que arreglaran la luz.

Bueno, el nombre del taller es: Uso de Cabri-géomètre en la enseñanza de la geometría.

El objetivo del taller es: Proporcionar una herramienta que les permita mejorar sus clases de geometría y lograr que sus alumnos tengan un mejor desempeño en esta rama de las matemáticas.

Empecemos con la fase cero, les voy a entregar un cuestionario y por favor contéstenlo.

Empezaremos por explicar que el programa Cabri-géomètre, es de origen francés significa; "Cuaderno de borradores de aprendizaje interactivo de la geometría"

Debe quedar muy claro que vamos a construir figuras no dibujos.

Un "**Dibujo** se refiere a la entidad material, mientras que una **figura** se refiere a un objeto teórico". En términos de un paquete de geometría dinámica, un **dibujo** puede ser una reunión de objetos geométricos que se parecen mucho a la construcción intentada, es decir; algo que puede ser hecho para "parecer correcto". En contraste, una **figura** captura adicionalmente las relaciones entre los objetos, de tal manera que la figura es invariable cuando cualquier objeto básico usado en la construcción se arrastra. (Laborde 1993, p.49 citado por Jones, 2000).

Que quede claro, que una figura consiste de relaciones y existen jerarquías de dependencias.

Esta es la pantalla principal de Cabri, y veremos las diferentes barras con las que consta Cabri, y vamos a aprender a usar el Mouse.

Esta es la barra de título, indica el nombre del archivo que contiene la figura, aparece Figura nº 1, 2... si, es que a la figura no se le ha dado un nombre.

Esta es la barra de menús, corresponde a los comandos usuales encontrados en los softwares.

La barra de herramientas, proporciona las herramientas que permiten crear y manipular la figura, esta constituida de varios paquetes de herramientas, conteniendo cada uno, una herramienta visible que corresponde a un icono de la barra.

La herramienta activa se representa por un botón oprimido, con un fondo blanco. Las otras herramientas se representan por botones no oprimidos, con un fondo gris. Un clic corto sobre un botón, activa la herramienta correspondiente. Una presión prolongada sobre un botón despliega el paquete de herramientas y permite ahí elegir otra herramienta. Esta otra herramienta será la que esté visible de ese paquete y la que estará activa.

La barra de estado en la parte inferior de la ventana, indica de forma permanente la herramienta activa.

La barra de atributos permite modificar los atributos de los objetos, como; colores, estilos, tamaños… Se activa con el comando opciones, donde dice "Mostrar los atributos", y se oculta con opciones, donde dice, "ocultar los atributos", ó con la tecla F9.

La ventana de ayuda proporciona una ayuda breve sobre la herramienta seleccionada. Indica los objetos esperados por la herramienta y lo que será construido. Se activa o se oculta con la tecla F1.

La ventana de descripción, contiene una descripción de la figura en formato de texto. Ahí se encuentra el conjunto de los objetos construidos y su método de construcción. Se activa con el comando de opciones y se oculta con el comando de opciones donde dice, "ocultar la descripción", ó con la tecla F10.

Finalmente, la zona de trabajo, es en la zona donde se efectúan las construcciones geométricas.

C: Bueno, hasta ahorita ya vimos que todos si pueden borrar sus figuras. Seguimos con la fase uno, sigan las instrucciones, ahí nos dice que se va ir haciendo con Cabri y así vamos a ir aprendiendo a utilizar el programa.

Recordemos que en una figura hay una relación de dependencias, ahorita las vamos a ir descubriendo.

Desarrollo de la ficha 1.1

C: Ficha 1.1, rectas y segmentos. Conocimientos necesarios, recta y segmento.

Aquí, les voy a pedir por favor que no vayan a utilizar la herramienta de paralelas. Lo que pasa es que por la premura de tiempo ya no pude quitar la herramienta, pero yo confió en que ustedes no la ocupen. Que no vayan hacer uso de sus herramientas, por que les piden que tracen un simétrico, después les piden que tracen perpendiculares, entonces por favor, en la barra de herramientas no hagan uso de ellas, bueno seguimos.

H3: Paralelas.

C: Paralelas, también perpendiculares y simétrico.

C: Bueno, aquí la ficha nos va a decir qué vamos a ir haciendo, pero sin usar esas herramientas. Entonces dice, objetivo específico: conservación de la propiedad por desplazamiento, punto de intersección, punto base, nombrar un punto. Vamos a ir haciendo las acciones que nos dicen en la barra de menús, seleccione sesión y ahí presione donde dice comenzar a guardar. Ahí le vamos a poner… escriba su nombre, lo van a guardar en el escritorio por favor, "guardar en", donde dice "guardar en", nos vamos a la flechita, le presionamos y dice: en el escritorio y luego sesión uno punto uno, que es la que vamos a ir resolviendo.

H3: Guardar.

C: Sí y le ponemos guardar.

C: Luego, construye un segmento cualquiera AB, nos vamos donde está la letra A en la barra de herramientas, donde hay una A, ¿ya la ubicaron?

H3: Sí.

C: Sí, luego dice ahí… presionamos y dice nombrar y en el primer punto donde dice Cabri nos pregunta, en este punto, y le vamos a poner A, y luego a donde termina el segmento le vamos a poner B, una recta que contenga este segmento, llámela r, ahora vamos a trazar una recta que contenga el segmento y a esa recta la vamos a llamar r.

Nota: Mientras los profesores están trabajando la ficha, la conductora se acerca a una integrante del taller M1, la conductora señala la zona de trabajo y dice, aquí pregunto Cabri el punto o la recta.

Después se acerca a otra compañera, M3 a quien se le dificulta el uso del ratón, le va indicando, como borrar las construcciones que ha realizado, la Conductora señala y le dice seleccione con el puntero y después presione suprimir. Regresa a comentar al grupo.

