UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

SECRETARÍA ACADÉMICA

COORDINACIÓN DE POSGRADO

MAESTRÍA EN DESARROLLO EDUCATIVO

De la Aritmética al Álgebra. El caso de las fracciones algebraicas

Tesis que para obtener el Grado de

Maestra en Desarrollo Educativo

Presenta

Sandoval Rosas Marisol

Director de Tesis

Dr. Armando Solares Rojas

Ciudad de México Enero, 2019

Agradecimientos

A mis padres Guillermo Sandoval Flores y Soledad Rosas Castillo por creer en mí.

A mi esposo Gabriel y a mis hijos Laura, Lucero y Gabriel Arturo por el apoyo y amor incondicional brindados para culminar este proyecto.

A mis amigos y compañeros de la línea: Remedios, Jéssica, Andrea y Daniel, por haberme enseñado el valor de seguir aprendiendo.

Con mucho aprecio a las Doctoras Alicia Gabriela Ávila Storer y Leticia Sánchez López por su constante acompañamiento.

A mi asesor el Doctor Armando Solares Rojas por sus valiosas enseñanzas.

Índice

Introducción

Existe la creencia de que el Álgebra es complicada, confusa, y es frecuente escuchar a los estudiantes del bachillerato comentar sobre el temor a reprobar algún curso relacionado con la misma o la dificultad para entender las explicaciones de su profesor. Esta rama de las Matemáticas ha sido abordada en la formación escolar de las personas desde cursos de nivel secundaria, pero como se menciona, su aprendizaje no siempre ha sido el esperado. Es por ello que el aprendizaje y la enseñanza del Álgebra han sido temas de investigación desde hace varias décadas.

El presente trabajo busca profundizar sobre el proceso de transición de la Aritmética al Álgebra en el caso específico de las *fracciones algebraicas*. Esta línea de investigación ha sido poco estudiada, y aunque se encontraron trabajos sobre fracciones aritméticas, ninguno abordó la transición hacia las algebraicas.

El foco de esta tesis es considerar que se pueden utilizar los conocimientos sobre fracciones aritméticas que los estudiantes hayan adquirido previamente para ayudar a la comprensión del concepto de *fracciones algebraicas*, por lo que se realiza una propuesta sobre cómo introducir el concepto de fracciones algebraicas usando a las funciones racionales en problemas de modelización matemática. Se diseñó una secuencia didáctica con problemas de este tipo, que sirvió como medio para detectar los conocimientos sobre fracciones aritméticas que los alumnos usaron al resolverla, sin embargo, los resultados obtenidos muestran que factores como el contexto del problema o las gráficas de las funciones racionales propiciaron estrategias de solución y respuestas que no se esperaban.

Dentro del marco de las directrices del “Plan de Estudios 1996 de la Escuela Nacional Preparatoria (ENP) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)”, el estudio del álgebra tiene como finalidad convertirla en una herramienta que contribuya al desarrollo de nuevos conceptos. Lo anterior se puede observar en la siguiente cita:

> Reafirmar y enriquecer los conocimientos del álgebra previamente adquiridos, para aplicarlos correctamente en el desarrollo de nuevos conceptos, así como en la solución de problemas de otras disciplinas afines, para que el alumno comprenda que las Matemáticas son un lenguaje y una herramienta que lo vincula con su entorno social (ENP, 1996, p. 2).

Del anterior párrafo surge la idea de considerar al Álgebra como un lenguaje que ayude al estudiante a desarrollar habilidades que le permitan mejorar su aprendizaje para cumplir con los requerimientos que demandan los estudios posteriores. También desarrollar una formación social y humanística en términos de valores y habilidades que le permitan enfrentar los problemas de su vida cotidiana y laboral de forma más eficaz. El Álgebra y su enseñanza son importantes, pero por su amplitud esta tesis se enfocará sólo en el tema de *fracciones algebraicas*.

En el capítulo 1 de este trabajo, *Antecedentes y problemática*, se aborda la revisión de investigaciones que se enfocan en el aprendizaje del Álgebra. El objetivo es dar a conocer algunas perspectivas sobre esta temática y proporcionar un panorama de vinculación con el enfoque de esta tesis.

El punto de partida es el análisis sobre el trabajo de Matz (1980), particularmente el proceso que la autora llama “extrapolación”, que propicia que los estudiantes cometan errores al dar solución a una problemática en Álgebra (en el capítulo uno se hablará con más detalle).

También se describe la parte del trabajo de Booth (1984) con los usos y errores más comunes de la literal, lo que abre el panorama de las dificultades que enfrentan jóvenes de secundaria en su aprendizaje del Álgebra.

Con el resumen del trabajo de Mason (1988) se pueden apreciar las diferentes formas de registro[1]que usa un estudiante, que el autor explica en su libro *Rutas hacia el álgebra* en la sección titulada *Interludio.*

[1] Mason define el registro como el formato que el estudiante usa para expresar una patrón: dibujos apoyados con palabras, palabras con algunos símbolos, símbolos con algunas palabras.

La revisión bibliográfica concluye con la publicación de Ursini (2008), *Enseñanza del álgebra elemental: Una propuesta alternativa*, en la que se aprecia un análisis profundo sobre las estrategias de enseñanza del Álgebra.

Al término de estas revisiones se establece la relación entre ellas, la utilidad en la problemática y justificación de esta investigación, así como en su pregunta, el objetivo general y los objetivos específicos.

El capítulo 2 *Marco teórico,* inicia con un breve desarrollo de la construcción de los números racionales y de las funciones racionales, partiendo de dominios integrales. La intención es proporcionar un fundamento matemático que ayude a establecer las diferencias entre una fracción algebraica y una función racional. Posteriormente, con la investigación de Llinares (2006, pp. 187-220), se muestran los significados (interpretaciones) de un número racional. El apartado concluye con la actividad matemática de modelización de acuerdo con la perspectiva de Sadovsky (2005), que representa el principal componente teórico con el que se trabaja.

En el capítulo 3 *Metodología,* se describe en detalle la realización de una secuencia didáctica que sirvió para detectar los conocimientos sobre fracciones aritméticas y estrategias que usaron los alumnos al resolver los problemas planteados en dicha secuencia. Dicha información es complementada con el trabajo realizado en la elección de los grupos de estudiantes a los que se aplicó la secuencia y los procesos de recolección de datos.

El capítulo 4 *Análisis de resultados* representa la parte medular de este documento. En él se analizan los resultados obtenidos en el trabajo de campo y se contesta la pregunta de investigación mencionando las limitaciones y alcances derivados del análisis de resultados. En la parte final de este capítulo aparecen las *conclusiones*, que muestran los principales hallazgos de esta investigación, así como la línea de investigación que se sugiere seguir.

Para cerrar esta introducción y como una reflexión, me gustaría comentar lo siguiente: durante mucho tiempo el trabajo profesional que he desempeñado se concentró en cubrir contenidos, sin cuestionar si el currículum era el adecuado, porque consideraba que los jóvenes necesitaban saber todo el programa del curso para no tener dificultades en su formación académica. Pero posteriormente fui preguntándome sobre mi forma de enseñanza y la forma de aprender de mis alumnos, sobre lo que *debía* enseñar y sobre lo que *debían* aprender, entonces mis intereses cambiaron. En muchos cursos escuché la misma pregunta:

—Profesora, ¿y esto para qué nos va a servir? —

Incluso en cursos de especialidad como el de *Temas Selectos de Matemáticas*, se me preguntó.

—Profesora, ¿puede darme un ejemplo de la vida real en el que se utilicen matrices[2]? —

Desde una perspectiva personal considero importante que mis alumnos se pregunten si las matemáticas que enseño realmente les van a servir, y que surja en ellos la inquietud por saber exactamente en qué parte de su entorno social las van a usar. Esos cuestionamientos me ayudaron a tomar conciencia de que hay una creciente necesidad entre los docentes por enseñar las Matemáticas que la juventud de México pueda aprender y usar.

Considero que es posible comenzar con el tema de fracciones aritméticas para poder trascender hacia las algebraicas. Ayudar al alumno a vincular los aprendizajes logrados con su entorno es uno de los objetivos que se alcanzó con la realización de esta investigación, pero no fue el único. El lector podrá ver en el capítulo 3 de Metodología que algunas de las evidencias muestran una importante influencia en la interpretación que el alumno le da al problema gracias al contexto de éste. También en el capítulo 4 de Análisis de resultados se define una categoría llamada “El papel de las gráficas” con la que es posible apreciar un tipo de visualización de las gráficas por parte del estudiante que lo ayudó en la comprensión del concepto de la imposibilidad de la división entre cero.

[2] Matrices es un arreglo rectangular de números reales, encerrado en grandes paréntesis rectangulares. Fuente: Arya, J., Lardner, R, Ibarra, V. *Matemáticas aplicadas a la Administración y a la Economía,* 2009, p.317.

Capítulo 1. Antecedentes y problemática

1.1 Antecedentes

Los obstáculos en la enseñanza del Álgebra han sido abordados desde diferentes perspectivas (Matz, 1980; Booth, 1984; Mason, 1988; Ursini, 2008). La preocupación de estos investigadores ha dado luz a una variedad de teorías que intentan explicar las causas que dificultan el aprendizaje de esta rama de las Matemáticas, así como propuestas de solución a dichos conflictos. A continuación, se presenta de forma breve el trabajo de estos investigadores con la finalidad de introducir la problemática que se trata en este proyecto. En la sección 1.1.1 se habla sobre los trabajos de Matz (1980) y Booth (1994), enfocándose en los errores y dificultades que presentan los estudiantes en su aprendizaje del Álgebra. En la sección 1.1.2 el resumen del trabajo de Mason (1988) y de Ursini (2008) permitirá abordar las formas de registro que tiene un estudiante para expresar la generalidad de un patrón observado y las estrategias de enseñanza que pueden facilitar la comprensión de conceptos algebraicos.

1.1.1 Estudios sobre los errores

Esta sección está dedicada a la presentación de dos estudios que centran su atención en los errores que estudiantes entre 12 y 15 años cometen al desarrollar procesos algebraicos: el de Matz (1980) y el de Booth (1994).

El artículo de Matz “Towards a computational theory of algebraic competence” (1980), es el resultado del trabajo realizado con estudiantes de 13 a 15 años, particularmente concentrado en los procesos que generan los errores más recurrentes en los estudiantes. De la variedad de casos citados la autora considera tres distintos procesos:

- *Extrapolación*. Adaptación incorrecta de las reglas de Aritmética conocidas por el estudiante para tratar de dar solución a un nuevo problema.

- *Cambios conceptuales.* Cambio entre el trabajo en Aritmética con el trabajo en Álgebra.

- *Problemas en la ejecución.* En cuanto a la planeación o en cuanto a la ejecución de algoritmos con la sintaxis propia del álgebra.

En el caso de la *extrapolación* cuando a un estudiante se le plantea un problema existen dos opciones para darle solución: (a) si la situación presenta un contenido que ya ha sido trabajado, bastará con aplicar las reglas conocidas para solucionarla, (b) si se trata de una situación desconocida, el estudiante intentará acomodar las reglas que conoce para darle una respuesta. La falta de experiencia de los estudiantes puede conducir a errores al tratar de aplicar reglas de manera iterada en los casos en los que no es posible adaptarlas. Por ejemplo, aplicar la regla de cancelación $\frac{Ax}{x} = A$ para simplificar la siguiente fracción algebraica:

$$\frac{Ax + By}{x + y} = A + B$$

Es común encontrar que los estudiantes aplican linealmente reglas que los llevan a cometer errores como el anterior.

Otra forma de extrapolar reglas se relaciona con la tendencia en aritmética que tiene el estudiante de obtener resultados numéricos específicos y el rechazo a aceptar respuestas no cerradas en álgebra, por ejemplo, que apliquen las reglas de manera que aparezca una sola variable: $\frac{x}{2x + y} = \frac{1}{2 + y}$

También puede pasar que el estudiante busque llegar a resultados de un solo término: $\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}=2xy$.

Es común que al simplificar expresiones de la forma $\frac{x}{x}$, los estudiantes generalmente pueden confundir la simplificación de fracciones aritméticas y asumir como respuesta que $\frac{x}{x}=0$.

Al hablar sobre cambios conceptuales, Matz explica que tienen que ver con la interpretación del signo igual, pues en aritmética se usa para indicar el lugar en el que debe colocarse la respuesta, mientras que en álgebra puede indicar tanto una equivalencia entre dos expresiones (tautología) como una condición en una ecuación (que indica que se debe encontrar el valor desconocido). Así pues, expresiones de formas similares pueden significar asuntos diferentes.

$$4x+12y=4(x+3y)$$
$$4x+12=3x-4$$

Este hecho genera errores en los estudiantes pues el manejo en ambas expresiones es diferente, mientras que en la primera es necesario operar con uno o ambos lados de la igualdad individualmente para demostrar la tautología, en la segunda se deben mezclar estos lados para lograr despejar "*x*" y obtener el valor o los valores numéricos (cantidades finitas) que hacen correcta la igualdad.

Finalmente, para hablar sobre dificultades en la ejecución, Matz expone que los problemas surgen al no considerar que en aritmética el proceso para obtener la respuesta a un ejercicio es claramente definido, ya que se debe respetar el orden de las operaciones y los paréntesis; en cambio, en álgebra los procesos no se interpretan tan fácilmente, ya que las instrucciones pueden ser diversas (simplificar, factorizar, demostrar o resolver) y los pasos de solución de cualquiera de estas instrucciones en ocasiones no se reconocen hasta tanto no se inicie y se avance en el proceso.

Para aclarar un poco más la afirmación anterior se presenta el siguiente ejemplo:

$$\frac{3x}{x+3}+\frac{y}{x-7}=11$$
$$\frac{3x\left(x-7\right)+y\left(x+3\right)}{\left(x+3\right)\left(x-7\right)}=11$$
$$\frac{3x\left(x-7\right)}{\left(x+3\right)\left(x-7\right)}+\frac{y\left(x+3\right)}{\left(x+3\right)\left(x-7\right)}=11$$

El estudiante en este ejemplo realiza los pasos que considera pertinentes para el desarrollo del ejercicio, pero en este caso el hecho de separar la fracción (tercer renglón) no es un paso productivo pues regresa la expresión a su estado inicial.

Matz concluye con la elaboración de un modelo de desarrollo de competencias algebraicas basado en el estudio de los errores comunes y la forma en la que se derivan del trabajo en aritmética.

El trabajo de Matz, con la variedad de errores y las causas que pueden propiciarlos en los estudiantes, resultó un importante apoyo para la elección de problemas que aparecen en la secuencia diseñada para el desarrollo de esta tesis. Particularmente, su trabajo con expresiones racionales contribuyó a la decisión de abordar en mi tesis el tema de la "Imposibilidad de la división entre cero" en el segundo problema de la secuencia didáctica. Como se verá en el capítulo 3 de *Metodología*, en este problema se aborda la simplificación de una fracción algebraica y la determinación del dominio de la función racional correspondiente.

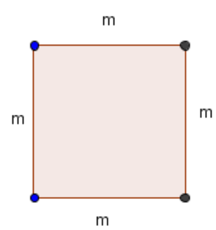
Por su parte, el trabajo de Booth y sus colaboradores, Jhonson, Brown y Hart, aporta información relevante acerca de dos temas: las estrategias de solución y los errores que estudiantes de secundaria realizan al resolver problemas de Álgebra.

Booth, en el libro *Algebra: Children's Strategies and Errors A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project* (1984), investiga los problemas más comunes que experimentan alumnos de secundaria (12 a 15 años) en el aprendizaje del Álgebra y examina qué puntos se podrían corregir o evitar a través de la aplicación del diseño de módulos de enseñanza. Booth considera 6 categorías del uso de literales por parte de los estudiantes. A continuación, se hablará de cada categoría, acompañada de ejemplos extraídos del texto de la autora.

1. Primera categoría. Literal evaluada

De acuerdo con Booth, esta categoría se caracteriza porque el niño asigna un valor numérico a la literal desde el principio. Para ejemplificar lo anterior, Booth presenta en la página 17 el siguiente problema.

Ejemplo. Calcular el perímetro de la figura (p.17).



En este ejercicio se pide al estudiante que calcule el perímetro de un cuadrado con lado de longitud *m.* El alumno mide con una regla la longitud de los lados del cuadrado, asignándole un valor a la literal *m*.

2. Segunda categoría. La literal que no se usa

En esta categoría Booth explica que el niño ignora la existencia de la literal o no le da un significado. En el siguiente ejemplo el estudiante tiene que multiplicar la constante 4 por el binomio $n+5$ dando como resultado $4n+20$, sin embargo, se tiene lo siguiente.

Ejemplo. Multiplica 4 por n+5 (p.3).

Respuesta: 20

El niño multiplica 4 por 5 y simplemente ignora a la *n.*

3. Tercera categoría. Literal como objeto

En esta categoría la literal es sólo un símbolo que representa un objeto (uvas, longitud, etc.) y por lo tanto las puede sumar sin importar que se trate de literales diferentes: *a* y *b*.

Ejemplo. Suma 2a + 5b (p.3).

Respuesta: *7b*

En este caso el niño trata a las literales como objetos que pueden ser coleccionados. Para él existen dos elementos del tipo *a* que se suman a cinco elementos del tipo *b* para tener una colección de siete elementos.

4. Cuarta categoría. Literal como una incógnita específica

De acuerdo con Booth, el niño considera a la literal como un número desconocido pero específico, por eso en el siguiente ejemplo la literal *M* asume un valor específico diferente a la literal *P.*

Ejemplo. La expresión L+M+N=L+P+N ¿es verdadera, a veces, siempre o nunca? (p. 4).

Respuesta: Nunca

Para el niño las literales son desconocidas, pero tienen un valor específico, razón por la cual el cambio de *M* a *P* implica valores diferentes impidiendo que se cumpla la igualdad.