C: A ese punto se le va a llamar P. Todo lo dice en la ficha, esta les voy a ir leyendo y voy revisando como lo van haciendo, después dice; ubique un punto M sobre la recta r, si se atrasan en la ficha, ahí viene lo qué hay que hacer.

Nota: Un compañero se atrasa y pregunta, ¿dónde están las instrucciones?, la conductora le indica y le dice; si acá están las instrucciones y él prosigue.

C: Desplace el punto M y la pregunta es, ¿por dónde pueden desplazarlo?, ¿por dónde se puede desplazar M?

M4: ¿Cómo lo puedo desplazar?

C: Con el apuntador, para desplazar, lo selecciono cuando ya esté en blanco, me pongo, ¿obre qué objeto? me pregunta Cabri y entonces, cuando sale una manita, yo puedo desplazarlo, arrastro A, arrastro P, arrastro M ¿qué pasa?

C: Si se dan cuenta en la ficha lleva un orden, si no respetan el orden no van a poder desplazar los objetos de manera jerárquica, deben ir siguiendo el orden de la ficha y vamos a contestar las preguntas.

M3: ¿r debe contener a AB?

C: Sí.

Nota: M3 titubea al seleccionar la herramienta, la conductora interviene y dice, necesita una recta, M3 no encuentra la recta y la conductora señala la herramienta y dice acá esta en la otra herramienta y lee; recta, segmento (Después se dirige al grupo).

M3: Si se les dificulta mucho, pueden trabajar en pareja.

Nota: Después la conductora llama a los integrantes del taller, para ver el trabajo de la compañera M5.

C: M se desplaza sobre la recta, ¿Por qué?

H3: ¿Por qué nada más lo hizo qué? que coincidiera la recta en el segmento.

Nota: La conductora se dirige con otra compañera M4. (a ella se le movía la recta r fuera del segmento). Se dirige al grupo

C: Aquí, dicen que primero es el segmento y después la recta y en el caso de ella ¿qué pasó?

M1: No siguió la jerarquía de dependencia.

(Nota: La conductora señala el trabajo de M5, dice -ella siguió la jerarquía de dependencia-, se dirige al grupo y señala el trabajo de M4.)

C: Entonces cuando pasa algo así, que lo queremos hacer diferente a eso se refiere: esto es una figura (señala el trabajo de M5) y eso es un dibujo (señala M4), parece que es correcto pero está incorrecto, en eso es en lo que ayuda Cabri. La compañera lo hizo a propósito, gracias (se dirige a M4). Después de que ya hicimos nuestra figura, con sus respectivas leyes de correspondencia y jerárquicas ya podemos contestar por donde se pueden desplazar.

(Nota: La conductora se dirige al grupo, después de observar las dificultades que tiene la maestra M3, dice: “pueden hacerlo por equipo y ayudar a sus compañeros”)

C: Vamos a ver, ¿quién de ustedes lo puede hacer para todos nosotros? La siguiente ficha, ¿quién de ustedes la puede hacer para todos?, el cañón no sirve, pero, ¿quién se anima a hacer la ficha completita? sí, ya que hicieron su construcción, ¿quién se anima para que todos lo veamos?

M4: ¿Lo mismo?

C: Sí, lo mismo que hicieron, pero ahora para todos, ¿quién quiere hacerlo (se dirige a M5)? Sí, si quieres hacerlo.

M5: ¿Aquí? (señala la computadora).

C: Sí, a ver, vamos a ver a su compañera cómo lo hizo (Se dirige a M5 y dice). A ver, selecciona todo bórralo y vuelve a empezar. Acérquese por favor para ver toda la construcción, si tuvieron alguna falla aquí nos vamos a dar cuenta.

M5: Primeramente trazo un segmento, luego dice que hay que nombrarlo, en un punto le pongo A, a éste B; luego dice que tracemos una recta, selecciono recta y dice sobre este segmento, nada más giramos y queda sobre el segmento.

H3: A ver ahí una pregunta, no sé, ¿si puedo?

C: Sí, claro que sí.

H3: ¿Éste no tiene una?, por ejemplo ¿algo para que caiga de veras que caiga sobre el segmento?, porque ahorita es como, como ella lo hizo, lo hacemos coincidir, pero ¿no habrá una que te diga que exactamente esté sobre la recta?

C: Sí, si pregunta, Cabri pregunta, (señala la zona de trabajo) aquí está, sobre este segmento, pregunta si sobre el segmento, recta, sobre ese segmento.

H3: Ah no sí pero, de ahí te abre un ángulo, o sea, yo lo que quiero es que haga coincidir, ahora si que el ángulo que va a tener el segmento con el ángulo que va a tener la recta.

C: Si, esa herramienta no la maneja Cabri, pero me parece que… bueno, en lo particular ya manejándolo es mejor, por que cuando se hacen figuras tridimensionales el ángulo permite trabajar mejor.

H3: Sí porque ahí, o sea, nos pregunta que sobre la recta pero el punto que vas a dar como referencia, pero no la recta.

C: Bueno, se supone que esta trazando la recta Cabri, pero lo vamos a ver en siguientes sesiones que sí lo hace.

H3: ¿Lo vemos en la secuencia?

C: Sí y más por que la ficha lo pide así.

Nota: M5 continúa con la ficha

M5: Luego pregunta Cabri ¿sobre la recta? y le ponemos, sobre esta recta este punto sería M, luego el otro pregunta ¿segmento o recta?, ponemos segmento el punto P y ya.

C: Y ya ahora movemos los puntos y vemos por donde se desplazan, muy bien, sí gracias.