5. Quinta categoría. Literal como número generalizado

Booth afirma que el niño sabe que la literal es capaz de tomar varios valores en vez de sólo uno. En el ejemplo de la página 26 de su texto, incisos a y b, se pide al alumno que calcule el perímetro de una figura de 19 lados iguales y de longitud 7, posteriormente el de una figura de *n* lados iguales de longitud 5, ver figura 1.1. La finalidad del anterior ejercicio es que el niño vaya encontrando una fórmula que generalice el procedimiento de calcular el perímetro. Sin embargo, a pesar de resolver bien el primer ejercicio, no puede generalizar en el segundo caso.

Ejemplo. Calcula el perímetro de las siguientes figuras, los lados tienen la misma longitud.

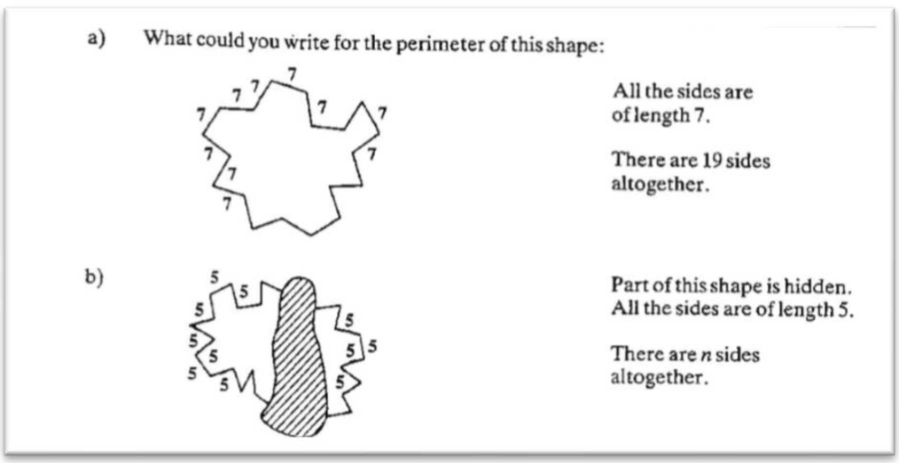


Figura 1.1. Variable generalizada (p.26)

En este ejercicio el niño deduce que el perímetro de la primera figura se puede determinar con la siguiente operación $19 \times 7 = 133$, pero en el caso de la segunda figura requiere del valor de *n* para poder realizar el producto $n \times 5$, ya que *n* puede asumir varios valores en vez de sólo uno.

6. Sexta categoría. Literal como variable

La literal representa un rango de valores no específicos, pero se establece una relación entre estos valores y ella misma. En el ejemplo de la página 4 se define una relación entre las literales *c* y *d.*

Ejemplo. Si $c + d = 10$ *y c es menor que d entonces ¿los valores que puede asumir c son? (p. 4)*

Respuesta: 0, 1, 2, 3, 4 (o 5).

En este caso el niño comprende la relación entre las variables *c* y *d* pues sabe que la suma de sus valores debe ser igual a 10, pero si *c* asumiera el valor de 5 entonces no podría ser menor que *d*, sino iguales.

De las anteriores categorías, la tercera representa uno de los errores más comunes que he observado en mis alumnos (estudiantes de nivel bachillerato). Concuerdo con Booth en que puede deberse a que el estudiante ve a las literales como objetos coleccionables.

Para el ejemplo mostrado he observado la siguiente respuesta: $2a+5b=7ab$ y puedo entender que la interpretación que se le da a $7ab$ es la de una colección de 7 objetos del tipo *a* y tipo *b*.

Después de hablar sobre los usos de la literal por parte de los alumnos, Booth identifica cuatro áreas de dificultad y sus respectivas rutas de investigación. A continuación, se describen brevemente junto con estrategias que pueden ayudar al estudiante a trascender estas dificultades.

1. Área uno. Interpretación de las literales

Booth afirma que los niños no perciben a las literales como representantes de números que pueden actuar como si tuvieran un valor único $x+7=10$; o un infinito rango de valores $x+y=y+x$, ellos tienden a ignorarlas o a pensar que asumen un valor dependiendo de su orden alfabético: *a=1, b=2* y así sucesivamente. Tratan a las letras como objetos que pueden ser sólo coleccionables, es por ello que el módulo de enseñanza trata de direccionar este problema introduciendo la idea de literales que asumen un rango de valores y no un valor específico.

2. Área dos. Formalización y simbolización del método

De acuerdo con Booth, normalmente los niños no simbolizan los métodos que usan para resolver los problemas de aritmética, en consecuencia, son incapaces de producir una forma generalizada del método como se realiza en álgebra, lo anterior puede ocurrir por las siguientes razones:

- Los niños usan como método su sentido común para resolver problemas en el salón de matemáticas.

- Incluso cuando los niños usan un (pensamiento) método formal, siguen siendo incapaces de simbolizarlo.

- Pese a que los niños simbolicen un método formal, no son conscientes de que esto debe hacerse.

Enfocar la atención sobre la estructura formal de un problema y la necesidad de representar "las reglas" para su solución correcta y sin ambigüedades es de vital importancia. Si el niño tiene una estructura formal para el caso de problemas de aritmética, es muy probable que también lo tenga en el caso del Álgebra.

3. Área tres. Legitimidad de respuestas no cerradas

Los niños no consideran la expresión $n+3$ como una sola respuesta, sino como una suma que debe realizarse, sustituyen un valor para *n* o realizan la suma para entregar el resultado de *n3* o *3n*. Lo anterior lleva a la consideración de la legitimidad de respuestas no cerradas ($n+3$) y el significado que puede ser atribuido a los mismos, es decir, la vinculación de los términos en sumas y productos.

4. Área cuatro. Notación y convención: mal uso de paréntesis.

Los niños no consideran necesario el uso de paréntesis porque tienen la creencia de que las operaciones se realizan en el orden en que están escritas $4+5\times 2=9\times 2=18$ o bien que, sin importar el orden, el resultado va a ser el mismo. En esta área, Booth propone hacer notar la posible ambigüedad de expresiones escritas sin paréntesis, como un preludio para introducir su uso.

Al enfocarse en las dificultades del significado de las literales, la investigación de Booth ha revelado fuentes de errores conceptuales, los cuales pueden ser reorientados en los procesos de enseñanza sugeridos a continuación.

- Si el niño percibe a la literal como valor desconocido, esta percepción se puede utilizar para que el niño la vea como número generalizado.

- Cuando el niño confunde el uso de la literal para el caso aritmético *3m* (tres metros) con los algebraicos *3m* (tres veces m) puede generarse una discusión que incluya consideraciones de su significado.

- El usar expresiones como *V=número de vértices* y usar la misma *V* para vértices debe evitarse por lo menos al inicio de su introducción al álgebra.

- Los niños deben ser alentados a usar los símbolos matemáticos que sí conocen, como los de las operaciones matemáticas.

La investigación de Booth reporta que se debe poner mucha atención en los métodos que el niño usa, para hacerlo consciente de las limitaciones de los diferentes tipos de procedimientos.

El problema de la simbolización (notación) no debe ser desestimado, los niños no pueden aún asimilar representaciones abstractas, a menos que se establezca un proceso que se vincule con significados.

La idea de dotar al niño de una estructura formal en la solución de problemas de Aritmética, para su buen desempeño en la solución de problemas algebraicos, generó la línea de investigación de esta tesis, pues se decidió estudiar los conocimientos de fracciones aritméticas que los estudiantes movilizan en el momento de resolver una problemática que incluya fracciones algebraicas; también de estas propuestas surgió la iniciativa de alentar a los estudiantes a usar los símbolos matemáticos que conozcan, y motivarlos a usar el Álgebra como un lenguaje que facilite sus estrategias de solución.

El trabajo de Booth abre un amplio panorama sobre los usos que los estudiantes dan a las literales. Respecto a la simbolización o representaciones abstractas, para la investigación realizada en esta tesis es importante resaltar la dificultad que se presenta en los estudiantes al pedirles que generalicen. Puede pasar que las bases con las que cuentan los estudiantes para resolver un problema en Aritmética sean puntos fortalecidos por su sentido común, sin embargo, cuando se trata de generalizar o describir el fenómeno estudiado a través de modelos algebraicos no siempre es un objetivo fácil de lograr.

A continuación, es presentado el resumen de dos investigaciones: Mason (1988) y Ursini (2008), ambos autores fundamentaron teóricamente gran parte del diseño de las preguntas que aparecen en la secuencia. De Mason ha sido de gran utilidad las formas de registro que tiene un estudiante al abordar una problemática algebraica, y de Ursini su propuesta de enseñanza en espiral contribuyó a definir la estructura de las preguntas y el nivel de complejidad de cada problema en la secuencia didáctica elaborada en esta tesis.

1.1.2 Formas de registro y el método en espiral

El trabajo de Mason, *Rutas/raíces hacia el álgebra (1988),* específicamente la sección titulada el "Interludio", inspiró una parte de la secuencia didáctica diseñada en esta tesis. En ella se pide a los estudiantes que encuentren el modelo algebraico que describe el comportamiento de un fenómeno, y es en esta etapa de registrar con símbolos, que el autor muestra una perspectiva bastante interesante. El interludio habla sobre tres formas que el estudiante usa para expresar la generalidad de un patrón observado: *ver, decir y registrar.*

El interludio comienza analizando la importancia de lograr que los estudiantes puedan registrar lo que han observado en una problemática, y expone algunas ventajas derivadas de este registro que los docentes han observado en sus alumnos:

- Pueden motivarse a expresar sus pensamientos de forma escrita clarificando dichos pensamientos.
- Los alumnos pueden hacer ese conocimiento accesible a los demás.
- Los estudiantes comienzan a manipular esas expresiones (registros), lo cual es un componente importante del Álgebra.

- El registro de un alumno es un apoyo en la detección de concepciones erradas.

La primera forma en la que los alumnos registran sus resultados es con *sólo palabras.* El estudiante escribe usando palabras del idioma usual sin utilizar ningún símbolo especial. En el siguiente ejemplo el profesor pide a un alumno que describa cómo obtener el perímetro de un rectángulo.

Ejemplo. Para encontrar el perímetro de un rectángulo, duplique el ancho y el largo y luego sume los dos (p. 52).

El profesor al pedirle a un alumno que escriba lo que acaba de decir, lo ayuda a que aclare sus pensamientos y lo estimula a que utilice un lenguaje más breve que el de las palabras, haciendo que surja la necesidad de utilizar expresiones simbólicas más claras y compactas.

La segunda forma de registro es con *palabras y símbolos,* esto es una expresión mixta que contiene palabras del idioma usual y símbolos, principalmente de las operaciones. El siguiente ejemplo muestra el uso de símbolos de operaciones $(X,+)$ y palabras.

Ejemplo. En la factura de la energía eléctrica que deben pagar todos los usuarios a la Distribuidora de Energía de Bogotá, el valor total a pagar por consumo se obtiene realizando el siguiente cálculo: Número de Kilovatios hora (KWH) X *Valor de un kilovatio hora* + *cargo fijo (p. 54).*

Estas expresiones mezcladas (palabras, símbolos de producto y de suma) simplifican a las que sólo son verbales en frases descriptivas, claves de variables particulares y en el uso de símbolos matemáticos para las operaciones.

La tercera forma de registro es con *sólo símbolos,* estas expresiones no incluyen palabras, contienen sólo letras y símbolos matemáticos junto con convenciones implícitas sobre las posiciones, el orden y la orientación, y por lo tanto su forma algebraica es reconocible. Lo siguiente es un ejemplo de la tercera forma de registro.

Ejemplos (p. 56).

$a \times b$; $(\square + 1) \times 3 =$

El interludio termina con un análisis sobre cuándo es suficiente y necesario un registro. Mason afirma: “La suficiencia depende esencialmente del propósito de la tarea […] La precisión que ofrece el uso de sólo símbolos muestra sus ventajas únicamente cuando se requiere manipular las expresiones” (p. 56). Las sugerencias del interludio de forma concreta son:

- Reconocimiento del amplio rango de formas de expresar la generalidad.
- La aceptación de cualquier forma de expresión como legítima.
- Dar tiempo al alumno para que registre en la forma que él escoja.
- Promover el uso de una notación más sucinta.
- El propósito principal es lograr una expresión exitosa de la generalidad.

Es importante notar que para los alumnos el registrar sólo con símbolos requiere de habilidades que fortalezcan la formación de un pensamiento abstracto, y sugerencias como dar tiempo para que el alumno registre en la forma de su elección, o convencer al estudiante de las ventajas de una notación sucinta, aspectos que podrían proporcionar el camino para un pensamiento de este tipo.

No es posible terminar este recorrido bibliográfico sin hacer mención de los aportes de Ursini, Escareño, Montes y Trigueros (2008) en su libro *Enseñanza del álgebra: Una propuesta alternativa.* En esta obra la autora profundiza en las causas que conducen a los estudiantes a cometer errores al trabajar en Álgebra. En esta perspectiva Ursini afirma:

> Varios de los errores más comunes que cometen los estudiantes al trabajar en álgebra se deben a que no logran darle sentido al uso de las literales y de cómo se espera que trabajen con ellas. En su esfuerzo por darles algún sentido, recurren a

> su experiencia aritmética que, por lo general, no se enseña con el propósito de facilitar el aprendizaje del álgebra.
>
> Después de seis años de primaria (en los que los alumnos han trabajado casi exclusivamente con los números), los símbolos literales aparecen, por lo general, sin mayores explicaciones. Tampoco suelen plantearse situaciones que vuelvan necesaria su introducción (p.16).

La anterior cita invita a reflexionar sobre la forma en que se aborda por primera vez el Álgebra dentro de un salón de clase, ya que en general no se dedica un tiempo para explicarle al alumno lo que puede representar una variable o las ventajas de usarla. En ocasiones el estudiante sólo recibe como explicación, que mientras en primaria era usado un cuadrito vacío para representar un número faltante, ahora se utilizará una letra. Un ejemplo de lo anterior se expresa de la siguiente forma:

$$\square + 7 = 10$$
$$x + 7 = 10$$

Ursini menciona tres usos de la variable: como incógnita específica, como número general y como variables en una relación funcional. Los siguientes ejemplos expondrán cada uno de estos usos.

1. Primer uso. La variable como incógnita específica

De acuerdo con Ursini, el estudiante usa a la variable como incógnita específica en problemas que pueden resolverse usando un planteamiento algebraico en donde la incógnita aparece una sola vez. El siguiente ejemplo muestra el planteamiento de un problema a través de una ecuación de primer grado en la que la incógnita aparece una sola vez.

Ejemplo. Una caja en forma de prisma rectangular tiene 4.5 cm de ancho y 3 cm de alto, y su volumen es de 81 cm^3 ¿Cuánto mide de largo? (p. 24).

Se obtiene la expresión $81 = x(4.5)(3)$ de la cual el alumno obtiene el valor específico de la variable.

2. Segundo uso. La variable como número general

Ursini describe este uso como aquel en el que la variable se aprecia como un número en general que describe un comportamiento o patrón. En el siguiente ejemplo la variable *n* representa el lugar del número en una lista y el número está representado por la fórmula *30n*.

Ejemplo (p.28) Dada la siguiente lista de números, si denotamos con la letra n un lugar cualquiera de la lista, ¿qué número estará en ese lugar?

Lugar	Número
1	30
2	60
3	90
.	.
.	.
.	.
n	¿?
.	.
.	.
.	.

El alumno reconoce el patrón y deduce la fórmula general *30n.*

3. Tercer uso. La variable en una relación funcional

Para este uso Ursini explica que se establece la relación entre dos variables derivadas de un contexto que las vincula. En el siguiente ejemplo las variables son el *peso* de la mercancía de un mercado y el *desplazamiento* que se observa en la charola de la báscula. El contexto que vincula a estas dos variables es el puesto de mercancía de Don Panchito en un mercado.

Ejemplo (p. 32) El peso de la mercancía que se compra en el mercado se mide con una báscula. En el puesto de Don Panchito, por cada kilogramo de peso, la charola de la báscula se desplaza 4 cm. Encuentre la relación entre el peso de la compra y el desplazamiento de la charola.

El alumno reconoce que existe una correspondencia entre los valores de las dos variables: El peso y el desplazamiento que simbolizan la relación funcional.

Este último uso proporcionó la idea de trabajar en la secuencia didáctica de esta tesis con problemas en donde la variable tenga un uso funcional y se le rodee de un contexto que sea atractivo para el estudiante.

Ursini establece las siguientes propuestas para mejorar el aprendizaje del Álgebra:

- *La generalización*. Resalta el reconocimiento de patrones como en el ejemplo mostrado en el segundo uso de la variable.
- *La función.* Propone acercarse al Álgebra a través del trabajo con cantidades relacionadas hasta llegar a la expresión simbólica usando literales.
- *La resolución de problemas.* Enfatiza la resolución de problemas usando los métodos para resolver ecuaciones.
- *Lenguaje en su propia gramática.* Reitera la correcta manipulación de los signos.
- *Enseñanza en espiral.* Esta es una propuesta de enseñanza en donde las llamadas espiras contiene dos fases. En la primera el trabajo prioriza en la utilización de ejercicios que involucren sólo uno de los tres usos, la intención es

fortalecer su comprensión, y en la segunda se trabajan actividades cuyo desarrollo requiere de los tres usos. Recibe el nombre de espira o espiral debido a que el contenido matemático que se esté tratando es estudiado dos veces desde diferentes niveles de complejidad.