Desarrollo de la Ficha 1.2

C: Empezamos con la siguiente ficha uno punto dos.

M2: ¿Le ponemos guardado?

C: Sí, en guardado seleccionamos y ponemos guardar, borramos y empezamos con la otra ficha, dice "lo que acaba de observar le va a ser de utilidad para otras construcciones", así que recuerden, lo que tenemos que recordar es la jerarquía de dependencia.

Ficha 1.2, empezamos con ésta y por favor no utilicen en la barra de herramientas de simétrico, a ver intenten acordarse como se traza el simétrico.

Fin de guardado y empezamos con la siguiente y guardar en el escritorio por favor.

M5: ¿Nuevamente lo guardo?

C: Sí, hay que guardarlo.

H1: Oye (llamó a la conductora) cuando tracé el punto propiamente está fuera de la recta yo no le di indicación de que hiciera eso, por que tracé, es que lo hice por dos formas por círculo y por simetría axial, entonces bueno…, eso lo hace cualquiera, entonces yo no le di la indicación de que el punto P estuviera ahí.

C: Pero, ¿sí cumple con la ley de simetría?

H1: Sí la cumple.

C: A ver mueva el punto P hacia arriba.

H1: Ahí está (mueve los puntos y se ve que son simétricos).

C: Pero, ¿uso la herramienta de simétrico?

H1: Sí, pero ¿no era así?

C: Hágalo sin usar la herramienta de simétrico y simetría axial.

H1: Es que también lo hice por circunferencia.

C: Sí con circunferencia.

H1: Pero ¿aquí sí cumple? (muestra su construcción habiendo usado la herramienta de simetría axial).

C: ¿Cómo podrían trazar el simétrico de un punto?

M1: Es una idea, puse un punto P y tracé un círculo.

C: ¿Qué le haría falta al círculo para que se mueva del otro lado el otro punto?

M1: ¿Usando perpendiculares?

C: Si, podría ser, pero sin usar las herramientas de paralelas y perpendiculares.

C: Recuerden no pueden usar la herramienta de simétrico, paralela ni perpendicular. Para acordarnos del trazo.

H1: (le habla a la conductora) Por circunferencia, lo que hice fue trazar una circunferencia este punto P, lo tomé como centro, aquí está (traza la circunferencia), ¿qué otra herramienta no puedo usar?

C: Simétrico, paralelas perpendiculares.

H1: ¿Tampoco se pueden usar?, no se pueden usar.

(Nota: M4 llama a la conductora, M4 trazó una recta, luego de un punto exterior trazó una circunferencia, en la circunferencia trazó un diámetro y un punto al final del diámetro, la línea o diámetro se mueve fuera de la recta y no se observa la simetría.)

M4: No, estoy mal.

C: ¿Está mal?

M4: Sí, este es P y este es P'.

C: Sí.

M4: Bueno al mover el P no es simétrico por que de este lado, bueno de los dos lados, este punto (señala P) de aquí a la recta, es menor que de aquí a acá (señala la distancia que hay de la recta a P')

C: Entonces ¿qué faltaría con la recta, para que fuera simétrico?

C: Usando sólo regla y compás. (Se acerca a M4) ¿Cómo hizo su trazo?

M4: Tracé primero un círculo con respecto a esta recta y al punto P, entonces después fijé el centro (se refiere a que el centro de la circunferencia, el que colocó sobre la recta), y tracé el segundo circulo, que coincidiera.

H3: Que cortara a R, ¿no? (la recta)

M4: El primer círculo con R de centro y que coincidiera con P (se refiere a que traza el circulo en la intersección de la recta R, con la primera circunferencia), entonces ya me traza el simétrico que es P', en la intersección de las circunferencias

(Nota: Cuando M4 quiere manipular los puntos P y P', tiene dificultad ya que el ratón esta sucio).

C: A ver inténtelo (le pide a H3 que los manipule).

(Nota: H3 trata de manipular P' y no puede, se dirige a su compañera y le comenta lo has de haber hecho al revés.)

C. ¿Qué pasa con P'? ¿Sería P?

H3: Sí, es cierto (intenta mover P, con dificultad lo logra).

C: ¿Y cómo sé que tienen la misma distancia con respecto a este eje? (señala la recta)

M4: Por que pertenecen a la misma circunferencia y el radio de este (señala el centro de la segunda circunferencia hacia el punto P), es igual a este (señala el radio que se forma del centro de la segunda circunferencia hacia P').

C: Hay otra forma, ¿nos explica? (se dirige a H3).

H3: Ésta es con una circunferencia de más, pero al principio pensé que tenía que tener cierta relación. La primera circunferencia que yo tenía que hacer pasar sobre la recta y luego tracé otra que pasara por P, lo hice como centro de la primer circunferencia, y creí que había una relación, hasta que vi que como tenían que ser equidistantes de la recta, entonces fue cuando ya se me ocurrió, trazar un segmento de recta, que fuera de la recta al punto y entonces generar la circunferencia, como en el caso anterior, que me diera la equidistancia de ambas circunferencias, para que así ya, ya fuera simétrico.

C: ¿Cómo trazó el simétrico?

H1: Por circunferencia, finalmente está el punto P, bueno esta la recta R el punto P, lo que hice fue marcar dos puntos sobre la recta, tomé… bueno, en este caso tomé A como centro de la circunferencia, tomé de radio AP, tracé la circunferencia, tomé como radio B, digo como centro B, y radio BP, tracé la circunferencia y el punto de intersección, es lo que me da el punto simétrico (se refiere a la intersección de ambas circunferencias).

C: Manipule P (M1 esta manipulando P'). Ésa es P', muy bien a ver pásela para arriba.

M1: Tiene que coincidir, se vuelve punto de tangencia.

C: Mmm.

M1: Y a donde lo mueva, y ahí ésta se vuelve a convertir el punto de tangencia.

C: Sí, muy bien.

C: (Se dirige al grupo) Ahora si vamos a escuchar a su compañera a ver cómo hizo el procedimiento, hay tres, los tres muy interesantes.

M5: Tenemos un punto y después tenemos una recta, después trazamos una circunferencia para trazar el simétrico.

Desarrollo de la ficha 1.3

C: Seguimos con la siguiente ficha, es la de perpendiculares, ¡ah! pero terminen de escribir la ficha de simétrico, aquellos que no la han terminado, para continuar a ver les doy cinco minutitos para que terminen con la ficha.

(Nota. El compañero H1 se dirige a la conductora y pide que lean juntos la ficha 1.3)

C: Tracé una recta perpendicular a AB, ¡ah! es que aquí doy por hecho que, creo que estoy mal, entonces tracé.

H1: Trace una recta R, marque un punto C, pero ¿fuera o sobre?

C: Fuera.

H1: Bueno ahí los procedimientos son distintos.

C: Trace una recta R y un punto fuera.

H1: El punto C ¿fuera o sobre?, porque los casos son distintos.

C: Y luego.

H1: Tracé una recta perpendicular a AB y que pase, una recta perpendicular AB a R y que pase por C.

C: Muchas gracias (se dirige al grupo), a ver las instrucciones de la ficha 1.3, les digo que tuve algunas fallas, bueno este taller va con la finalidad de que mejore. Me hace el comentario el compañero (se dirige a él y le dice muchas gracias) que aquí esta un poco confuso, en las acciones de la ficha, en la redacción, entonces vamos a empezar trazando una recta R, si gustan anotarlo para que todos tengan las mismas condiciones. Trace una recta R y un punto C fuera de la recta. Después trace una recta o segmento AB, trace una reta AB perpendicular a R y que pase por C.

C: (Se dirige a una compañera M4 que ya había trazado la ficha) ¿Cómo sabes que son perpendiculares?

M4: Yo creo que son perpendiculares, pero la verdad no sé por qué.

C: Ya está.

H3: Ya.

C: ¿Cómo lo hizo?

H3: Trazamos la recta R, después le pusimos un punto cualquiera que sería el punto C, bueno tracé una circunferencia, con centro en R que pase por C, no es cierto, primero la que tracé es una circunferencia con centro en C, que cortara la recta en dos puntos para que me sirvieran de centro, entonces ya utilicé la intersección para generar la primera circunferencia que pasara por el punto C, y la otra que también pasara por el punto C, para ya nada más las intersecciones de las dos circunferencias uno la perpendicular uno y ya.

C: Muy bien.

H1: Mi procedimiento es semejante al anterior del simétrico. Igual tracé la recta R, el punto C, marqué dos puntos sobre la recta: el punto F y el punto G. Con centro en F y radio FC tracé una circunferencia, con centro en G y radio GC, marqué otra circunferencia, tracé el punto de intersección que llamé C’ y uní esos dos puntos de C con C’, el punto de intersección finalmente es H y el segmento en este caso se trata de la perpendicular.

C: ¿Cómo sabe que es una perpendicular?

H1: Porque finalmente, estos dos puntos son simétricos (señala C y C’) y finalmente una característica de los dos puntos simétricos es que, este la línea que los une son perpendiculares a la directriz que sería esta finalmente (señala la recta original).

M5: Se traza la recta PQ y otro punto fuera de la recta y luego tracé una circunferencia que va de C, tracé tres circunferencias y corté a la recta en dos puntos quedo a la mitad P y Q y luego tracé otra circunferencia con el centro aquí (señala la intersección) que pasara por C.

(Nota: En esta parte falló el audio).

C: ¿Cómo se que son perpendiculares?

H3: Porque son…, este… ¿cómo se llaman?

H1: Lo que pasa que ése es el procedimiento que se usó finalmente cuando trazamos simétricos y, finalmente, una de las características que tiene el simétrico es que la recta r termina siendo un eje de simetría, que no es más que la directriz, finalmente la directriz con respecto a los dos lados homólogos son perpendiculares y esa es la característica, una de las características.

Desarrollo de la Ficha 1.4

C: Sí, la siguiente ficha que es la 1.4 igual paralelas.

C: Vamos a ver cómo hizo el trazo, ¿nos explica por favor (dice al integrante H1)?

H1: Primero tracé r y un punto que no pertenezca a ella que es el punto A, a partir de A tracé dos puntos sobre la recta R, B y C, a partir de ahí tracé dos circunferencias una con centro en B y radio en A, ahí esta, luego una con centro en C y radio CA, ahí está, y el punto de intersección me va a permitir trazar la perpendicular de acuerdo con lo que ya habíamos visto, junto a la recta que pasa por A, e hice el mismo procedimiento, tracé una circunferencia y obtengo los puntos de intersecciones D y E, a partir de esos dos puntos, con centro en E y radio ED, trazo una circunferencia con centro en D y radio ED, trazo la otra circunferencia y los dos puntos de intersección me aseguran una perpendicular que pasa por el punto A y finalmente ya tengo dos perpendiculares, dos perpendiculares, aquí a esta recta (señala una perpendicular a R), y esto finalmente me asegura que son paralelas, por que dos rectas perpendiculares a una tercera son perpendiculares entre sí.

C: Vamos a ver el procedimiento, el procedimiento de su compañera.

Nota: La integrante M1, comienza con su explicación pero falla el audio.

Desarrollo de la Ficha 1.6

C: Nos puede explicar la ficha, así rapidito (se acerca al integrante H1).