Ursini destina una parte de su libro para hablar del papel del profesor, en donde, citando a Vigotsky, sobre una idea fundamental del concepto de la *zona de desarrollo próximo* propuesta por él, la define como la distancia entre el nivel de desarrollo real, determinado por la capacidad del niño para resolver un problema de manera independiente, y el nivel de desarrollo potencial, determinado por su capacidad para resolver un problema con el apoyo del profesor o de un compañero más capaz (2008, pp. 42 y 43). Según Ursini, parafraseando a Vigotsky, un aspecto principal del aprendizaje es que éste va creando esta zona, ya que despierta varios procesos internos que surgen sólo al interactuar con otros, de esta forma, el papel del profesor es:

- Organizar el entorno para lograr una participación que propicie el intercambio de ideas.
- Guiar a los alumnos para que desarrollen habilidades en los diferentes usos de la variable.
- Planificar actividades que propicien el crecimiento de la zona de desarrollo próximo, creando actividades que fomenten la ejecución de tareas bajo la guía de alguien más capaz.
- Utilizar estrategias comunicativas, como el parafraseo de las respuestas de los alumnos, que les permita reflexionar para acercarse a la generalización de situaciones.

Ursini concluye con un instrumento de diagnóstico que se encuentra en la última parte del libro (p.169), en el que es posible apreciar dos cuestionarios de evaluación, en el primero se busca conocer la manera en la que los estudiantes diferencian los tres usos de la variable; en el segundo es analizada la flexibilidad con la que los alumnos pasan entre estos diferentes usos, a través de problemas más complejos.

Como se especificó en la introducción de esta tesis, el objetivo principal es la comprensión del concepto de fracción algebraica a través de problemas de modelización matemática, en los que el uso de la variable de acuerdo con Booth (1984) y el proceso de generalización desde la perspectiva de Mason (1988), tuvieron un importante papel para el diseño de la secuencia didáctica, la cual sirvió como uno de los medios para detectar la movilización de conocimientos sobre fracciones aritméticas que los estudiantes usan.

Tal como se muestra más adelante, las funciones racionales fueron consideradas como variable en una relación funcional (Ursini, 2008) que el alumno reconoció.

Para cerrar es importante señalar que cada una de las investigaciones revisadas proporcionó ideas para definir la línea de investigación a seguir, y aunque algunos de estos trabajos fueron elaborados hace ya varias décadas, sus aportaciones continúan siendo la base para futuros estudios.

1.2 Planteamiento del problema

Como docente conozco algunas de las dificultades que los alumnos enfrentan en un curso de álgebra, y después de hablar sobre los trabajos de investigación de Booth, Ursini, Matz y Mason, tengo una perspectiva más clara sobre la problemática. El presente trabajo pretende abordar el tema de la transición de los conocimientos sobre *fracciones aritméticas a fracciones algebraicas*[3].

[3] Fracción algebraica simple es aquella en que el numerador y el denominador son expresiones de polinomios, y el divisor no es nulo (Lehmann, 2005).

Los antecedentes teóricos permitirán ir estableciendo relaciones entre lo que se observa en las experiencias dentro de mi campo docente, y las conclusiones obtenidas del trabajo de campo realizado con los estudiantes.

Por ejemplo, si se les pide a los alumnos que simplifiquen una fracción como $\frac{8}{12}$, dicha simplificación puede ocurrir de la siguiente forma: $\frac{8}{12}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

Matz (1980) en su artículo “Towards a computational theory of algebraic competence”, menciona en los ejemplos de las fracciones algebraicas que uno de los errores más comunes que cometen los alumnos se encuentra al simplificar. Al preguntarle al estudiante sobre su proceso de simplificación explica que divide tanto al numerador como al denominador entre 2, tantas veces como sea necesario. Por lo tanto, no transforma la fracción usando factores primos para poder aplicar propiedades que ayudarían a dicha simplificación, como se muestra:

$$\frac{8}{12}=\frac{2^3}{2^2\cdot 3}=\frac{2^2\cdot 2}{2^2\cdot 3}=\frac{2^2}{2^2}\cdot\frac{2}{3}=1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

En vez de lo anterior el estudiante realiza un algoritmo de manera mecánica y en algunas ocasiones no razonada.

En el caso de la simplificación de una fracción algebraica con frecuencia se observa que los alumnos lo resuelven así:

$$\frac{8x-8}{12x-12}=\frac{8\cancel{x}-8}{12\cancel{x}-12}=\frac{8-8}{12-12}=\frac{0}{0}=0$$

Matz comenta que este tipo de errores son recurrentes debido a la extrapolación de conceptos o reglas aprendidas para otro caso, y que el estudiante busca aplicar para resolver el ejercicio, como es $\frac{AX}{X}=A$ y en el caso de la expresión $\frac{0}{0}=0$ puede atribuirse a errores conceptuales.

A partir de las ideas de Matz en esta tesis me pregunto: ¿Podría ser que, si el alumno comprendiera el algoritmo aritmético de descomponer en factores primos, mostrado anteriormente, entonces usaría la factorización de cada polinomio para aplicar las mismas reglas? De ser así, el alumno factorizaría los polinomios del denominador y numerador para poder tener la unidad y entonces simplificar para llegar a fracciones equivalentes tal como lo muestra el siguiente ejemplo:

$$\frac{8x-8}{12x-12}=\frac{8(x-1)}{12(x-1)}=\frac{8}{12}\cdot\frac{x-1}{x-1}=\frac{8}{12}\cdot 1=\frac{2}{3} \quad \text{con } x\neq 1$$

El alumno al tratar de adaptar las reglas comete errores en su ejecución al dar solución al nuevo problema (Matz, 1980). Ejemplos como el anterior conducen a pensar que, aunque un alumno conozca y comprenda el algoritmo aritmético, no siempre le es posible relacionarlo con los algoritmos algebraicos, esto lleva a preguntarse si existe alguna opción que sirva como apoyo para que el estudiante trascienda de los conocimientos de fracción aritmética a los de la fracción algebraica.

A continuación, se establecerá la importancia de realizar esta investigación para contribuir con algunos objetivos que la Escuela Nacional Preparatoria señala como puntos básicos en el desarrollo del programa de Matemáticas.

La enseñanza del Álgebra en el cuarto año del bachillerato en la ENP tiene como uno de sus objetivos construir las bases de los conocimientos que ayuden a la comprensión de temas en cursos posteriores. Tal es el caso de *Funciones*, dicho tema aparece en el contenido de los programas de estudio de todas las áreas del sexto año de preparatoria. Actualmente, *funciones* está contemplado desde el programa de cuarto año, y aunque en quinto año se profundiza sobre el mismo, la mayoría de los estudiantes al llegar a sexto año han olvidado esos antecedentes que les permitirían transitar de manera más fluida en la solución de problemas relacionados con el entorno del alumno. ¿Es posible entonces contemplar el camino de introducir fracciones algebraicas usando a las funciones?

Una función estudiada en sexto año de preparatoria es $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$, la cual es conocida como la recta disfrazada, ya que salvo en $x=2$, abscisa del punto A, el cual es de discontinuidad, la gráfica corresponde a una recta. Ver figura 1.

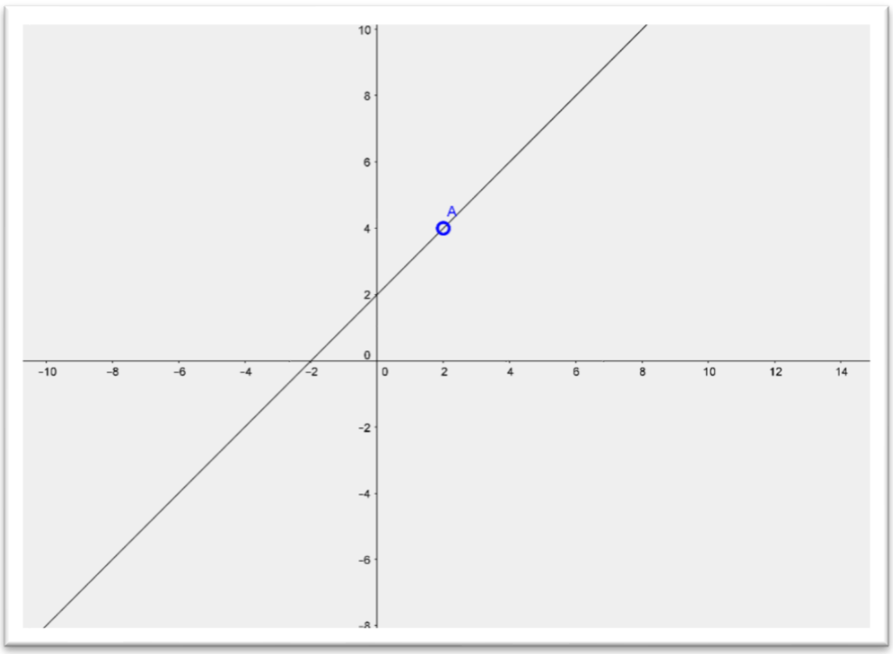


Figura 1.1. Recta disfrazada

Dicha función pertenece al conjunto de *funciones racionales,* que se entenderá como el *Campo cociente de las funciones polinomiales* no divisibles entre sí y cuyo denominador sea diferente de cero.

La función $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ puede ser graficada usando herramienta como el software GeoGebra, pero la intención no sólo es desarrollar la habilidad del estudiante en el manejo de tecnología, sino que utilice esta herramienta para comprender las características de esta función y la relacione con una fracción algebraica que puede ser simplificada.

$$\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{\left(x-2\right)\left(x+2\right)}{x-2}=\frac{x-2}{x-2}\cdot\frac{x+2}{1}=1\cdot\left(x+2\right)=x+2$$

El alumno al observar el comportamiento de la gráfica de $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ la vería como si en realidad estuvieran graficando a la función $g(x)=x+2$ pero se espera que note que no es la misma función, ya que la primera no está definida para $x=2$ pues implicaría la división entre cero.

Es importante señalar que la fracción algebraica o expresión racional $\frac{x^2-4}{x-2}$ es un objeto matemático distinto de una función racional $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$, como se explicó anteriormente, pero ¿podría usarse a la función como un medio que vincule a la fracción aritmética con la algebraica?

En la secuencia didáctica se trabaja con problemas de modelización matemática[4] que hablan sobre el contexto de la basura por considerarse de interés para el alumno; y que, al ser resueltos, los estudiantes puedan vincularlos con conocimientos adquiridos sobre el tema de fracciones aritméticas y las interpretaciones de una fracción algebraica.

Puedo ver que el Álgebra es una herramienta que ayudaría a los estudiantes en cualquier curso posterior de Matemáticas, también que su aprendizaje desarrollaría un pensamiento analítico y reflexivo, pero el interés principal de este trabajo es la transición de la Aritmética al Álgebra en el caso específico del tema de fracciones algebraicas. A partir de la práctica docente que he desarrollado en los últimos años, consideré importante investigar sobre los conocimientos de fracciones aritméticas que los jóvenes de bachillerato han adquirido durante su formación anterior, de manera que puedan ser utilizados en la comprensión de las fracciones algebraicas.

De hecho, en el ciclo escolar 2017-2018, la Escuela Nacional Preparatoria implementó nuevos programas de estudio de Matemáticas en los que menciona la aplicación de problemas de modelización matemática como una estrategia de

[4] En el capítulo 2 se hablará con más detalle sobre este tipo de problemas

enseñanza. Esta tesis tiene entre sus aportaciones una secuencia didáctica que utiliza ese tipo de problemas, reconociendo la importancia que el estudio de las fracciones ha tenido desde el nivel primaria y secundaria, pero muy poco a nivel bachillerato. Es así que considero que me encuentro ante una gran oportunidad para establecer una articulación del conocimiento adquirido en los niveles previos al de bachillerato.

En general, sostengo que el tema de fracciones debería ser parte de la cultura del estudiante mexicano. Si se enfoca la atención en proporcionarle al alumno una estructura formal de un problema de aritmética y la explicación de las reglas para su correcta solución, es probable que también construya una estructura formal en el aprendizaje de los problemas algebraicos. Pienso que el reconocimiento de caminos que simplifiquen el trabajo del estudiante, a través del uso de expresiones algebraicas, es una parte del Álgebra que me ofrece diferentes recursos para mostrarle a los alumnos su utilidad en un entorno propio, y de esta forma transformar la percepción que se tiene de las Matemáticas como una disciplina confusa y poco útil.

1.3 Pregunta de investigación

Así que la pregunta de investigación que se deriva del anterior planteamiento es:

> ¿Qué conocimientos sobre *fracciones aritméticas* se movilizan al trabajar con una secuencia didáctica que introduzca la solución de problemas sobre *fracciones algebraicas*, usando funciones racionales desde la perspectiva de modelización matemática?

1.4 Objetivo General

Detectar qué conocimientos sobre fracciones aritméticas movilizan los estudiantes de primer ingreso del bachillerato de la UNAM para usarlos como apoyo en la comprensión del concepto de fracción algebraica mediante una secuencia didáctica sobre el uso de funciones racionales para modelar fenómenos.

1.5 Objetivos específicos

- Diseño de una secuencia didáctica con problemas de modelización.
- Estudio piloto de la secuencia didáctica con un grupo de estudiantes.
- Estudio definitivo y resultados del trabajo de campo.
- Análisis de los resultados obtenidos.

En el siguiente capítulo se hablará con mayor profundidad sobre los conceptos de número racional, función racional y modelización matemática.

Capítulo 2. Marco teórico

En este capítulo se desarrolla, en primer término, un panorama matemático sobre los números racionales y las funciones racionales. Resulta interesante observar la similitud en la construcción de ambos campos cocientes y, posteriormente, establecer la relación entre lo que se menciona como fracción aritmética y fracción algebraica. En segundo término, se trabaja con los números racionales desde una visión didáctica, para ello nos apoyamos en las interpretaciones de una fracción aritmética desde la perspectiva de Llinares (2003), las cuales sirvieron como apoyo para el análisis previo de la secuencia didáctica.

En la sección 2.1 se inicia con la construcción del conjunto de Números Racionales como un *Campo cociente* generado por el conjunto de los Números enteros. La finalidad es mostrar las diferentes propiedades de estos dos conjuntos (Enteros y Racionales) y poder establecer de forma similar la construcción del *Campo Cociente de las Funciones racionales*, las cuales se utilizaron como un puente entre la fracción aritmética y la algebraica en problemas de modelización.

En la sección 2.2 se aborda los significados de las fracciones desde la perspectiva de Llinares (2003), así como la noción de modelización que nos propone Sadovsky (2005), esperando lograr una visión más didáctica del tránsito de los conocimientos sobre fracción aritmética a los de fracción algebraica.

2.1 Marco teórico matemático[5]

El tema de *Números Racionales* que se incluye en el programa de cuarto año del bachillerato de la Escuela Nacional Preparatoria de la UNAM, dentro de la unidad de Números reales, antecede a la que contiene expresiones algebraicas racionales. Trabajar con ambos contenidos proporciona al alumno información que puede servir para comprender los conceptos algebraicos que se ven posteriormente. Desde una perspectiva personal, impartiendo el curso de Matemáticas IV, se ha podido comprobar lo complicado que resulta, tanto en su enseñanza como en su

[5] Las definiciones que se mencionan fueron obtenidas del libro *Álgebra abstracta* de Herstein (1988) capítulos 4 y 5.

aprendizaje, el tema de las fracciones aritméticas; sin embargo, considero que son una importante herramienta para la solución de problemas de la vida práctica, e indiscutiblemente algo necesario para la continuidad de los estudiantes en el aprendizaje del resto del programa de estudio de ese grado.

Para la construcción de los números racionales es necesario conocer algunas definiciones que se usarán también en la construcción del campo cociente de las funciones racionales.

Definiciones previas

Definición de Anillo

Se dice que un conjunto no vacío R es un *anillo* si tiene dos operaciones $+$ y $\cdot$ tales que:

a) $a,b \in R$ implica que $a+b \in R$.

b) $a+b=b+a$ para $a,b \in R$.

c) $(a+b)+c=a+(b+c)$ para $a,b,c \in R$

d) Existe un elemento $0 \in R$ tal que $a+0=a$ para todo $a \in R$

e) Dado $a \in R$, existe un $b \in R$ tal que $a+b=0$ (b se expresará como $-a$).

f) $a,b \in R$ implica que $a \cdot b \in R$.

g) $(a \cdot b)\cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ para $a,b,c \in R$

h) $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ y $(b+c)\cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ para $a,b,c \in R$

Cuando se postula la existencia del elemento $1 \in R$ tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ para toda $a \in R$ se dice que R es un *anillo con unidad.*

Esta lista de propiedades es conocida por los estudiantes de la preparatoria, pero rara vez se observa que reflexionen, por ejemplo, en que el conjunto de los Números naturales no cumple con la propiedad del inciso (e) por lo que no son un anillo. Al parecer dan por hecho que los conjuntos de números con los que trabajan cumplen todas y cada una de estas características.

Definición de dominio integral

Un anillo *R* en el que es válida la conmutatividad de la multiplicación es un *dominio integral* si $a \cdot b = 0$ en *R* implica que $a = 0$ o bien $b = 0$.

Como ejemplo de anillo y dominio integral se puede mencionar al conjunto de los enteros. Ellos cumplen con la cerradura bajo la suma y el producto (incisos a y f de la definición de anillo); tienen un elemento neutro aditivo que es el cero y neutro multiplicativo que es el uno; tienen elemento inverso aditivo, por ejemplo: el inverso del 3 es el -3 pues $3+(-3)=0$ y si el lector se detiene y revisa se dará cuenta de que los enteros cumplen todas las características de un dominio integral.

Definición de anillo con división

Se dice que un anillo *R* con unidad es un *anillo con división* si para toda $a \neq 0$ con $a \in R$ existe un elemento en *R*, que normalmente se denota por a^{-1}, tal que $a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$

El lector puede notar que el conjunto de los enteros no es un anillo con división, por ejemplo, para $4 \neq 0$ no existe un entero tal que $4 \cdot (?) = 1$. Esta propiedad del inverso multiplicativo es complicada para los alumnos desde la notación, ya que la expresión $a^{-1} = \frac{1}{a}$ les resulta un poco confusa.

Definición de campo

Se dice que un anillo *R* es un *campo* si *R* es un anillo con división conmutativo.