H1: Mmm, primero observé la figura y supuse que lo que dependía de todo el trazo era el cuadrado, entonces es lo último que hay que trazar. Entonces lo que hice fue trazar la recta R, sobre R marqué dos puntos A y B, arbitrarios; de estos dos (los conservé ahí por la intersección), tomé el punto A como centro y de radio AB, tracé la circunferencia, luego con centro en B y radio BA tracé la otra circunferencia; este trazo me permite trazar la perpendicular y, dado que A y B es un segmento, entonces esta perpendicular es una perpendicular mediatriz. El punto de intersección de estas dos perpendiculares lo usé aquí (señala el centro) y de este punto tracé con centro en C y y el punto D, que fue el punto de intersección de las dos circunferencias, lo usé como radio, tracé la tercer circunferencia y entonces obtuve los dos puntos de intersección que en este caso fue el E y el G. A partir de aquí ya tengo los cuatro puntos para trazar el cuadrado y en este caso uní el punto D a E de E a F y de F a G y de G a D y entonces ya con esto tracé el cuadrado que se esta pidiendo y esto finalmente me permite conservar la propiedad del cuadrado, una de las propiedades, que es la diagonales perpendiculares y congruentes.

C. Muy bien, muchas gracias.

Fase dos.

Coordinadora: En la ficha 2.1, se tiene que hacer la construcción de un cuadrilátero.

Se acerca y revisa la construcción de M1.

C: ¿Usaste la herramienta de polígono?

M1: Ajá.

C: ¿Y nada más ése sería cuadrilátero? (M1 trazó un cuadrado).

M1: No.

C: Haz otro, para que te des cuenta qué pasa.

C (se dirige a H2): ¿Cómo hiciste la construcción del cuadrilátero de la ficha 2.1?

H2: Tracé un segmento, luego busco una recta perpendicular de este segmento (corta al segmento y hace pasar la perpendicular), trazo otro segmento (traza otro segmento cualquiera sobre la perpendicular que ya había trazado, después en el extremo del segmento traza otra perpendicular, para finalizar nombra a su cuadrilátero)

C: Cuando terminen de hacer su figura manipúlenla para que la vean. ¿Qué pasa? (se dirige al grupo)

Nota: H2 Manipula y sólo puede observar un cuadrado y un rectángulo.

H2: Y ya con eso lo tracé.

C: ¿Cómo trazaste tu cuadrilátero?

M1: Con segmentos.

C: Con segmentos, a ver muévelos.

C: ¿Lo puedes explicar para todos?

M1: Ajá, sí.

C: Vamos a ver rápidamente la ficha, 2.1, por el tiempo que sea rápido, la vemos para que su compañera la explique.

M1: Nada más tracé los segmentos, tracé un segmento y luego en este punto (señala el extremo del segmento) tracé otro segmento y el siguiente segmento lo puse a partir de este punto (señala el extremo del último segmento) y así tracé los demás segmentos.
Nota: Termina con la construcción del cuadrilátero.

C: Manipula la figura.

C: Esta ficha es para que se den cuenta cuántos cuadriláteros salen a partir de ese cuadrilátero común.

Desarrollo de la Ficha 2.2

C: Vamos con la ficha dos punto dos, quien ya la tiene, se trataba de un cuadrado.

M4: Trazo una recta y tracé dos puntos cualesquiera, luego tracé una perpendicular a este punto, lo elegí cualquiera. Entonces ya tracé las circunferencias tomando como centros los puntos que ya había trazado donde se intersecan estas circunferencias, cortan en este punto, donde se intersecan las circunferencias se traza otra recta, después tomé como centro la intersección de las perpendiculares y la intersección de las otras circunferencias que van a ser su radio y ya la dejé y entonces los puntos que intersecan esa tercera circunferencia los uno con segmentos.

C: ¿Y se puede mover?

Nota: M3 manipula la figura y muestra que la figura no se deforma conserva las características de un cuadrado.

C: Muy bien, gracias.

C: ¿Nos puede explicar por favor su construcción del cuadrado?

H1: Bueno, aquí como ya se pueden usar las herramientas, lo que hice fue trazar una recta marqué un punto el punto C, tracé una perpendicular a ese punto C, aquí está. Luego lo que hice tomando a C como centro tracé una circunferencia de C a C, y ya de esta lo único que hice fue unir los puntos de intersección de la circunferencia con las dos rectas que fue de A a B, de B a C, de C a D y de D a A. Y ya hice propiamente la figura del cuadrado.

C: Muy bien, gracias.

Desarrollo de la Ficha 2.3

C: Nos vamos con la siguiente ficha la dos punto tres, con la construcción de un paralelogramo.

Nota: La conductora observa una figura y nota que el integrante H2 traza para esta ficha un cuadrado, se acerca al integrante.

C: ¿Cuál es la característica de un paralelogramo?

H2: Tener lados paralelos, mi figura los tiene.

C: Si tiene lados paralelos, pero, ¿de qué otra manera podrías trazar otro paralelogramo?, que no sólo fuera un cuadrado.

H2: ¿Un rectángulo?, serían los paralelogramos.

C: A ver hazlo, para que te des cuenta de las diferencias y las similitudes con un paralelogramo.

Nota: H2 traza una línea, luego su paralela, luego una perpendicular y otra perpendicular, al manipularla sólo puede observar cuadrado y rectángulo.

C: Ahora no sólo tienes una figura, con esta nueva construcción puedes ver dos figuras y si lo trazas de otra manera vas a encontrar otras figuras que son paralelogramos.

H1: Pero, ¿ahí no estaría en el mismo caso del cuadrado es un rectángulo?

C: Sí pero, si es otro paralelogramo o ¿no lo es?

H1: No, si pero a lo que voy es que estamos hablando de que tiene que ser un paralelogramo en general, que se pueda ver cualquier paralelogramo.

C: Sí, es la idea hacer un paralelogramo en general.

H1: En general y no nada más que se tenga un cuadrado o un rectángulo.

C: Es un paralelogramo, él ya trazó un cuadrado, ahorita ya lo hizo de otra manera, ya vio otra figura, tal vez se le ocurre otra manera… bueno, lo construye de otra manera, como a él se le ocurra, pero un cuadrado no le da apertura de ver otros.

H1: Con el cuadrado no le da apertura a ver otros o con el rectángulo.

C: Bueno primero hizo un cuadrado, yo le dije –hiciste la ficha anterior –, la cambió y encontró otro, el rectángulo. Ahora, si cambia la construcción va a encontrar otras figuras, sí había hecho un paralelogramo pero no el general.

H1: (Lee la ficha en voz alta) “Cambiar de posición, agrandar o reducir pero que no pierda sus cualidades de paralelogramo. En el caso si se construye nada más un cuadrado o un rectángulo, ¿qué características de aquí no se estarían cumpliendo?”

C: Varias no se van a cumplir, el cuadrado sólo lo estaría agrandando o reduciendo, pero no va a ver otras figuras.

Nota. La conductora ve el trazo de otra integrante M3, ella trazó dos trapecios y un rectángulo en la zona de trabajo de Cabri.

C: ¿A ver cómo los trazó?

M3: Yo con puros segmentos, no encontré cómo hacerlos con la circunferencia, como lo hicieron los compañeros.

C: ¿Es necesaria la circunferencia?

M3: Pues no, no es tan importante.

C: Entonces, ¿cómo lo trazó?

M3: Este, fui agarrando, bueno aquí, tomé este ¿Cómo se llaman iconos?, ¿no verdad?

C: Herramienta.

M3: Herramienta, una herramienta y seleccioné lo que es el segmento.

C: Antes de que me diga cómo, manipúlela, manipule lado por lado.

Nota: M4 mueve los puntos de intersección de un trapecio de los que había realizado, este se deforma.

C: ¿Ése todavía es un paralelogramo?

M4: Sí, porque todavía tiene lados, bueno éste ya no porque…, al momento de alargarse se puede…, queda bastante distinto.

C: A ver cruce este punto para acá.

Nota: la figura queda como un cuadrilátero cruzado.

C: ¿Ése es un paralelogramo?

M3: No.

C: Parecía una figura correcta, pero es un dibujo, una figura no debe deformarse; entonces, con sus herramientas busque como hacer un paralelogramo.

M4: Pero, que no se deforme, que tenga sus características.

C: Sí, debe cambiar, o sea, debe…, más que deformarse debe dar pauta para que usted vea otras figuras.

M3: Ah, que siga conservando la misma propiedad.

C: Si, su propiedad de paralelogramo.

M4: Entonces este no me funciono para eso.

C. Usted que cree, a ver

M3: No, no porque al momento de deformarse, o de cambiar la forma ya no esta, ya no sigue siendo un paralelogramo.

C: Ya no es un paralelogramo.

M3: Ah bueno.

C: Tiene que ser un paralelogramo.

M3: Al momento de moverse tiene que seguir conservando la propiedad.

C: Sí.

M3: Muy bien

Nota la conductora se acerca a otra compañera M4.

C: Ya trazaste tu paralelogramo.

M4: Sí.

C: Tiene lados paralelos.

M4: Sí, este con este y este con este (señala lo lados opuestos de un rombo).
C: ¿Y puedes hacer otras figuras?

M4: ¿Con este? (señala el rombo).

C: Sí.

M4: Un cuadrado.

C: Otra.

M4. Nada más el rombo.

C: ¿Otras?

M4: Rombo y luego con ésta un cuadrado.

C: Puedes hacer otras.

M4: O sea si es un paralelogramo, pero no el general, piensa cómo hacer un paralelogramo general para todos los casos, que pueda yo ver todos los casos.

C: ¿Que característica tiene un paralelogramo?¿Cuál es su característica?

M4: Tiene lados paralelos.

C: Muy bien, tiene lados paralelos, partiendo de eso construye teniendo lados paralelos.

C: ¿Quién nos puede explicar la ficha 2.3, que es la construcción de un paralelogramo?

M2: Primeramente tracé dos rectas cualesquiera, una arriba y otra abajo, después utilicé la herramienta de perpendicular y la tracé perpendicular a la de arriba y automáticamente hice la recta perpendicular a la de abajo, al igual que de este lado, hice los mismo y únicamente los vértices que se pueden mover es este paralelogramo es de donde inicie, que es la perpendicular.

C: ¿Si es un paralelogramo?

H1: No.

C: ¿No es un paralelogramo?

H1: No.

C: ¿No es un paralelogramo?

H1: Así como lo explicó, no.

C: ¿Pero la figura sí es un paralelogramo?

H1: No.

M5: Sí, por que sus lados son paralelos.

H1: No, pero es que así como lo explicó no, ella dijo que trazó una recta y después una recta cualquiera y entonces eso no le asegura que sea paralela, en todo caso supongo yo que trazó una paralela a la primer recta, si trazó una recta paralela a la primera entonces ahí me estoy asegurando la condición de paralela, pero así como lo dijo… yo me voy a la explicación que dio, así como lo explicó no.

C: Sí, muy bien, alguien tiene alguna otra pregunta.

M3: Bueno el objetivo de aquí es que formemos figuras geométricas en las cuales se sigan conservando lo que son los paralelogramos que deben tener lados paralelos, ajá. Entonces aquí, ella, al momento de mover le va formando dos figuras que pueden ser cuadrado y puede ser rectángulo, ésas son las dos únicas figuras que se pueden formar, pero bueno, aquí no se pueden formar más, pero sí sigue conservando lo que es el paralelogramo dependiendo del tamaño grande o chico.