Como un ejemplo de campo están los Números Racionales. Ellos son un anillo con división pues para todo elemento $a \neq 0$ existe $\frac{1}{a}$ tal que $a \cdot \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \cdot a$. En el caso del 4 existe $\frac{1}{4}$ de tal forma que $4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = 1$.

Definición de isomorfismo

Una aplicación $\phi : R \to R'$ de un anillo *R* en otro *R'* es un *isomorfismo si* cumple:

a) $\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$ para todo $a, b \in R$.

b) $\phi(a \cdot b) = \phi(a) \cdot \phi(b)$ para todo $a, b \in R$.

c) ϕ es inyectiva.

Definición de Relación de equivalencia

Una relación $\sim$ en un conjunto *S* se llama relación de equivalencia si satisface para todo $a, b, c \in S$:

a) $a \sim a$ *reflexividad.*

b) $a \sim b$ implica que $b \sim a$ *simetría.*

c) $a \sim b$ y $b \sim c$ implica que $a \sim c$ *transitividad.*

Como ejemplo de una relación de equivalencia se puede mencionar a la *igualdad* $=$ El conjunto *S* sería el de los enteros, pero se representaría con el símbolo $\mathbb{Z}$. La $=$ cumple para $a, b, c \in \mathbb{Z}$ las tres condiciones de la definición anterior:

a) $a = a$ reflexividad.

b) $a = b$ implica $b = a$ simetría.

c) $a = b$ y $b = c$ implica que $a = c$ transitividad.

Definición de clase de equivalencia

Si $\sim$ es una relación de equivalencia en *S,* entonces se define la clase de *a* y se denota $[a]=\{b\in S/b\sim a\}$ el conjunto de elementos de *S* que están relacionados con *a*.

Con las anteriores definiciones se puede proceder a la construcción de los números racionales a partir de los números enteros.

Construcción de los números racionales

Sea $\mathbb{Z}=\{\ldots-3,-2,-1,0,+1,+2,+3\ldots\}$ el conjunto de los *Números enteros,* a partir de $\mathbb{Z}$ se construirá un conjunto $\mathbb{Q}$ cuyos elementos serán cocientes $\frac{a}{b}$ con $b\neq 0$ y $a,b\in\mathbb{Z}$.

Se observa que no hay una manera única de representar, por ejemplo, a $\frac{1}{2}$ pues $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{-7}{-14}=\ldots.$ así que se establecerá una relación de equivalencia entre los elementos de este conjunto. Si $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ son elementos de $\mathbb{Q}$, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ si $ad=bc$.

La relación anterior habla de una relación de equivalencia, esto es:

- *Reflexiva* $\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$
- *Simétrica.* Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ entonces $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$.
- *Transitiva.* Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y $\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ entonces $\frac{a}{b}=\frac{e}{f}$.

Con esta relación de equivalencia se puede formar conjuntos de elementos a las que se les llamará *clases* y como en el caso de $\frac{1}{2}$, éste fungirá como representante de ese conjunto.

$$\left[\frac{1}{2}\right]=\left\{\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}\,/\,\frac{a}{b}=\frac{1}{2}\right\}.$$

Ahora se definirán dos operaciones:

- *Adición*

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ con $b\neq 0$ y $d\neq 0$ por lo tanto $bd\neq 0$ lo que permite que el resultado de esta operación pertenezca al conjunto $\mathbb{Q}$.

- *Producto*

$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ con $b\neq 0$ y $d\neq 0$ por lo tanto $bd\neq 0$ lo que permite que el resultado de esta operación pertenezca al conjunto $\mathbb{Q}$.

Con estas dos operaciones se define el *campo cociente de los enteros* y se llamará Números Racionales.

Para el estudiante el símbolo $\frac{a}{b}$ con $b\neq 0$ representa un tipo de número distinto a los que conocía, el cual se compone de dos números que sí conoce, comprender este hecho resulta un avance cognitivo no tan fácil de asumir.

En la sección 2.2 se habla sobre las diferentes interpretaciones que un alumno puede dar a un número racional.

La relación que se establece entre $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ se puede proyectar a cualquier *dominio integral* D y con esto construir un *campo* $F\supset D$ cuyos elementos sean cocientes $\frac{a}{b}$ con $a,b\in D$ y $b\neq 0$.

Entonces, dado un dominio integral D se puede definir $S \subset D \times D$ tal que $S = \{(a,b) / a,b \in D, b \neq 0\}$, con una relación de equivalencia entre sus elementos: $(a,b) \sim (c,d)$ si y sólo sí $ad = bc$.

Se construye el campo F como el conjunto de todas las clases de equivalencia $[a,b]$ de los elementos $(a,b) \in S$.

F contaría con dos operaciones:

- *Adición* $[a,b] + [c,d] = [ad + bc, bd]$
- *Producto* $[a,b] \cdot [c,d] = [ac, bd]$

Ahora, sea $a \neq 0$ un elemento fijo en D. La aplicación $\phi : d \to [da, a]$ es un isomorfismo de tal forma que *D queda inmerso en F.* Si cada elemento $[a,b]$ puede verse como la fracción $\frac{a}{b}$ entonces F puede llamarse *campo de cocientes* de *D.*

La construcción de las funciones racionales puede realizarse a partir de un dominio integral como el anillo de los polinomios y las operaciones definidas en ese conjunto. A continuación, se mostrará la construcción del campo cociente de las funciones racionales.

<u>Construcción del Campo de las funciones racionales</u>

Sea $F[x]$ el anillo de polinomios de x sobre el campo de los números reales $\mathbb{R}$, es decir, $F[x] = \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n / a_i \in \mathbb{R}\}$ este conjunto con las siguientes operaciones se convierte en dominio integral o entero.

Sean $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$ y $q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_{n-1} x^{n-1} + b_n x^n$ elementos de $F[x]$.

- *Adición.* $p(x)+q(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_{n-1}x^{n-1}+c_nx^n$ con $c_i=a_i+b_i$ para toda *i.*
- *Producto.* $p(x)\cdot q(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_{n-1}x^{n-1}+c_nx^m$ con $c_i=a_ib_0+a_{i-1}b_1+\ldots+a_1b_{i-1}+a_0b_i$

Puesto que $F[x]$ es un dominio entero tiene un campo de cocientes que consta de todos los cocientes $\frac{p(x)}{q(x)}$ donde $p(x),q(x)\in F[x]$ y $q(x)\neq 0$. Este campo de cocientes se denota por $F(x)$ y se conoce como el *campo de las funciones racionales en x sobre* $\mathbb{R}$.

Las funciones racionales son objetos matemáticos diferentes de las fracciones algebraicas, sin embargo, la intención es utilizar las funciones racionales para establecer una relación entre los significados de la fracción aritmética y la algebraica usando como vínculo a los problemas de modelización matemática.

A continuación, se hablará sobre la fracción aritmética y sus interpretaciones desde la perspectiva de Llinares (2003) y su relación con las fracciones algebraicas y la modelización.

2.2 Fracción aritmética, fracciones algebraicas y la perspectiva de la modelización

Las diferentes interpretaciones que el estudiante puede dar a un número racional $\frac{a}{b}$ con $b\neq 0$ se detallan en el trabajo de investigación de Llinares (2003). Dos de estos significados se usaron en el diseño de la secuencia.

Las 4 interpretaciones que Llinares considera sobre un número racional $\frac{a}{b}$ con $b\neq 0$ son: *medida, reparto, operador y razón* sirvieron de apoyo para comprender la importancia de buscar diferentes formas de enseñar el tema de fracciones para que el alumno dote de significado a la fracción aritmética y lo vincule con situaciones cotidianas de su entorno. Un recorrido por cada una de estas interpretaciones permitirá hablar sobre los significados que se consideraron en el diseño de la secuencia didáctica con la que se detectó la movilización de conocimientos de aritmética.

Fracción como medida

Relación entre una parte y un todo (parte-todo), en esta interpretación se consideran situaciones de medida, es decir, un todo dividido en partes.

Ejemplo. Llevo recorrido las $\frac{2}{3}$ partes de mi camino.

En este ejemplo el *todo* es el camino por recorrer, el cual está dividido en tres secciones iguales, y la *parte*, son dos de esas tres secciones. Es importante resaltar que en esta interpretación el numerador de la fracción siempre es menor que el denominador.

En la secuencia didáctica diseñada para detectar los conocimientos sobre fracciones que los estudiantes movilizan, se consideró la utilidad que representa establecer un vínculo de los problemas con el tema de la basura. En el problema uno fue la basura recuperada de la total generada y el conocimiento a movilizar fue la interpretación de la fracción como medida (parte-todo). Este significado es el más frecuentemente visto desde el nivel primaria.

Fracción como reparto

Es el resultado de una división en una situación de reparto. En esta interpretación el número racional es el cociente de una división.

Ejemplo. Si 5 pizzas chicas se reparten entre 3 amigos, cada uno de ellos disfrutará $\frac{5}{3}$ de pizza (una pizza y $\frac{2}{3}$ de otra).

El ejemplo muestra una situación de reparto de pizza, donde $\frac{5}{3}$ es el resultado de esa repartición. En esta interpretación el numerador puede ser mayor que el denominador.

<u>Fracción como operador</u>

En esta interpretación el número racional actúa como una *función* que modifica a una parte, grupo o a un número, disminuyéndola o agrandándola.

Ejemplos:

a) Las $\frac{3}{5}$ partes de una herencia de 3000 dólares son 1800 dólares.

b) Los $\frac{3}{2}$ de 3000 dólares son 4500 dólares.

En el inciso (a) la fracción opera para disminuir al número 3000 y convertirlo en 1800. Si se usa *x* para denotar a la cantidad por operar y a la *y* como el resultado obtenido, entonces la expresión "*y* son las $\frac{3}{5}$ partes de *x*" podría interpretarse como una función cuyo modelo algebraico sería: $y = \frac{3}{5}x$, de tal forma que para obtener las $\frac{3}{5}$ de 3000 dólares, el procedimiento aritmético sería.

$$y = \frac{3}{5}(3000) = 3 \times \frac{3000}{5} = 3 \times 600 = 1800$$

Esto es, obtener tres veces la quinta parte de 3000 dólares.

Para el inciso (b) la interpretación de "los $\frac{3}{2}$ de 3000 dólares son 4500 dólares" sería obtener tres veces la mitad de 3000 dólares. En ambos incisos, el número racional proporciona la relación entre los 3000 dólares iniciales y el resultado final de 1800 y 4500 dólares respectivamente.

Fracción como razón

Es una comparación de dos cantidades de igual o diferente magnitud, Llinares explica que la fracción como razón puede ser comparación parte-parte en un conjunto o comparaciones parte-todo.

Ejemplos:

a) La relación entre chicos y chicas en el aula es de 3 hombres por cada 2 mujeres (3:2). Parte-parte.

b) Una planta medía 11 centímetros, después de dos semanas medía 14 centímetros ¿cuánto ha crecido en relación con lo que medía hace dos semanas? ($\frac{3}{11}$). Parte-todo.

El primer inciso, muestra una comparación parte-parte entre dos "cantidades" de diferente magnitud (hombres y mujeres), no está presente la información del *todo*, ya que se desconoce cuántos alumnos hay en el aula, pero la interpretación permite hacer *predicciones* o supuestos.

—podría haber 15 alumnos, 9 chicos y 6 chicas—

En el segundo inciso, la comparación es entre una parte y el todo. El todo sería el tamaño inicial de la planta (11 centímetros) y la parte, el incremento de tamaño (3 centímetros).

Nuevamente, para la realización de la secuencia, el problema dos trabaja con basura orgánica e inorgánica acumulada en la casa de un estudiante a lo largo de 6 días. La comparación entre la basura orgánica y la inorgánica buscó movilizar la interpretación de fracción como *razón parte-parte.*

Anteriormente se mencionó que la interpretación de *medida* es vista desde el nivel primaria como la relación entre un *todo* dividido en partes y una sección de ellas.

Por ejemplo, si al *todo* se le divide en 11 partes, pero sólo interesan 3 de ellas, se estaría hablando de $\frac{3}{11}$, desde esta interpretación, no podría considerarse 13 partes de un todo que sólo tiene 11. La expresión $\frac{13}{11}$ no tiene mucho sentido.

En el caso en el que el numerador es mayor que el denominador, la interpretación de una fracción como *razón,* desde la perspectiva de Llinares, resulta muy útil, ya que para el estudiante se convierte en la comparación entre dos cantidades que podrían ser incluso de distinto tipo.

Llinares menciona la importancia de trabajar con las diferentes representaciones de una fracción como una forma de lograr una mayor comprensión del concepto, ver a una fracción como un operador puede contribuir a este objetivo, por ejemplo:

$\frac{3}{4}$ *de*…puede interpretarse como el 75% de… o el 0.75 de un todo. Cuando la fracción se ve como un operador, $\frac{3}{4}$ se interpreta como el factor que agranda o disminuye una cantidad, es decir, obtener las tres cuartas partes de mil pesos es dividir a 1000 entre 4 y multiplicar por 3 el resultado de la división, dando como resultado 750 pesos. En este caso la fracción operó como un factor que disminuyó la cantidad original de 1000 pesos, ahora bien, si obtenemos las $\frac{6}{8}$ partes de 1000 pesos el resultado final no se alteraría y podría verse que las fracciones son equivalentes ya que como operadores funcionan de la misma manera.

En la secuencia algunas respuestas de los alumnos, al pedirles la interpretación de la fracción, usaron la representación de porcentaje, pues esto les permitió dar un sentido al resultado.

La perspectiva de la modelización para la introducción de las fracciones algebraicas

Enseñar Matemáticas es una de las actividades que enriquecen la vida laboral; sin embargo, representa un reto a vencer y un objetivo a alcanzar cuando se escucha en el ámbito escolar el desapego por la materia, la insatisfacción del docente por los resultados de un examen o el desconcierto y frustración por lo extenso del programa de estudios. Se puede adoptar una actitud diferente ante estas dificultades y hablar sobre el enfoque teórico y la metodología que, a manera de propuesta pueden resultar útiles; así como buscar la herramienta o los caminos que podrían servir para lograr hacer del aprendizaje de esta disciplina un proyecto exitoso y gratificante. A partir de tales apreciaciones es que nuestra investigación considera a la *modelización matemática* como una estrategia de enseñanza.

Para muchos académicos la noción de modelización se enfoca en el estudio de fenómenos no matemáticos (provenientes de las ciencias naturales o sociales), usando algún sistema teórico de la matemática. Existen varias perspectivas de la modelización: Kaiser (2006), Blum (2007), entre otras, pero se eligió la de Sadovsky (2005) ya que esta investigadora considera que esta herramienta permite modelizar fenómenos matemáticos para producir conocimiento. Esta visión fue el motivante para la realización del segundo problema de la secuencia, en él se trabaja con la comprensión de la imposibilidad de la división entre cero a partir del análisis de la gráfica de una función racional. Sadovsky citando a Chevallard nos habla sobre la “modelización intramatemática” como un proceso de producción de conocimiento de un sistema matemático a través de otro sistema también matemático, el segundo problema se diseñó usando este tipo de modelización.

Cuando veo que un alumno fracasa en realizar procedimientos simples como una suma de polinomios puedo cometer el error de pensar que no podría afrontar actividades más complejas. En cambio, para Sadovsky la modelización matemática puede ser un auxiliar en el proceso donde el alumno, ante un desafío matemático que él considera difícil pero posible, empieza a pensar, explorar y deducir, usando los conocimientos que tiene. Durante este proceso el estudiante socializa con sus compañeros, llega a plantear preguntas, escucha opiniones que le ayudan a avanzar en el camino hacia la solución o que le permiten darse cuenta si sus suposiciones son correctas.

Estoy de acuerdo con Sadovsky en que se puede mirar a la actividad de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas desde otra perspectiva. Comprender que los alumnos deben aprender algoritmos, pero le corresponde al profesor dar a conocer, de forma sencilla, las bases algebraicas que fundamentan estrategias de solución más eficaces para aprender a resolver problemas de su entorno o bien aquellos que capten su atención. Se considera una labor del docente alentar al estudiante a elaborar sus propios métodos de solución, diseñar sus propias estrategias y usar, sobre todo, aquellos conocimientos previamente adquiridos.

Recuerdo cuando tuve que memorizar las *Tablas de multiplicar* y desarrollar mis propias técnicas. Las tablas del dos o del tres las aprendí a través de sumar rápidamente, pero para las del seis o las del ocho realizaba comparaciones, por ejemplo, $2 \times 8 = 16$, así que $8 \times 2 = 16$. Sin saberlo estaba usando una propiedad válida para los números reales: la *conmutatividad del producto.* Si mi maestra hubiera llamado mi atención respecto a esta propiedad, tal vez el proceso hubiera resultado en un aprendizaje con significado. No lo sabré, pero sí tendré siempre presente que algunos compañeros se angustiaban y terminaron por empezar a presentar aversión por las "dichosas" tablas.

Algunas veces escucho a mis colegas manifestar preocupación y malestar por el uso indiscriminado que los alumnos hacen de la calculadora, incluso para realizar multiplicaciones con cantidades menores de diez; estoy de acuerdo, pero también estoy a favor de enseñar al estudiante que la calculadora es una herramienta que puede ser usada, como parte de la tecnología que apoye su aprovechamiento académico.

En los problemas de modelización que Sadovsky plantea en su libro *Enseñar matemáticas hoy. Miradas sentidos y desafíos (2005),* se busca que el estudiante deduzca el modelo algebraico que solucione la problemática planteada. Desde mi experiencia como docente de grupos de quinto y sexto año en donde se puede trabajar con este tipo de problemas, los estudiantes presentan serias dificultades para construir el modelo. Se requiere buscar herramienta de apoyo, programas como el de GeoGebra pueden ayudar a validar las hipótesis o los resultados que los estudiantes obtengan y posiblemente a la deducción del modelo buscado.