H1: Pero, así como lo explicó, su construcción no.

C: No dijo que eran paralelas, dijo que era una recta cualquiera, no estamos seguros de que es una paralela.

H1: No sé, dijo la propiedad sería la diferencia.

C: Ésa sería la diferencia, pero el compañero trazo otro paralelogramo, ¿nos explicas de favor?

H1: Bueno, aquí trace el segmento el AB listo, después tracé una recta paralela a este segmento que fue la CD, de allí tracé un segmento el BC una recta que pasara por B y por C bueno, perdón, un segmento el AD y después trace una recta paralela a ese segmento; esto ya me asegura que tengo dos pares de lados paralelos y esto finalmente me da un paralelogramo. Entonces aquí lo puedo mover lo puedo agrandar, lo puedo cambiar de posición y sus características de acuerdo con lo que dice la ficha, lo puedo mover lo puedo cambiar de posición, lo puedo agrandar o puedo reducir y en ningún caso pierde su condición de paralelogramo

C: Y además aquí podemos ver diferentes figuras.

H1: Aquí entonces encuentro…, bueno en aproximación.

C: Sí, está bien.

H1: Tal vez un rectángulo, posiblemente cuadrado, un rombo, incluso el romboide y de ahí, bueno es la condición.

M3: Prácticamente nada más son tres figuras que son paralelogramos, ¿no?

H1: Cuatro.

M3: Cuatro, el cuadrado, rectángulo, el rombo y el romboide.

M5: Serían dos ¿no? Porque [son] el cuadrado, el rectángulo y el rombo es un romboide.

M3: Pero por las características de un cuadrado dice que el cuadrado tiene sus lados iguales y el rectángulo tiene 2 iguales.

H1: De hecho son “cuadrastas”, nada más que el cuadrado es un caso específico del rectángulo y un caso específico del rombo, pero en realidad son cuadrados por sus características (Ven a la coordinadora y preguntan o no).

C: Bueno lo vamos a ir viendo. Hagan sus trazos, manipulen para que vean que es lo que van descubriendo.

Desarrollo de la Ficha 2.4

C: La ficha dos punto cuatro, ¿la puedes explicar por favor?

H2: Primero tracé un segmento CD y tracé a este segmento una paralela; ya después no ocupé la herramienta de trazo de paralelas sino que fui trazando como lo vimos la clase pasada. Entonces, ya teniendo estas dos paralelas: segmentos CD y BA, tomé de los extremos de CD una perpendicular hacia BA y ya me quedó el rectángulo y al manipularlo solamente se pueden mover aquellos puntos donde inicié que es el vértice C o el vértice D.

C: Oímos a su compañera, ella sí utilizo las herramientas.

M1: Yo primero tracé una recta y ya a esta recta le tracé otra paralela y a esta paralela le tracé una perpendicular y ya que era perpendicular, tracé otra perpendicular y ya se forma un rectángulo y el cuadrado.

Desarrollo de la Ficha 2.5

C: Muy bien, llenen su ficha por favor y nos vamos a la otra que es la 2.5

M5: Primeramente tracé una recta cualquiera; a esa recta le tracé su perpendicular con la herramienta directamente, entonces tomé un punto cualquiera de la primera recta que había trazado e hice un segmento a la recta perpendicular a cualquiera (ella se refiere a cualquier punto). Mi siguiente paso fue tomar como centro, el cruce de las perpendiculares y abrirla (una circunferencia). A la distancia en donde toca este punto, (se refiere al punto de la recta perpendicular antes trazada), es la diagonal mayor y de este punto al siguiente que se llama la diagonal menor. ¿Para qué?, para que la distancia que exista del centro a este punto sea la misma de aquí a acá (se refiere a los radios de la circunferencia más pequeña), igual con esta (se refiere a la circunferencia con mayor diámetro) y mi último paso fue trazar los segmentos de recta hacia la circunferencia que está afuera de ahí a la pequeña y aquí nuevamente a la grande y entonces, para hacer el cuadrado, únicamente es manipular las circunferencias de tal manera que se junten y al juntarse forman un cuadrado. Vemos la diagonal mayor y la diagonal menor por que los radios de la circunferencia están aquí y también se puede hacer hacia fuera.

C: Muy bien, ¿nos explicas tu procedimiento por favor?

H1: Aquí lo que hice fue trazar la recta BD y de esa recta lo que hice fue trazar su perpendicular AC aquí está. Tracé un segmento el segmento AB y a partir de ahí empecé a trazar todo con la herramienta, con la herramienta tracé usando simetría central porque, finalmente, el punto va a ser éste (señala el cruce de las perpendiculares). Tracé simetría de éste (se refiere al segmento AB) y me da… bueno, me asegura que estos, finalmente, son segmentos iguales; luego de ahí uní los dos puntos A, D y, a partir de ahí, volví a trazar con simetría central y aquí está (señala el segmento CD) y a partir de ahí…, bueno aquí está.

Nota: Tiene problemas con la manipulación de la figura, la coordinadora le señala el apuntador.

H1: Y ahí esta, se puede formar un rombo o un cuadrado.

Desarrollo de la ficha 2.6

C: Muy bien gracias. Contestamos rápido la ficha y nos vamos con la dos punto seis, vamos a hacerlo rapidito porque nos gana el tiempo.

H1: Bueno, de acuerdo con la ficha aquí dice construya un trapecio, bueno aquí hay dos formas de construirlo.

C: Ajá.

H1: En este caso dice: “construya un trapecio, mueva algún punto de manera que esta figura se pueda transformar en otras figuras”, bueno aquí está (mueve un segmento de su trapecio y mueve un vértice de un triángulo que ya tiene trazado, del cual surge su trapecio).