Cuando un alumno se encuentra ante un problema a resolver y lo aliento a que use las herramientas que quiera: la memorización, calculadora, computadora, la opinión de otro compañero, o invente sus propias estrategias usando conocimientos derivados de otros cursos, no puedo garantizar que está *haciendo Matemáticas*, pero sí puedo darme cuenta de que se está apropiando de conocimientos que en adelante usará para resolver cualquier otro problema y no sólo de esta disciplina.

Algunos investigadores consideran que la actividad matemática o quehacer matemático es más que resolver un problema, citando a Segal-Giuliani en su libro *Modelización matemática en el aula: posibilidades y necesidades (2008)*, se encuentra una interesante reflexión:

> ¿En qué consiste el "quehacer" matemático del que hablamos? Pensamos que "hacer" Matemáticas es más que resolver problemas. También es encontrar buenas preguntas, buscar medios para responderlas, desarrollar nuevos métodos, conjeturar propiedades, validar soluciones, interactuar con otros miembros de la comunidad matemática de pertenencia, confrontar resultados, técnicas y validaciones (p. 7).

La propuesta planteada en esta tesis es conocer qué conocimientos sobre fracciones aritméticas se pueden movilizar para introducir a las *fracciones algebraicas* usando a las funciones racionales, teniendo el docente el papel de guía que analiza a cada momento el nivel de intervención en el proceso de aprendizaje del alumno y ayudando a formalizar los métodos que utilice. El estudiante usará las herramientas que tenga: estrategias de solución aplicadas en problemas tipo, conceptos aprendidos desde su perspectiva escolar, las bases que el curso actual haya proporcionado, entre otras. El reto planteado es ¿cómo utilizar los conocimientos previos del estudiante para poder propiciar un avance hacia la adquisición de conocimientos con significado.

Realizar con los estudiantes una actividad matemática llamada *Modelización,* desde la perspectiva de Sadovsky se convierte en una propuesta de aprendizaje a través de la solución de problemas de diferentes disciplinas como las Matemáticas, Física, Economía, Biología, y muchas más. Sadovsky (2005) la define como un proceso en el que se realiza un recorte de la realidad ajustando condiciones o limitando la intervención de algunos elementos con el objeto de simplificar la problemática; posteriormente, se identifica a las variables que intervienen para producir o determinar relaciones entre ellas, y al usar un sistema teórico matemático, transformar estas relaciones para producir nuevos conocimientos sobre la problemática estudiada. Para Sadovsky la modelización es: “reconocer una problemática, elegir una teoría para ‘tratarla’ y producir conocimiento nuevo sobre dicha problemática”.

Al comenzar a resolver el problema, la exploración inicial ayuda a encontrar regularidades o patrones en los comportamientos de las variables que intervienen, esta exploración puede dar sentido a la estrategia necesaria, ayuda a ubicar al ejercicio en una *clase* de problemas ya conocida. El estudiante puede entonces idear la herramienta con la que lo resolverá. Considero que en este punto es importante, la intervención del docente para guiar al alumno en técnicas que utilicen Álgebra o cualquier otra herramienta de las Matemáticas, o bien ayudarlo a formalizar las reflexiones hasta el momento propiciadas.

Cómo se vincula este estudio con la enseñanza del Álgebra en la Escuela Nacional Preparatoria de la UNAM

Debo considerar la posibilidad de que el alumno no pueda resolver o llegar a la solución esperada del problema, pero esto no lo interpreto como un fracaso, ya que si el estudiante se sintió atraído por la problemática, hubo reflexiones que lo llevaron a descubrir relaciones entre las variables o determinó patrones de comportamiento, entonces el estudiante está cumpliendo con características que describen el “quehacer” matemático, y a su vez con los objetivos descritos en los planes de estudio referidos a cursos de matemáticas, por ejemplo, uno de los criterios del Plan de Estudios de la Escuela Nacional Preparatoria de la UNAM (1996) establece lo siguiente:

Orientar el enfoque metodológico de los programas hacia una enseñanza:

> b.2) En la que los contenidos se constituyan no en el fin único del aprendizaje —pues el conocimiento cambia—, sino en medios para desarrollar habilidades y competencias que doten al alumno con herramientas que promuevan el auto aprendizaje (p.17).

Concuerdo con la afirmación de que el conocimiento cambia, y hoy más que nunca debemos convertirnos en guías que promuevan el auto aprendizaje, de manera que la modelización puede ser un medio para lograr que los estudiantes desarrollen esta habilidad.

La variedad de problemas que pueden abordarse desde la *modelización* es enorme, desde problemáticas del dominio del nivel primaria hasta aquellas que conciernen a la universidad. El contexto o la disciplina de la que se derive el problema constituye un factor importante para atrapar la atención del alumno, las estrategias que los alumnos usen para validar las conjeturas a las que lleguen son también otro punto de interés de este proyecto, ya que la *teoría* que el alumno aplique pueden ser conocimientos previos adquiridos en cursos anteriores de matemáticas.

A partir de los elementos teóricos tomados de Llinares, se diseñaron dos problemas para la realización de la secuencia. En el primero se consideró la basura recuperada de un total de basura generada, por lo que la interpretación a movilizar fue la de *medida.* Para el segundo problema la comparación entre la basura orgánica y la inorgánica buscó movilizar la interpretación de *razón parte-parte.*

La secuencia fue aplicada a estudiantes de bachillerato y se utilizó el tema de funciones racionales como el vínculo entre las fracciones aritméticas y las algebraicas. En el siguiente capítulo: Metodología, se detallará el uso de los problemas de modelización.

Capítulo 3. Metodología

La noción de modelización, desde la perspectiva de Patricia Sadovsky (2005), constituye el principal componente teórico de esta tesis. A partir del planteamiento de Sadovsky fueron estructurados los problemas de la secuencia que sirvió como instrumento para detectar los conocimientos previos sobre fracciones aritméticas que utilizaron los estudiantes.

La secuencia fue diseñada para estudiantes de cuarto año del bachillerato de la Escuela Nacional Preparatoria (ENP) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), pues recientemente la Nacional Preparatoria actualizó sus programas de estudio de la asignatura de Matemáticas. El nuevo programa de estudios de Matemáticas IV, implementado en el ciclo 2017-2018 en la ENP, especifica que dentro de las estrategias de enseñanza sea considerada la Modelización, lo que crea una excelente oportunidad para que los estudiantes trabajen con ejercicios que usen modelos algebraicos u obtengan como resultado el modelo algebraico que represente el fenómeno estudiado.

Se decidió que la aplicación de la secuencia fuera realizada en dos fases: Estudio piloto y Estudio definitivo. Del desarrollo de ambos estudios se recolectaron datos (producciones de los estudiantes) para su análisis en el capítulo 4.

En la sección 3.1 está descrito el camino seguido para la elección de la población estudiantil con la que se trabajó la secuencia. Para el estudio piloto se eligió trabajar con un grupo de sexto año de preparatoria, ya que un antecedente importante para trabajar con la secuencia diseñada es el tema de *funciones*, el cual se aborda en quinto y sexto grados del anterior programa de estudio (ENP, Plan 1996). El estudio definitivo o final se llevó a cabo con un grupo de cuarto año, el cual ya llevaba el nuevo programa de estudios (ENP, Plan 1996).

En la sección 3.2 se establecen los factores que permitieron diseñar la secuencia, como las posibles estrategias de solución que el alumno desarrollará durante la realización del trabajo; la movilización de conocimientos sobre fracciones aritméticas; y la aportación que se busca hacer al currículum del nuevo Programa de estudios de Matemáticas al utilizar problemas de modelización. Se eligió 4 problemas de diferentes contextos de las ciencias naturales, tres de los cuales, después de un análisis previo, fueron eliminados por considerarse no adecuados para los fines de esta tesis; el problema restante se adaptó para presentar las características de un problema de modelización. La serie de cuatro problemas fue aplicada a dos estudiantes (las identificaremos con los nombres de Laura y Lucero) de sexto año, el análisis previo y el proceso de solución se encuentra referido en esta sección.

En las secciones 3.3 y 3.4 se describe el trabajo de campo realizado. El estudio piloto y el definitivo se llevaron a cabo durante los meses de septiembre-octubre y noviembre 2017 respectivamente.

El siguiente diagrama (fig. 3.1) muestra un panorama completo sobre el diseño metodológico[6].

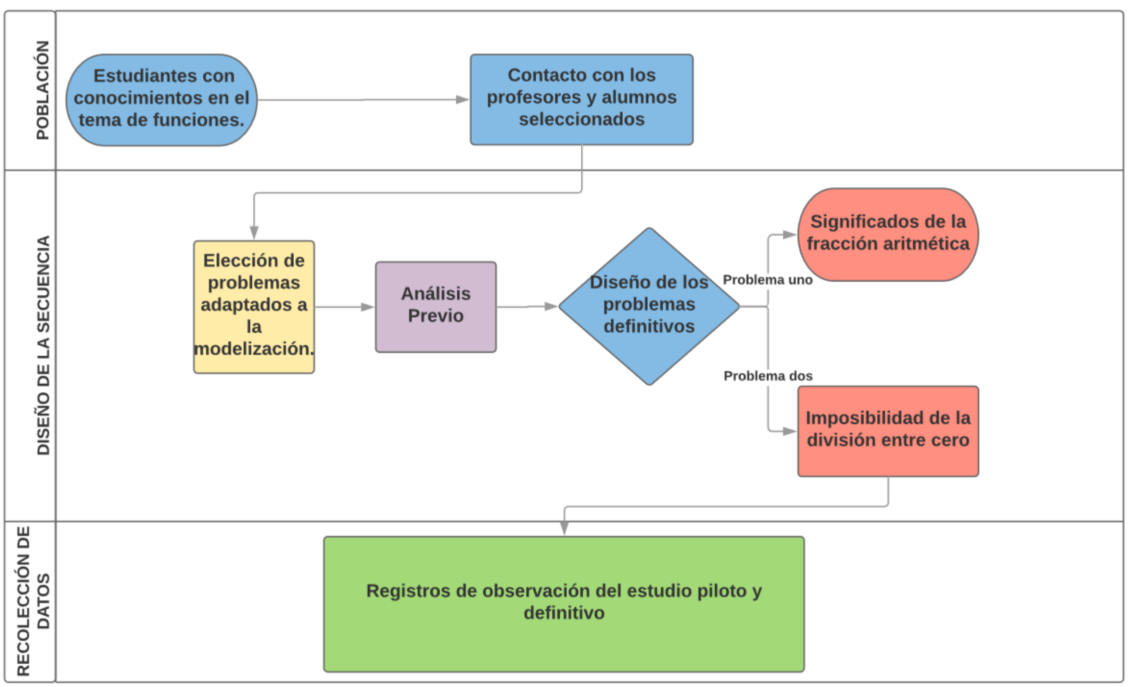


Figura 3.1 Diseño metodológico

[6] Diagrama realizado por la tesista.

A continuación, se describen las características más importantes de la población que se seleccionó para la aplicación de la secuencia en el estudio piloto y el definitivo.

3.1 Población

En esta sección está referido el proceso de elección de la población. Se hablará del porqué se optó por pedir a los estudiantes que trabajaran en equipo (característica que se mantuvo en el estudio definitivo). Es importante mencionar que se visitó al grupo de estudiantes con los que se trabajó, días antes de la aplicación de la secuencia, para explicar los objetivos de este instrumento, y convencer a los estudiantes de colaborar con la investigación. Los estudiantes (jóvenes entre 15 y 19 años) aceptaron y expresaron entusiasmo en el proyecto.

3.1.1 Población del estudio piloto

El diseño de la secuencia fue pensado para grupos del cuarto grado de preparatoria; sin embargo, durante el estudio piloto se aplicó a estudiantes de sexto año de bachillerato, debido a que el nuevo programa de cuarto año, que incluye a la modelización como estrategia de enseñanza y el tema de funciones (ambos contenidos necesarios para el desarrollo de la secuencia), no se había implementado en ese ciclo escolar.

El grupo estuvo constituido por 24 estudiantes del Área 3 de Administración y Contaduría, cuyas edades variaban entre los 17 y 19 años. La profesora responsable de la asignatura de Matemáticas de este grupo está inscrita en el Programa Institucional de Tutorías (PIT) de la ENP; y al iniciar cada clase ensaya con sus estudiantes ejercicios de relajación aprendidos en cursos para tutores, de acuerdo con la docente el desarrollo de la clase y el trabajo de los alumnos se mejora en gran medida, durante la aplicación de la secuencia esto se pudo comprobar.

La elección del grupo se realizó con base en la disposición mostrada por la maestra y alumnos al decidir invertir tiempo y esfuerzo durante seis sesiones en las que se aplicó el primer problema de la secuencia. Debido a la suspensión de labores, consecuencia del reciente sismo del 19 de septiembre de 2017, no fue posible la aplicación del segundo problema.

Se solicitó a los alumnos que trabajaran en equipos de tres integrantes, por considerar que la interacción entre parejas podría resultar una limitante y propiciar que sólo uno de ellos trabajara mientras que el otro se mantuviera como oyente. Al ser tres compañeros las soluciones ofrecidas por uno de ellos podrían ser cuestionadas por los otros dos, y al no haber empates, la probabilidad de llegar a una conclusión sería mayor. Si se trabaja con equipos de cuatro o más alumnos la experiencia como docente muestra que los jóvenes se distraen e incluso forman grupos para platicar. Esta forma de trabajo permite que uno de los estudiantes adopta el papel de solucionador, él será el que "piense en voz alta" y hable mientras va dando los pasos necesarios para resolver el problema, los compañeros que escuchan siguen los pasos y tratan de comprender el razonamiento y hacer sugerencias que puedan contribuir a encontrar y definir la solución final.

Como los alumnos deciden con quién trabajar, los papeles de solucionador y oyentes se adoptan por cada uno de los integrantes gracias a la confianza que ellos mismos establecen. La idea de trabajar de esta manera fue obtenida del texto de Barkley, *Técnicas de aprendizaje colaborativo (2007),* por considerar que la técnica puede resultar muy efectiva, ya que entre jóvenes es posible establecer una buena comunicación (es hablar entre iguales), también el arte de aprender a escuchar es una habilidad que se puede desarrollar entre los estudiantes, como una forma de fomentar valores y normas de respeto.

3.1.2 Población del estudio definitivo

Esta sección está dedicada a las condiciones y características de la población a la que le fue aplicada la secuencia ya corregida y mejorada. El grupo fue de cuarto año, población para la que fue diseñada. En este proceso se resolvió la secuencia completa, es decir, los dos problemas que la constituyen. Todas las actividades realizadas con el grupo fueron aplicadas por la tesista, pero hubo una comunicación constante con el profesor responsable de este grupo, él estuvo presente en todas las sesiones.

Se procuró que el grupo, previamente a la aplicación, tuviera conocimiento del tema de funciones y adquiriera habilidades en el manejo del software de GeoGebra. Al hablar con anticipación con el docente del grupo, se mostró de acuerdo con colaborar en esta actividad por considerarla un importante apoyo a su práctica docente. El profesor explicó al grupo las condiciones del trabajo a desarrollar bajo la coordinación de la tesista y los alumnos expresaron su beneplácito.

La aplicación fue a un grupo de 45 alumnos de cuarto año durante la primera y tercera semana del mes de noviembre de 2017. Los estudiantes cursaban el ciclo 2017-2018, que correspondía a la implementación del nuevo programa de estudio para cuarto año. Desde el mes de septiembre se mantuvo una comunicación continua con el docente del grupo, con el objetivo de llevar una bitácora de trabajo y poder tener un conocimiento de los temas vistos y habilidades adquiridas por los estudiantes en el manejo de herramienta computacional, necesaria para la secuencia. Al encontrarse aplicando el nuevo programa de estudios, el profesor se mostró muy interesado en la aplicación de la secuencia debido a que, se trabaja con problemas de modelización como los señalados en el nuevo programa.

Para la solución de una parte del trabajo se requirió que los alumnos usaran el software GeoGebra, particularmente en la realización de gráficas y el análisis de datos mediante el método de regresión de dos variables. Como parte de las actividades planificadas por el profesor titular del grupo se consideró llevar a los estudiantes a la sala de cómputo, días antes de la aplicación de la secuencia, para que el grupo desarrollara habilidades en el manejo de esta herramienta. Los alumnos pudieron usarla durante la tercera sesión de 50 minutos.

Lo siguiente es la descripción del proceso para lograr el diseño de la secuencia.

3.2 Diseño de la secuencia

La secuencia fue diseñada con problemas de modelización, éstos se enfocan en el estudio de fenómenos derivados de las ciencias naturales o sociales los cuales, basados en la práctica docente ante grupo (de la autora de esta tesis), resultan interesantes para los alumnos. Elegir el contexto del problema es importante pues cuando se vincula con el entorno del estudiante se observa que éste se apropia de la problemática y las estrategias de solución usadas pueden ser más variadas e ingeniosas.

A continuación, se hablará sobre importantes factores que influyeron en la realización y diseño de la secuencia.

- Currículum. Se consideró la implementación del nuevo programa de estudios de la Escuela Nacional Preparatoria, en el cual se establece la necesidad de ver problemas de modelización con aplicaciones que ayuden a que el estudiante se percate de la utilidad de las matemáticas en su entorno.
- Estrategias de solución. Las preguntas planteadas en la secuencia buscan que el alumno reflexione sobre lo que conoce y lo que está descubriendo. Sus respuestas y estrategias de solución a las interrogantes son también un punto importante que observar.
- El papel del investigador. Es el de *observador participante*, este rol está descrito en el texto *When to Use What Research Design* de W. Paul Vogt, (2012), y para la aplicación de la secuencia es también el de profesor frente a grupo. La tesista observó el trabajo de algunos equipos y coordinó los momentos en donde los equipos expresaron sus conclusiones a las preguntas planteadas en la secuencia. El desarrollar el papel de observador limitó la observación de todos los equipos, por lo que en las evidencias que se mostrarán más adelante se hablará de sólo algunos grupos de estudiantes.
- Métodos de recolección de datos. Para la recolección de los datos del estudio piloto y el estudio definitivo se utilizaron las siguientes fuentes: videograbaciones de las sesiones (en el caso del estudio piloto fueron seis

en el aula y para el definitivo siete, una de ellas en la sala de cómputo); secuencia impresa y audios de los diálogos de los estudiantes al solucionar los ejercicios (sólo de algunos equipos). La unidad de análisis se centró en las respuestas que los estudiantes escribieron en la secuencia impresa, pero los audios y las video grabaciones fueron un apoyo para detectar las estrategias usadas y los conocimientos previos que los alumnos usaron.

Los 4 problemas que al inicio se encontraron fueron de aplicación, es decir, en todos ellos el modelo algebraico estaba dado y la problemática consistía en la evaluación de la función o el análisis del comportamiento de su gráfica. Para la resolución de los problemas se contó con el apoyo de dos estudiantes de sexto año de preparatoria, de Área 1 (Fisicomatemático y de ingenierías) y 4 (Humanidades y artes) respectivamente.

A continuación, se muestran los problemas iniciales junto con el análisis derivado de las respuestas de las alumnas de sexto año. Después de las soluciones de las estudiantes aparece la solución dada por la autora de esta tesis.

Es importante mencionar que la aplicación de todas las actividades fue realizada por la autora de esta tesis en su papel de observador participante.

3.2.1 Problemas iniciales. Primer análisis previo

Esta parte de la tesis es un análisis de las posibles soluciones o dificultades que el estudiante encuentra al tratar de resolver un problema planteado. Dichos problemas han sido elegidos para aplicarse a alumnos del cuarto año del bachillerato de la UNAM.

En el afán de seguir la línea que el nuevo programa de estudios del cuarto año del bachillerato de la Escuela Nacional Preparatoria marca, se cuidó que los ejercicios diseñados contaran con las características de un problema de modelización desde la perspectiva de Sadovsky. Como antecedentes teóricos se precisa del tema de *Funciones* y *Números Reales*, los cuales aparecen dentro de los contenidos del nuevo programa de cuarto año, pero la aplicación de los ejercicios también puede realizarse con estudiantes de quinto y sexto año de preparatoria.

Se ha considerado dentro de este análisis el concepto de variables didácticas[7], entendiéndose como las características de un problema que se pueden modificar para tener un efecto determinado en los procesos de solución o corroborar alguna hipótesis sobre las respuestas a la problemática (Brousseau citado por Block, 1981, p. 68).

La identificación de las variables didácticas en cada problema contribuyó a la realización de cambios en el *nivel de complejidad* de cada ejercicio, así mismo, fomentó la utilización de *técnicas o procedimientos* que convinieron para el cumplimiento del objetivo de la actividad.

A continuación, se presenta la lista de problemas elegidos en esta primera selección. Más adelante se analizan sus posibles soluciones y se presentan las soluciones que dieron las estudiantes Laura y Lucero (alumnas de sexto año) con las que se probó los problemas.

Problema 1

Si $G(t) = 0.04t^2 + 2.34t + 90$ representa la cantidad de basura generada en Estados Unidos en millones de toneladas y $R(t) = 0.04t^2 - 0.59t + 7.42$ representa la cantidad de basura recuperada (en millones de toneladas) y t es la cantidad de años con $t = 0$ para 1960. Diga ¿qué representa la expresión $\frac{R(t)}{G(t)}$?. Fuente: *Álgebra* de Ignacio Bello (2005) p. 342.

[7] "Las características de un problema que se pueden modificar y que tienen un efecto cualitativo importante sobre las evoluciones de los procedimientos" (Brousseau, 1981:68). Concepto utilizado en el libro *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica* de los autores David Block, Tatiana Mendoza y Margarita Ramírez

Problema 2

El contenido de oxígeno de un estanque a *t* días de depositar desechos orgánicos está dado por $f(t)=100\left(\frac{t^2+10t+100}{t^2+20t+100}\right)$ porciento de su nivel normal.

a) Muestre que $f(0)=100$ y $f(100)=91.7$

b) ¿En qué instantes ocurre que el nivel de oxígeno es de 80%?

Fuente: *Matemáticas para administración y economía* de S. T. Tan, p.529.

Problema 3

Considere la siguiente función racional $f(x)=\frac{1}{x^2+a}$

a) ¿La fracción siempre está definida para *a* entero positivo? Explique por qué.

b) ¿La fracción siempre está definida para *a* entero negativo? Explique por qué.

Fuente: *Álgebra* de Ignacio Bello (2009) p. 354.

Problema 4

Los experimentos realizados por A. J. Clark sugieren que la respuesta $R(x)$ del músculo del corazón de una rana a la inyección de *x* unidades de acetilcolina (como porcentaje del efecto máximo posible del medicamento) queda aproximada por la función racional:

$$R(x)=\frac{100x}{b+x} \qquad x\geq 0$$

Donde *b* es una constante positiva que depende de la rana en particular.

a) Si una concentración de $x=40$ unidades de acetilcolina produce una respuesta de 50% para una cierta rana, determine la "función respuesta" para esta rana.

b) Use el modelo de la parte (a) y encuentre la respuesta del músculo del corazón de la rana, cuando se le administran 60 unidades de acetilcolina. Fuente: *Matemáticas para administración y economía* de S. T. Tan, p. 151.

A continuación, se presentan los análisis previos de los problemas y las soluciones que dieron las estudiantes de sexto año.

Análisis del Problema 1

Este problema fue elegido con el objetivo de que el alumno interprete el resultado de dividir el modelo algebraico de dos funciones, usando como apoyo el contexto del problema y estableciendo un vínculo con su entorno que le permita usar ideas y conceptos previos.

Las variables didácticas identificadas en el problema fueron:

- *El grado de los polinomios*. Se trabaja con funciones polinómicas de segundo grado ya que, en el curso de cuarto año de Matemáticas, y el de tercero de secundaria, se incluye el tema de polinomios de primer y segundo grado vistos como ecuaciones a resolver, así como funciones a graficar.
- *El tiempo.* Usado como variable discreta[8] debido a que representa los años transcurridos desde 1960, esto facilita al estudiante el uso de números enteros positivos[9].
- La*s funciones* $G(t)$ y $R(t)$. Son variables continuas[10] porque representan el peso de la basura generada y recuperada, respectivamente.
- *Los coeficientes de cada polinomio.* El trabajo es realizado con números decimales, los cuales podrían ser representados como fracción; sin embargo, la experiencia como docente hace notar que los alumnos reciben con más agrado a los números decimales.

A continuación, se presenta la solución que, desde el análisis previo, se identificó que los alumnos podían dar al problema.

[8] Variable discreta cuando asume un conjunto de valores de números enteros. Nota de la autora de esta tesis.
[9] En realidad, el tiempo es una variable continua, sin embargo, en este problema se usó como discreta.
[10] Variable continua si asume un conjunto de valores de números reales. Nota de la autora de esta tesis.

Solución

Lo que representa una expresión racional como $\frac{R(t)}{G(t)}$ implica la comprensión sobre lo que es una división entre funciones polinómicas que, en este caso, no son múltiplos una de la otra y por lo tanto no son divisibles. Sin embargo, el contexto proporciona la herramienta para que el estudiante considere a las funciones como cantidades de basura y pueda usar el significado de fracción aritmética que conozca para decir lo que representa la expresión racional.

Al principio se espera que note el dato de $t=0$ para ser sustituido en los modelos algebraicos de cada función y así interpretar el cociente.

En 1960 habría…

$R(0)=0.04(0)^2-0.59(0)+7.42=7.42$ millones de toneladas de basura recuperada

$G(0)=0.04(0)^2+2.34(0)+90=90$ millones de toneladas de basura generada

Entonces la expresión $\frac{R(t)}{G(t)}$ se puede ver como el cociente de dos cantidades

$$\frac{7.42 \text{ millones de toneladas}}{90 \text{ millones de toneladas}}=0.082\overline{4} \text{ (sin unidades)}$$

Este resultado carece de unidades, pero no pierde el significado original de basura recuperada entre generada, lo cual implica que representa una fracción como medida (Llinares, 2003).

Si el resultado obtenido se multiplica por 100, entonces representa el *Porcentaje de basura recuperada respecto al total de basura generada.*

Sin embargo, las estudiantes con quienes se probó la solución del problema dieron soluciones no esperadas en el análisis previo. Estas soluciones se presentan a continuación.

<u>Solución de Laura</u>

Es utilizado el nombre de Laura para hacer referencia a la estudiante de Área Fisicomatemática.

La solución a la pregunta *¿qué representa la expresión* $\frac{R(t)}{G(t)}$*?* del problema, la obtuvo después de evaluar a la expresión racional en $t=0$. La pregunta resultó más clara después de evaluar la fracción algebraica y convertirla en una expresión racional numérica. El proceso que siguió fue el siguiente:

$$\frac{R(t)}{G(t)}=\frac{0.04t^2-0.59t+7.42}{0.04t^2+2.34t+90}$$

$$\frac{R(0)}{G(0)}=\frac{0.04(0)^2-0.59(0)+7.42}{0.04(0)^2+2.34(0)+90}=\frac{7.42}{90}=0.82\overline{4}$$

Para Laura el resultado encontrado fue un número menor de lo que esperaba. El contexto del problema ayudó a Laura a interpretar el $0.82\overline{4}$ como la *parte* de basura recuperada en 1960 de un *total* de 90 millones de toneladas de basura generada en ese año.

Laura expresó que al comparar los coeficientes de los polinomios que formaban a la fracción, observó la igualdad en el término cuadrático, pero también se percató de que la respuesta generada al evaluar el polinomio del numerador tendría que ser siempre menor que la del denominador, pues el coeficiente del término lineal era negativo y el término independiente menor que el del otro polinomio:

$$-0.59<+2.34 \qquad y \qquad 7.42<90$$

Con este análisis ella validó su resultado (le pareció pequeño) y justificó el hecho de que fuera una cantidad menor que uno.

$$0.82\overline{4}<1$$

<u>Solución de Lucero</u>

Lucero es el nombre que usaremos para referirnos a la estudiante del Área de Humanidades. Después de leer el problema preguntó:

—¿Qué significa $t = 0$ para 1960? —

Le fue explicado que el problema hablaba de funciones que describían la producción de basura generada y recuperada en un año. El $t = 0$ para 1960 significaba que el valor de cero representaba al año de 1960.

—¿sólo quieres que te diga mi interpretación? —

Después ella expresó:

—Se trata de la basura que se recupera de toda la que se recolecta—

Se le pidió que explicara cómo había llegado a tal deducción, entonces Lucero explicó que entendía por basura recuperada aquella que se recicla, y que si ésta se dividía entre la basura total generada, a través de división de polinomios, entonces el resultado obtenido representaba la cantidad de toneladas de basura recuperada de un total de basura generada.

Para profundizar un poco más se le preguntó.

—¿Qué pasará conforme transcurran los años, habrá más basura recuperada? —

Contestó que pensaba que cada año se recuperaría más basura, y nuevamente se le pidió fuera más detallada en su respuesta, lo que la llevó a realizar la evaluación para 1960 ($t = 0$) y para 1961 ($t = 1$), comprobando que los resultados de las evaluaciones eran cada vez menores.

Al principio se mostró decepcionada y comenzó a observar los coeficientes de los polinomios, y dijo que no se había dado cuenta de que el polinomio $0.04t^2 - 0.59t + 7.42$ tenía un término negativo (el término lineal $-0.59t$), y que a medida que se sustituyeran valores más grandes del tiempo el valor final del polinomio sería cada vez menor.

Después de la descripción de las estrategias de cada estudiante es importante resaltar:

- En la solución de Laura los resultados de la evaluación de las dos funciones (basura recuperada y generada) fueron comparados para establecer una relación entre ambas cantidades: fracción como medida (parte-todo). Laura recurrió a la parte aritmética del problema para darle sentido al cociente entre estas dos cantidades y poder validar su respuesta. Analizó con profundidad comparando los coeficientes de cada polinomio para establecer un patrón de comportamiento: esto es, la basura recuperada cada año es menor y la generada se incrementa, por lo que el cociente es la representación de cantidades cada vez menores.
- La solución de Lucero está basada en la comprensión del contexto del problema. Con la aclaración de la pregunta: ¿Qué significa $t=0$ para 1960?, interpreta a la fracción $\frac{R(t)}{G(t)}$, al igual que Laura, como parte de un todo. Utilizó la evaluación de las funciones hasta que se le preguntó sobre el comportamiento de esta expresión al transcurrir los años, y con la finalidad de comprobar su hipótesis fue agregada la siguiente interrogante:

  —*¿Qué pasará conforme transcurran los años, habrá más basura recuperada?* —

  Contestó que pensaba que cada año se recuperaría más basura.

A partir de las soluciones expresadas por las estudiantes (Laura y Lucero), surgió la idea de utilizar este problema para conocer la interpretación que los alumnos pudieran dar a una expresión racional, y poder detectar los conocimientos que se movilizan en este proceso de solución.

Ante la pregunta de Lucero ¿Qué significa $t=0$ para 1960? Se pensó en diseñar una tabla de valores derivados de la evaluación de ambas funciones para los años de 1960,1961 y 1962, que pudiera servir de apoyo para la comprensión del contexto del problema, así como para la notación de funciones.

Análisis del Problema 2

El objetivo de este problema es que el alumno utilice conocimientos previos sobre evaluación de funciones para que, a través de la gráfica de la función dada en el problema, pueda encontrar la solución y validarla.

Las variables didácticas identificadas en la solución de este problema son las siguientes.

- *El grado de los polinomios.* Los polinomios de segundo grado cuyo coeficiente principal es la unidad. El polinomio del denominador es factorizable.
- *La función* $f(t)$*.* Se puede considerar como una variable continua pues representa el porcentaje de oxígeno. Es una función con coeficientes enteros y positivos y el denominador puede ser factorizado.
- *El tiempo.* Es una variable que, en este problema se usa como discreta ya que representa el número de días.

A continuación, se presenta la solución que, desde el análisis previo, se identificó que los alumnos podían dar al problema. Después se presentan las soluciones que dieron las estudiantes.

Solución

La solución del inciso (a) fue la propuesta por las alumnas. Para el inciso (b) se propone un método analítico que implicaría establecer los papeles de cada variable que interviene en el problema, esto es: t es el tiempo buscado y $f(t)$ el 80% de oxígeno contenido en el tanque; al sustituir los datos mencionados se generaría una ecuación fraccionaria con polinomios de segundo grado.

$$f(t) = 100\left(\frac{t^2 + 10t + 100}{t^2 + 20t + 100}\right) = 80$$

$$100\left(t^2 + 10t + 100\right) = 80\left(t^2 + 20t + 100\right)$$

$$10\left(t^2 + 10t + 100\right) = 8\left(t^2 + 20t + 100\right)$$

$$10t^2 + 100t + 1000 = 8t^2 + 160t + 800$$

$2t^2 - 60t + 200 = 0$

La anterior es una ecuación de segundo grado que puede ser simplificada y resuelta usando la fórmula general:

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La cual se usa para determinar la solución de ecuaciones de la forma:

$$at^2 + bt + c = 0$$

Esto es, la ecuación $t^2 - 30t + 100 = 0 \Rightarrow t = 15 \pm 5\sqrt{5}$ usando la fórmula general.

Implicando que se alcanza el 80% del nivel de oxígeno aproximadamente al tercer día (3.8) y nuevamente en el día 26 (26.18). La razón de ser dos respuestas es explicable apoyándose en la gráfica y observando que se tiene una trayectoria parecida a la de una parábola. El nivel de 80% se adquiere en dos ocasiones ya que la gráfica primero describe un comportamiento decreciente y luego creciente.

Como se indicó anteriormente, este no es un problema de modelización como lo describe Sadovsky, pero no deja de ser interesante, sobre todo por la contextualización que Laura le dio al resolver el inciso (a).

<u>Solución de Laura y Lucero</u>

Tanto Laura como Lucero contestaron el inciso (a) utilizando la evaluación de funciones al sustituir $t = 0$ y $t = 100$ en la función.

Si $f(t) = 100\left(\frac{t^2 + 10t + 100}{t^2 + 20t + 100}\right)$ entonces

$$f(0) = 100\left(\frac{(0)^2 + 10(0) + 100}{(0)^2 + 20(0) + 100}\right) = 100\left(\frac{100}{100}\right) = 100 \text{ porciento}$$

$$f(100) = 100\left(\frac{(100)^2 + 10(100) + 100}{(100)^2 + 20(100) + 100}\right) = 100\left(\frac{11100}{12100}\right) = 100(0.9173) = 91.73 \text{ porciento}$$

Para el inciso (b) trabajaron en equipo y Laura propuso usar GeoGebra (ver figura 3.2) para darse cuenta de que la función asume el valor de 80% para *t* entre cero y cien días, pero no pudo dar la respuesta con mayor precisión.