C: Pero, sería la misma.

H1: No.

C: ¿No?, a ver.

H1: Otras figuras en cuanto bueno, a diferentes trapecios a fin de cuentas tengo tres tipos de trapecios, que serian: el rectangular, isósceles y el escaleno, como figuras finalmente son tres distintas.

C: Sí.

H1: Pero, hay una característica que dice que se pueden conservar estas figuras pero sin dejar de tener las características de un trapecio, entonces ésta ya no cumple (se refiere a un trapecio que ya había trazado, la trasforma en un paralelogramo), porque se forman otras figuras y deja de tener características de trapecio. Por lo tanto, ésta no se puede, ésta no puede ser de acuerdo con la ficha… Bueno, así como la entendí.

C: Sí, está bien, vamos a oír la explicación de su compañero.

Nota: Para la explicación el compañero borra el trapecio que podía transformarse en paralelogramo y decide quedarse con el trapecio que surge a partir de un triángulo.

H1: Ahora, esta figura se puede transformar en otras figuras sin dejar de tener las características del trapecio, esto es, tener un par de lados paralelos; ésa es la condición clara que está poniendo. Ahora bien, partiendo de que un trapecio se obtiene de un triángulo, lo que hice fue trazar esta recta AB y marqué un punto, y ya de ahí tracé el triángulo de este punto externo hacia el punto A y del punto externo a B, de ahí tracé una recta paralela a la primer recta (se refiere a AB) sería ésta (CD) y entonces ya de ahí puedo transformar (toma el punto externo). Si yo muevo el punto, finalmente, es para obtener los tres diferente tipos de triángulo en este caso el rectángulo un isósceles y un escaleno, finalmente obtengo los tres tipos de trapecio que se están pidiendo, entonces ya de ahí muevo las rectas paralelas ¿no?, no importa que las mueva no deja de tener las características del trapecio que es un par de lados paralelos.

C: Muy bien, alguna pregunta, objeción, duda, ¿no?

M1: Pero, es que nada más te está diciendo que puedas formar otra figura y que mantengas los lados paralelos, entonces no necesariamente tienen que ser sólo trapecios, dice que puedas formar otras figuras manteniendo lados paralelos.

H1: Por eso, sin dejar de tener las características de un trapecio.

M1: Pero, es que no se forman otras figuras, sigue siendo un trapecio.

H1: Ah, es que ahí es la condición, porque después dice: “¿es posible transformarla en un paralelogramo?, si puedes formar entonces un paralelogramo, ¿seguiría conservando entonces las características del trapecio?

M1: Sí, seguiría con un par de lados paralelos.

H1: Y entonces, ¿cuál es la condición para poder tener un trapecio?

M1: Pues, que tenga lados paralelos.

H1: Ok.

M1: Un par de lados paralelos.

H1: Un par un par de lados paralelos es lo que necesito, entonces si tu lo puedes trasformar a un paralelogramo, seguiría conservando esa característica.

M1: Seguiría teniendo lados paralelos.

H1: Ah sí, pero.

M5: Entonces, el paralelogramo necesariamente tendría que tener dos pares de lados paralelos.

H1: ¿El paralelogramo? sí, debe tener dos pares de lados paralelos, entonces el trapecio, para que sea trapecio debe de tener solamente uno, es una condición necesaria y suficiente, ¡vaya!, ésa es la diferencia. Si tú conservas esas dos características de lo necesario y lo suficiente, entonces me asegura que es un trapecio, por eso es que en este caso dice ¿es posible trasformarla en un paralelogramo?, paralelogramo en este caso no, en un rombo no, por que entonces ya estarías hablando que los trapecios son casos especiales de los rombos y no es cierto, de acuerdo con el trazo.

M1: Es que si mueves los lados de las rectas, bueno… (y se calla).

C: A ver, vamos a ver la construcción de su compañera.

M1: Primero tracé una recta y a ésta le tracé una paralela, ya de ahí tracé dos segmentos cualquiera. Entonces, si movemos este punto (se refiere a un vértice del trapecio) se forma otra figura, pero te digo que es un paralelogramo; entonces, si mueves esta (su primera recta) se forma un rombo y éste debe tener lados paralelos.

H1: No, el rombo la característica es que los cuatro lados son iguales.

M1: Bueno, hay rombos que no necesariamente tienen que tener lo cuatro lados iguales.

H1: Sí, no, es que la condición para trazar un rombo es que tenga los cuatro lados iguales.

C: Pero, si manipulas tu figura si puedes formar un rombo. A ver mueve una paralela, a ver mueve tu recta, ése no sería un rombo. ¿Cómo se llamaría esa figura?

M5: Romboide.

C: Romboide dice ella, ¿ustedes cómo lo conocen?

H1: ¿Cuáles son las características del romboide?

C: Más que nada, aquí […se trata de…] qué nombre le asignan a esa figura.

M3: Cuadrilátero.

H1: Un cuadrilátero.

C: Un cuadrilátero.

M5: Un trapecio.

C: Un trapecio.

H1: ¿Conserva su par de lados paralelos?

C: ¿Conserva su par de lados paralelos?

H1: Entonces, volviendo a la pegunta, ¿en el caso que se pueda transformar en un rombo?

C: Ahorita lo vamos a ver, contesten su ficha y es la última donde vamos a terminar ya con el tema. […] Después de todas nuestras construcciones, concluiremos en la ficha 2.7, en donde van a hacer la clasificación de cuadriláteros como ustedes crean que mejor les conviene. En la ficha hay varias formas en las que pueden hacer una clasificación, pero si ninguna les convence propongan otra, la que ustedes quieran.