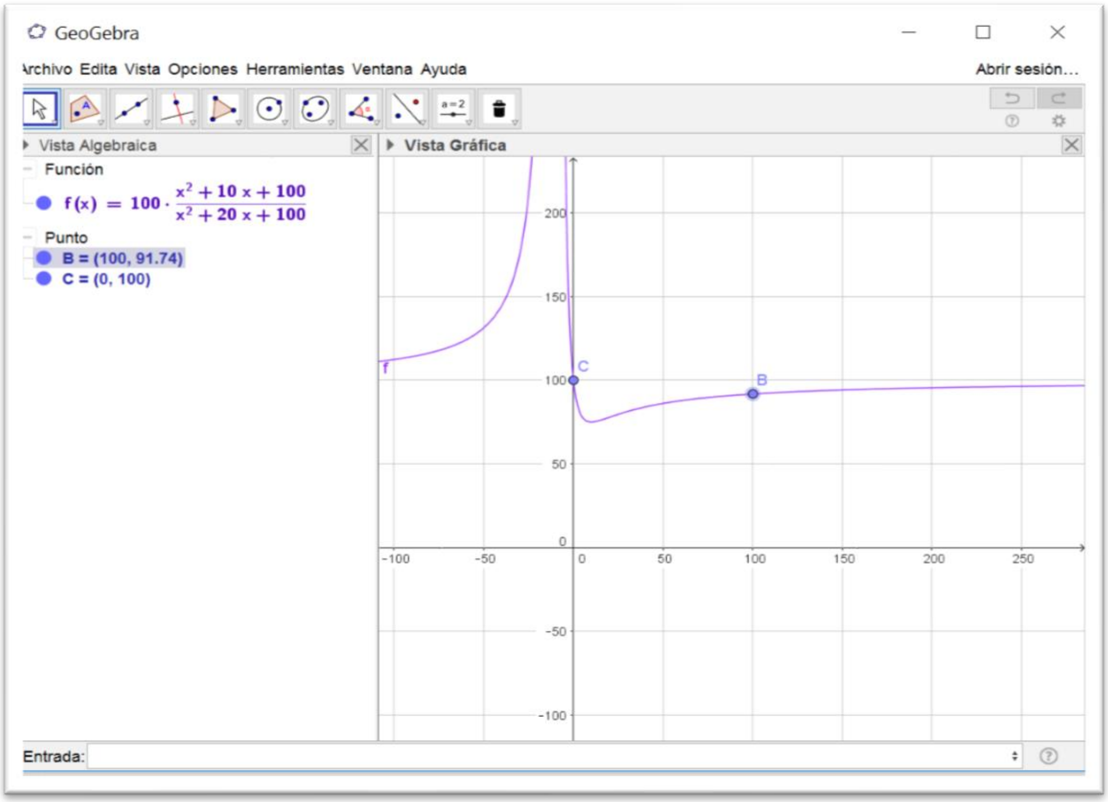


Figura 3.2 Función contenido de oxígeno

Laura comparó la problemática del estanque con la pecera que tiene en su casa y los desechos orgánicos con las heces de los peces. Le agradó la idea de saber que después de 100 días el contenido de oxígeno sería de 80% pero también expresó preocupación al imaginar la pecera terriblemente sucia, pues imaginó que el contenido de oxígeno sería poco.

El problema fue descartado porque se buscaba una problemática que propiciara que los estudiantes construyeran el modelo algebraico que describiera el fenómeno observado, y en este caso el modelo ya estaba construido. También es importante resaltar que la construcción del modelo debía restringirse a funciones polinomiales de primer y segundo grado, ya que se trabajaría con estudiantes de primer ingreso al bachillerato de la UNAM.

Análisis del Problema 3

El objetivo es que el alumno analice lo que significa que el denominador en una función racional se anule.

Las variables didácticas de este problema son las siguientes.

a) *El contexto*. La frase "*está definida"* ¿es comprensible para el alumno?
b) *La variable a.* Es un número entero, pero podría tratarse de un número real.
c) *El numerador de la función dada* $f(x)=\frac{1}{x^2+a}$. Por ser una constante, no resulta un distractor, podría ser una expresión con la variable *x.*

A continuación, se presenta la solución construida a partir del análisis previo y las soluciones de Laura y Lucero.

Solución

La función racional está bien definida si el denominador es diferente de cero, por lo que:

a) Si a es entero positivo, es decir $a>0$, entonces $x^2+a>0$ ya que $x^2\geq 0$ y $a>0$ por lo tanto la suma $x^2+a>0$
b) Si a es entero negativo, $a<0 \Rightarrow -a>0$, entonces $x^2+a=0$ si se cumple que $x^2=-a$.

Por lo tanto, el denominador es diferente de cero, y además siempre es positivo para las condiciones del primer inciso. Pero para el caso en que $x^2=-a$ el denominador sería nulo implicando una expresión no definida.

Sin embargo, para este problema ambas estudiantes Laura y lucero solicitaron se les explicara qué significaba que la fracción estuviera bien definida, cuando se aclaró que una expresión racional está bien definida si su denominador es diferente de cero, las respuestas de las estudiantes fueron las siguientes.

Solución de Laura

La respuesta de Laura a los dos incisos fue la siguiente:

—Sí, gracias a que es una suma [Laura se refiere a la suma x^2+a del denominador de la fracción][11] incluso si x llegara a ser cero. Si suponemos a a como entero positivo, siempre va a ser positivo, sin embargo, si suponemos a a como entero negativo, igual teniendo a $x=0$ siempre va a ser positivo. Ahora si tomáramos a $x=-3$ y $a=-5$ el resultado volvería a ser positivo —

Tal como se había previsto, el hecho de que el numerador de la función racional sea una constante, es un factor que ayuda a Laura a centrar su atención en la suma x^2+a que aparece en el denominador. Ella se enfoca en que esta expresión representa una suma de enteros positivos y que, aunque la variable x asuma el valor de cero, se percata de que el resultado seguirá siendo positivo, y por lo tanto distinto de cero.

Lamentablemente Laura no puede ver que para $x=-3$ y $a=-9$ la misma expresión se anularía:

$$\begin{aligned} x^2+a &= (-3)^2+(-9) \\ &= 9-9=0 \end{aligned}$$

Es importante notar que Laura percibe tanto a la x como a la a como variables que pueden asumir diferentes valores. Esto es un factor importante para introducir el concepto de dominio de una función racional. Cuando se habla de fracciones algebraicas los alumnos rara vez se preguntan si la variable del denominador puede asumir algún valor, de forma tal que el resultado permanezca bien definido o conduzca a la imposibilidad de la división entre cero. El problema de la división entre cero en el bachillerato es una constante en los cursos de

[11] Nota de la tesista.

Matemáticas, por lo que se decidió diseñar el problema dos de la secuencia abordando la imposibilidad de la división entre cero usando una función racional.

<u>Solución de Lucero</u>

La respuesta de Lucero a cada inciso fue la siguiente:

a) —Sí, porque sin importar el valor que adquiera, éste siempre se estará sumando y no hay limitación—
b) —No siempre, "a" puede ser válida para positivos y negativos, para ambos está bien definida —

Se puede apreciar en la respuesta de Lucero del inciso (b), que hay confusión en lo que significa que una función racional esté bien definida. Al platicar con las estudiantes, expresaron que este ejercicio les pareció difícil, sin embargo, la noción de la imposibilidad de la división entre cero es uno de los conceptos que el estudiante debería comprender.

En esta tesis se considera un objetivo importante el que el alumno comprenda por qué una expresión racional no puede tener denominador igual a cero.

<u>*Análisis del Problema 4*</u>

El objetivo es que el alumno observe que la función del problema no está completamente definida, debido a la existencia de un parámetro b y desarrolle un procedimiento para encontrar su valor.

Las variables didácticas son las siguientes.

a) *La x unidades de acetilcolina.* Es una variable continua ya que representa la cantidad de sustancia de acetilcolina.
b) *El parámetro b.* Es una constante positiva real pero desconocida.
c) *El contexto.* Los términos usados podrían estar fuera del lenguaje cotidiano del alumno.

Solución

El problema establece que cuando a la rana se le aplican 40 unidades de acetilcolina hay una respuesta del 50% del músculo del corazón, por lo que $x = 40$ y $R(x) = 50$. De esta forma, sustituyendo en la función racional los anteriores datos, se tiene para el inciso (a) lo siguiente:

$$\frac{100(40)}{b+40}=50$$

$$50b+2000=4000$$

$$b=\frac{2000}{50}$$

$$b=40$$

entonces la función respuesta es $R(x) = \frac{100x}{40+x} \quad x \geq 0$

Para el inciso (b), $x = 60$ y se busca el valor de la respuesta del músculo, es decir $R(x)$.

$$R(60) = \frac{100(60)}{40+60} = 60\%$$

A pesar de los inconvenientes que surgieron para resolver este problema, se generó la idea de diseñar una sección en la secuencia donde se pediría al alumno que construyera un modelo conocido por él (correspondiente a la gráfica de una recta o la de una parábola) que describiera el fenómeno planteado en el ejercicio.

Se pensó en que el alumno pudiera apoyarse con el software de GeoGebra, en el cual existe una herramienta que analiza la regresión de dos variables y proporciona la gráfica que más se ajusta al conjunto de datos proporcionados al programa.

Así que, aunque este problema se descartó como tal, sirvió como punto de partida para que en la secuencia el estudiante diseñara un modelo algebraico.

<u>Solución de Laura y Lucero</u>

Las dos estudiantes se mostraron confundidas y no pudieron resolver el ejercicio.

El supuesto que había es que las estudiantes al no comprender lo que el problema pide, pero al observar el valor de $x = 40$, intentarían sustituir, es decir:

$$\frac{100(40)}{b+40}$$

Desde una perspectiva personal, el problema principal que enfrenta el estudiante es comprender el papel que representan las variables $R(x)$ y x para el contexto del problema. Además, en este problema la expresión "Donde *b* es una constante positiva que depende de la rana en particular", puede ser que contribuya a confundir al estudiante respecto al papel que representa cada variable. También es posible que la información dada no sea suficiente para que el lector entienda que se trata de un parámetro y no de una variable.

Es importante comentar también que el concepto de *variable didáctica,* extraído del texto del doctor Block (2010), resultó un factor importante en la determinación del nivel de complejidad. Aunque no se mencionó en todos los problemas, el *contexto* ayuda a vincular el entorno del estudiante con el ejercicio a resolver y esta apropiación genera estrategias de solución y moviliza conocimientos previos. Diseñar la *redacción* para lograr una presentación más atractiva en cada problema, es uno de los factores que influyeron en el aprendizaje logrado.

Este primer análisis previo de los ejercicios contribuyó a entender el razonamiento que usaría el estudiante, predecir sus respuestas y conocer las principales dificultades que enfrentaría. A partir de esta información se comenzaron los primeros cambios en los problemas elegidos. El segundo análisis previo se convirtió en una argumentación (o explicación) del porqué de estos cambios.

3.2.2 Los problemas diseñados y el segundo análisis previo

Se acuerda trabajar con el problema uno, cambiar un poco la redacción y comenzar la adaptación a un problema de modelización con el apoyo de una tabla de valores de las funciones dadas. El enunciado del problema y la tabla aparecen en un tamaño de fuente menor a la del texto de la tesis.

Problema 1. Significado de una fracción

1. Supón que la cantidad de *basura generada* en Estados Unidos en millones de toneladas, está dada por la función $G(t)=0.04t^2+2.34t+90$, donde t es la cantidad de años, con $t=0$ para 1960 y la cantidad de *basura recuperada* (en millones de toneladas), está dada por la función $R(t)=0.04t^2-0.59t+7.42$, en México lo entenderíamos como la basura que se puede reciclar.

Problema adaptado del libro *Álgebra* de Ignacio Bello (2005), p. 342.

Observa la tabla y calcula la cantidad de basura recuperada y generada en 1970. Anota los resultados en el espacio siguiente, si quieres puedes utilizar una calculadora (incluso la del celular).

Año	*T*	Basura recuperada en millones de toneladas $R(t)=0.04t^2-0.59t+7.42$	Basura generada en millones de toneladas $G(t)=0.04t^2+2.34t+90$
1960	0	$R(0)=0.04(0)^2-0.59(0)+7.42=7.42$	$G(0)=0.04(0)^2+2.34(0)+90=90$
1961	1	$R(1)=0.04(1)^2-0.59(1)+7.42=6.87$	$G(1)=0.04(1)^2+2.34(1)+90=92.38$
1962	2	$R(2)=0.04(2)^2-0.59(2)+7.42=6.4$	$G(2)=0.04(2)^2+2.34(2)+90=94.84$
…		Y así sucesivamente	

La tabla tiene por objetivo que el alumno se identifique con la notación de funciones y con el papel que representa cada variable. Se transcriben los incisos que el estudiante debe contestar en esta primera parte del problema. El lenguaje utilizado busca establecer una relación de confianza con el estudiante lector del documento.

a) Observa la tabla y calcula la cantidad de basura recuperada y generada en 1970. Anota los resultados en el espacio siguiente, si quieres puedes utilizar una calculadora (incluso la del celular).
b) Comenta tus resultados con tus compañeros ¿qué tan difícil fue obtener las respuestas? ¿usaste calculadora? ¿los valores encontrados son lo que esperabas, por qué? Escribe tus comentarios en el siguiente espacio.

Posteriormente expresa ante el grupo y el profesor los resultados obtenidos, ¿coinciden con los resultados de los demás? y si no es así ¿cuál consideras que es la razón?

Y ahora la pregunta importante…

c) Si utilizas los resultados obtenidos para 1970 ¿qué representa la expresión $\frac{R(t)}{G(t)}$? Es decir, ¿qué interpretación o significado tendría para ti, el resultado de la fracción obtenida? Escribe tu respuesta en el siguiente espacio.

d) *Generalizando*, para *t* representando cualquier año posterior a 1960 ¿qué interpretación le darías a la fracción $\frac{R(t)}{G(t)}$? Escribe tu respuesta en el siguiente espacio.

Debido a la tabla presentada, la respuesta al inciso (a) fue considerada como accesible y se esperó que el estudiante contextualizara los resultados obtenidos, esto es, en sus respuestas utilizara el vocabulario dado en el problema.

El inciso (b) busca generar el análisis de las respuestas del anterior inciso, mediante preguntas iniciales cuyas respuestas son directas: sí o no, para después realizar la pregunta de reflexión: *¿el valor encontrado era lo que esperabas, por qué?* Esta pregunta invita a validar la respuesta.

En el caso del inciso (c) es posible que el alumno no interprete el cociente de estas dos cantidades de basura como la relación entre el valor del numerador con el del denominador, sino que considere a la fracción como una expresión que consta de dos cantidades sin relacionarse. Sin embargo, debido al contexto del problema, se esperó que el estudiante sí pudiera responder este inciso.

La palabra *generalizando* en el inciso (d) podría tener un significado ambiguo para el estudiante, propiciando que la respuesta a las dos últimas preguntas (c y d) fuera la misma; sin embargo, para la presente tesis esta respuesta proporcionó información vital para poder introducir el concepto de fracción algebraica.

Es importante aclarar que hasta este momento se había diseñado sólo la primera parte de la secuencia, con el objetivo primordial de conocer los significados que el estudiante tuviera sobre una fracción aritmética. En particular se buscó la conceptualización de fracción como *parte-todo,* y posteriormente, la de fracción como *razón.*

Se decidió que la versión final de la secuencia estuviera constituida por dos problemas relacionados por el contexto descrito en el primero de ellos. El segundo problema se convirtió en una excelente oportunidad para explorar el significado de la división entre cero. En la siguiente sección se habla con más detalle de sus características.

3.2.3 Problemas definitivos para la secuencia

El nuevo programa de estudios de Matemáticas IV fue implementado en el ciclo 2017-2018, en él se incluye entre sus directrices la enseñanza a través de la resolución de problemas con modelos aritméticos, algebraicos y geométricos. Esto fue un motivante para utilizar la noción de modelización en problemas con los cuales se pudiera detectar la movilización de conocimientos sobre fracciones aritméticas, y aprovecharlos en la introducción del concepto de la fracción algebraica. Se pensó en el diseño de una secuencia didáctica con problemas que usaran modelos algebraicos relacionados con una *expresión racional*[12] y como los estudiantes de cuarto año empiezan a trabajar con funciones, se eligió el modelo de una función racional para que fuera el puente entre la fracción aritmética y la algebraica.

Dentro de la estructura de los problemas de modelización se busca que el estudiante deduzca el modelo algebraico que describa el fenómeno observado, sin embargo, desde una perspectiva personal, el alumno debe estar apoyado por compañeros más capaces[13] o del docente del grupo, así como de herramienta tecnológica para lograr este objetivo. En los problemas las variables que intervienen desempeñan un papel *funcional* (Ursini,2008), es decir, los modelos algebraicos que aparecen en el *problema uno* son funciones polinómicas. Así que, en la primera parte de este ejercicio, los modelos algebraicos estuvieron dados con la finalidad de que el estudiante se familiarizara con la notación de función y el proceso de evaluación de ésta; en la segunda parte el estudiante tiene que deducir el modelo algebraico aprovechando la experiencia adquirida en la parte inicial.

A continuación, son detallados los componentes principales de un problema de modelización desde la perspectiva de Sadovsky (2005).

La autora, en su texto *Enseñar Matemáticas hoy. Miradas, sentidos y desafíos (2005)*, establece cuatro etapas en el desarrollo de un problema: *recorte de la realidad, relación entre variables, adaptación de una teoría y producción de conocimiento nuevo.* En palabras de Sadovsky, la primera y la tercera etapa serían “actuar sobre una porción de la realidad a través de un aparato teórico” (2005, p. 32); para la segunda establece que “al expresar el problema a través de relaciones, se generan mejores condiciones para ubicarlo en una *clase de problemas*, dando de este modo una perspectiva más general” (2005, p. 30); y respecto a la última etapa afirma que “La reflexión sobre los problemas puede dar lugar a la formulación

[12] Expresión racional es el nombre que el actual programa de estudios de la ENP da a las fracciones algebraicas.
[13] La secuencia se trabajó en equipos de tres integrantes, de esto se hablará en la sección de “Trabajo colaborativo”

de conjeturas, a la identificación de propiedades… que funcionen más o menos descontextualizados de los problemas que les dieron origen” (2005, p. 31).

Basándose en las características mencionadas en el párrafo anterior, los problemas de la secuencia buscaron que el estudiante realizara un recorte de la realidad de su entorno y vinculara lo conocimientos previos sobre la problemática planteada para proporcionar una solución, esto lo llevaría a realizar conjeturas y establecer propiedades sobre los nuevos saberes.

En su texto, Sadovsky tiene como uno de los objetivos del ejercicio que el estudiante logre la deducción de un modelo algebraico o fórmula que represente el fenómeno observado. En la secuencia se trabaja de forma distinta, pues al principio se le dan al alumno los modelos algebraicos para que los conozca y manipule con la finalidad de que contextualice y establezca relaciones entre las variables que intervienen. Posteriormente, se propicia que el estudiante realice un recorte de la realidad y logre obtener sus propias modelos que representen al fenómeno observado, mediante una recolección de datos y el uso de la regresión bivariable de GeoGebra, por lo que las etapas que menciona la autora surgen en diferentes momentos del desarrollo del problema.

A continuación, se detallarán los componentes principales del problema uno, resaltando la adaptación de este ejercicio a la perspectiva de Sadovsky (2005).

Problema 1[14]

En este ejercicio se aborda el tema de la cantidad de basura generada, así como la basura recuperada en millones de toneladas en un país, se les representa mediante dos funciones cuadráticas (polinomios de segundo grado). La pregunta principal es que el alumno interprete apoyado por el contexto del problema, el cociente de las dos funciones. El problema ya adaptado tiene como objetivo conocer los diferentes

[14] La secuencia completa se encuentra en el anexo 1 de esta tesis.

significados sobre la fracción aritmética que tenga el alumno y ver si puede adaptar esa conceptualización a una fracción algebraica.

Matz (1980) sugiere que algunos de los errores que cometen los estudiantes pueden deberse a una adaptación incorrecta de las reglas conocidas para tratar de dar solución a un nuevo problema, a este proceso lo llama *Extrapolación;* sin embargo, la intención de este problema es conocer lo que el alumno sabe sobre una fracción y si puede usar este conocimiento para resolver la problemática que se plantea.

Se transcriben partes del enunciado para dar mayor claridad a esta descripción. Nuevamente los enunciados correspondientes al problema están en un tamaño de fuente menor al texto de la tesis.

> Supón que la cantidad de *basura generada* en Estados unidos, en millones de toneladas, está dada por la función $G(t) = 0.04t^2 + 2.34t + 90$, donde *t* es la cantidad de años, con $t = 0$ para 1960 y la cantidad de *basura recuperada* (en millones de toneladas), está dada por la función $R(t) = 0.04t^2 - 0.59t + 7.42$, en México lo entenderíamos como la basura que se puede reciclar.
>
> Problema adaptado del libro *Álgebra* de Ignacio Bello (2005) p. 342.
>
> Observa la tabla y calcula la cantidad de basura recuperada y generada en 1970. Anota los resultados en el espacio siguiente, si quieres puedes utilizar una calculadora (incluso la del celular).
>
> Si utilizas los resultados obtenidos para 1970 ¿qué representa la expresión $\frac{R(t)}{G(t)}$? es decir, ¿qué interpretación o significado tendría para ti, el resultado de la fracción obtenida? Escribe tu respuesta en el siguiente espacio.

Como se puede observar, el problema proporciona las funciones que representan dos tipos de basura acumulada, para facilitar que el alumno se identifique con la notación de funciones e identifique el papel de las variables que intervienen en ambos modelos algebraicos, se agregó una tabla donde las funciones están siendo evaluadas en los años de 1960, 1961 y 1962.

Año	T	Basura recuperada en millones de toneladas $R(t)=0.04t^2-0.59t+7.42$	Basura generada en millones de toneladas $G(t)=0.04t^2+2.34t+90$
1960	0	$R(0)=0.04(0)^2-0.59(0)+7.42=7.42$	$G(0)=0.04(0)^2+2.34(0)+90=90$
1961	1	$R(1)=0.04(1)^2-0.59(1)+7.42=6.87$	$G(1)=0.04(1)^2+2.34(1)+90=92.38$
1962	2	$R(2)=0.04(2)^2-0.59(2)+7.42=6.4$	$G(2)=0.04(2)^2+2.34(2)+90=94.84$
…		Y así sucesivamente	

El significado de una fracción como parte-todo es uno de los conocimientos que se esperó movilizar en el estudiante, ya que la basura recuperada es una parte de la total generada, sin embargo, en el capítulo 4 de *Análisis de resultados* se mostrará evidencia sobre otros conocimientos previos que los estudiantes utilizaron.

En la segunda parte de este problema se pide a los alumnos recolectar datos sobre la cantidad de basura orgánica e inorgánica que se genera en la casa de uno de ellos durante seis días. Es en esta sección donde se busca que los estudiantes realicen un recorte de la realidad (Sadovsky, 2005) que los ayude a vincular el contexto del problema con su entorno. El objetivo final es que ellos diseñen los modelos polinomiales de las funciones que describen la cantidad de basura generada (orgánica o inorgánica) y vuelvan a darle una interpretación al cociente de estas cantidades de basura. Para esta parte del trabajo, particularmente en la secuencia, se considera una sesión de 50 minutos primero en el aula para que los equipos intenten detectar algún patrón en los datos recolectados, que los ayude a establecer el modelo algebraico que representará dicho comportamiento y luego, llevando al grupo a la sala de cómputo para que usen el software de GeoGebra, grafiquen los datos y encuentren el modelo que se ajuste más a los puntos graficados.

Nuevamente se transcribe parte de la secuencia para dar mayor claridad a lo anterior.

Realiza una recolección de 6 datos que reporten el peso de la basura orgánica que se genera en tu casa día tras día, es decir, mide el peso de la basura que se genera el día de hoy y luego suponiendo que no se desecha, mide el peso de la *basura acumulada* del primer y segundo día, este será tu segundo dato. Continúa con este proceso hasta obtener seis datos en total. Anota en la siguiente tabla los datos obtenidos.

Día de la semana	Peso de la basura orgánica

a) Ahora que tienes información parecida a la contenida en la tabla que viene al principio del ejercicio, grafica estos datos considerando el tiempo en el eje X y el peso en el eje Y, ¿qué harías para encontrar la fórmula (modelo algebraico) de la nueva función que determina la basura orgánica que se genera día a día? Si pudiste obtenerla, anota la fórmula en el siguiente espacio.

Es importante hacer notar que en la primera parte del problema la basura recuperada es una parte de la generada, y para la segunda, la basura orgánica no es una parte de la inorgánica, por lo que las interpretaciones dadas a los cocientes son diferentes. El significado de la fracción que se busca movilizar en la segunda parte del *problema 1* es el de *razón* desde la perspectiva de Llinares (2003).

A continuación, se presenta el segundo problema de la secuencia, en él se trabaja con la noción de la imposibilidad de la división entre cero usando como apoyo dos funciones (propuestas por la autora de esta tesis) graficadas con el software de GeoGebra.

Problema 2[15]

En el problema dos se proporciona el modelo de una función racional, con la finalidad de que el estudiante analice su gráfica mediante el programa de GeoGebra. Este problema es intramatemático, es decir, permite modelizar fenómenos matemáticos para producir conocimiento, idea que se comprende mejor en palabras de Sadovsky citando a Chevallard:

> Tradicionalmente la noción de modelización se ha reservado para el estudio de sistemas no matemáticos -provenientes de las ciencias naturales o sociales- usando algún sistema teórico de la matemática. Chevallard (1989), sin embargo, reivindica también la noción de modelización para pensar la producción de conocimiento de un sistema matemático a través de otro sistema, también matemático. La llama "modelización intramatemática" (Sadovsky, 2005, p. 27).

El ejercicio aborda la noción de la división entre cero y la relaciona con el caso de una fracción con denominador nulo (el caso de una expresión fraccionaria indefinida). Usando nuevamente el contexto de la basura orgánica e inorgánica como punto de partida, en la secuencia se trabaja con una función racional constituida por el cociente de dos funciones polinomiales. Una de ellas representa la basura orgánica y la otra la inorgánica, ambas fueron propuestas por la autora de esta tesis.

$f(t)=\dfrac{3t-3}{t^2-t}$ donde $r(t)=3t-3$ representa la basura orgánica (en kilogramos) y $g(t)=t^2-t$ la inorgánica (en kilogramos).

El objetivo principal es el análisis de los casos en que la función racional presenta al denominador $g(t)=t^2-t=0$ (denominador nulo). Se le pedirá al alumno que interprete dentro del contexto lo que pasa con la fracción cuando el denominador es cero.

[15] La secuencia completa se encuentra en el anexo 1 de esta tesis.

Las gráficas de las funciones elegidas presentan dos casos conocidos por los alumnos, siendo una de ellas línea recta: $r(t) = 3t - 3$ y la otra parábola: $g(t) = t^2 - t$. Los puntos donde las gráficas se intersecan son $A(1,0)$ y $B(3,6)$ ver figura 3.2. La función racional al ser evaluada en $t = 1$ (la abscisa de *A*) da como resultado $f(1) = \frac{3(1)-3}{(1)^2-(1)} = \frac{0}{0}$ una expresión indefinida y cuando es evaluada en $t = 3$ (la abscisa de B) la fracción obtenida es $f(3) = \frac{3(3)-3}{(3)^2-(3)} = \frac{6}{6} = 1$ el cual está bien definido. En la figura 3.3 se puede apreciar los puntos de intersección y las gráficas de las funciones.

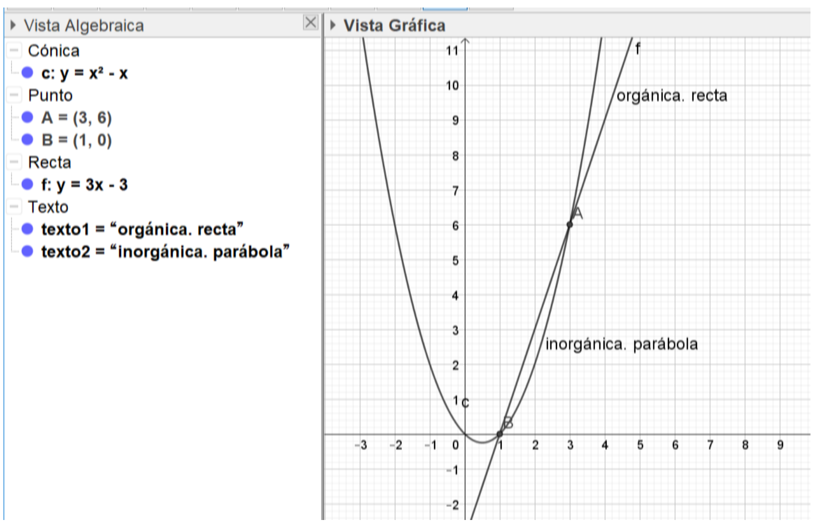


Figura 3.3. Gráficas de la basura orgánica e inorgánica

Los puntos de intersección de las gráficas fueron elegidos para ayudar al estudiante a reflexionar sobre los resultados que se derivan de dos expresiones similares: $\frac{0}{0}$ y $\frac{6}{6}$. Se busca que el alumno interprete lo que pasa cuando en el día 1 no se registra ninguna cantidad de basura, pero como fracción la expresión $\frac{0}{0}$ no está definida por tener denominador cero. Para el día 3 la cantidad de basura generada es la misma, y la expresión $\frac{6}{6}$ no genera ninguna indefinición. Desde mi práctica docente puedo observar que el estudiante sabe que una expresión como $\frac{6}{6}$ representa la unidad, sin embargo, cuando analiza a $\frac{0}{0}$ se muestra confundido y algunas veces se percata de la indefinición y otras contesta que $\frac{0}{0}=0$.

Se transcriben partes iniciales de este problema.

Los compañeros de un equipo obtuvieron la siguiente expresión: $\frac{r(t)}{g(t)}=\frac{3t-3}{t^2-t}$

La función $r(t)=3t-3$ representa la basura orgánica (en kilogramos) y $g(t)=t^2-t$ la inorgánica (en kilogramos), igual que con el problema inicial, t representa el tiempo, pero en días.

Vamos a usar una notación más simplificada y llamaremos a la fracción obtenida $f(t)=\frac{3t-3}{t^2-t}$, esta es la función con la cual trabajaremos.

a) Completa la siguiente tabla, observa el ejemplo cuando $t=2$.

t *días*	$f(t)=\frac{3t-3}{t^2-t}$ kilogramos
0	
0.5	
1	
2	$f(2)=\frac{3(2)-3}{(2)^2-(2)}=\frac{6-3}{4-2}=\frac{3}{2}=1.5$
3	

Posteriormente, en este problema los estudiantes son llevados a reflexionar acerca de cómo afecta el resultado de evaluar a la función racional para un tiempo que se encuentre entre el día uno y el día tres. La intención es que analice el valor de la fracción cuando la gráfica de la recta se encuentra “por encima” de la de la parábola. Se espera que para este intervalo de tiempo note que se genera más basura orgánica que inorgánica, y por lo tanto, la fracción representa en resultado mayor que uno. Se transcriben partes de esta sección de la secuencia.

a) Ahora en una *ventana nueva* grafica a $r(t)=3t-3$ junto con $g(t)=t^2-t$ Anota lo que observes ¿Qué pasa en $t=1$? Y ¿en $t=3$?

___

___

___

b) En el intervalo de $t=1$ a $t=3$ la gráfica de $r(t)$ se encuentra por encima de la gráfica de $g(t)$ ¿qué implica esta situación para los resultados de $f(t)$?

La decisión de trabajar con un problema de modelización intramatemática representó un reto, pero conocer los significados o interpretaciones que el alumno tiene sobre la noción de la división entre cero trajo consigo nuevas estrategias de enseñanza.

Para concluir esta sección 3.2, se muestran los registros de observación de las sesiones en el aula, tanto las del estudio piloto como las del definitivo. Los registros aparecen en forma de tabla con tres columnas. Es necesario señalar que, en la tercera columna aparecen observaciones sobre las evidencias mostradas. Sin embargo, es importante enfatizar que, estos registros no se presentan ahora con la intención demostrar el análisis de resultados. Se presentan para mostrar la herramienta diseñada para el registro de las observaciones, haciendo énfasis en los aspectos metodológicos de su implementación.

3.3 Registro de observación del estudio piloto

En esta sección se presenta los *registros de observación* diseñados para la recolección y sistematización de los datos. Para ello se hace uso de un ejemplo del registro de la aplicación de la secuencia didáctica *Funciones racionales y fracción algebraica* del estudio piloto. Esta secuencia consta de dos problemas de modelización. La aplicación del primer problema se realizó con un grupo de sexto año, del turno matutino del nivel bachillerato de la Escuela Nacional Preparatoria, no fue posible aplicar el segundo problema.

El grupo con el que se trabajó está constituido por 24 alumnos del área III que corresponde a Contaduría y Administración y carreras afines. Se decidió que se formaran equipos de tres alumnos cada uno, por considerar apropiado el *trabajo colaborativo* para la resolución del problema, fue elegido el grado de sexto año debido a que se requiere conocimiento previo del tema de Funciones lineales y cuadráticas.

La secuencia impresa se entregó a cada equipo que se formó, pero las evidencias que se muestran en el registro de observación corresponden a respuestas que se consideran relevantes o representativas. Se les pidió a los equipos que contestaran con pluma en vez de lápiz, pero en caso de cometer un error, lo encerraran en paréntesis.

El observador y docente frente a grupo son la misma persona, ya que se considera una *observación participativa.*

Los problemas fueron seleccionados del libro de *Álgebra* de Ignacio Bello (2009) y han sido modificados para convertirlos en problemas de modelización de funciones.

En el primer problema se establecen dos funciones, que representan la cantidad de basura generada y recuperada en millones de toneladas de un país. El objetivo principal es que el alumno manipule estas funciones e interprete los resultados. En un segundo momento se les pide a los equipos la recolección de seis datos que reporten la cantidad de basura orgánica e inorgánica que se genera por día en la casa de uno de los integrantes, la intención es que los alumnos puedan determinar el modelo matemático que representa la cantidad de basura, graficando tiempo-cantidad de basura y tratando de relacionar la gráfica con la de alguna función conocida.

Los instrumentos para recolectar datos fueron: videograbaciones de cada sesión, audios de los diálogos de algunos equipos y las respuestas escritas en la secuencia impresa.

Es importante hacer notar que la tercera columna de los registros de observación pretende capturar un análisis breve de las sesiones en el aula. Estas anotaciones servirán para el siguiente capítulo de análisis de resultados.

Ejemplo del Registro de observación del estudio piloto

A continuación, se presenta el registro de las seis sesiones del estudio piloto en las que se aplicó la secuencia pero sólo el problema uno.

LOCALIDAD: Ciudad de México.
CONTEXTO: Plantel de la Escuela Nacional Preparatoria de la Universidad Nacional Autónoma de México.
ACTORES: alumnos de sexto año de preparatoria con edades entre los 17 y 19 años y observador participante (tesista).
FECHA: septiembre 1 y 29, noviembre 6 de 2017.
DURACIÓN DE LA ACTIVIDAD: seis sesiones de 50 minutos cada una.
ESCENARIO: aula de clase.
OBSERVADOR PARTICIPANTE: Marisol Sandoval Rosas (tesista).

No. sesión	Descripción de la actividad	Observaciones
1° y 2°	 *Fotografía 1. Sesión uno con el grupo de sexto*	El trabajo colaborativo permite que los alumnos compartan su conocimiento, sus aportaciones pueden ayudar a encontrar la solución del problema con

En la fotografía 1 la profesora (tesista) explica las condiciones con las que se va a trabajar, es decir, en quipos de tres integrantes y con la secuencia impresa para ser contestada con tinta.

mayor facilidad. Los integrantes se escuchan y llegan a una respuesta en consenso.

Los estudiantes resolvieron los incisos a, b y c de la primera sección del problema que se expone a continuación.

1. Concepto de fracción.

Supón que la cantidad de *basura generada* en Estados Unidos en millones de toneladas, está dada por la función $G(t) = 0.04t^2 + 2.34t + 90$, donde *t* es la cantidad de años, con $t = 0$ para 1960 y la cantidad de *basura recuperada* (en millones de toneladas), está dada por la función $R(t) = 0.04t^2 - 0.59t + 7.42$, en México lo entenderíamos como la basura que se puede reciclar.

Problema adaptado del libro *Álgebra* de Ignacio Bello (2009) p. 342.

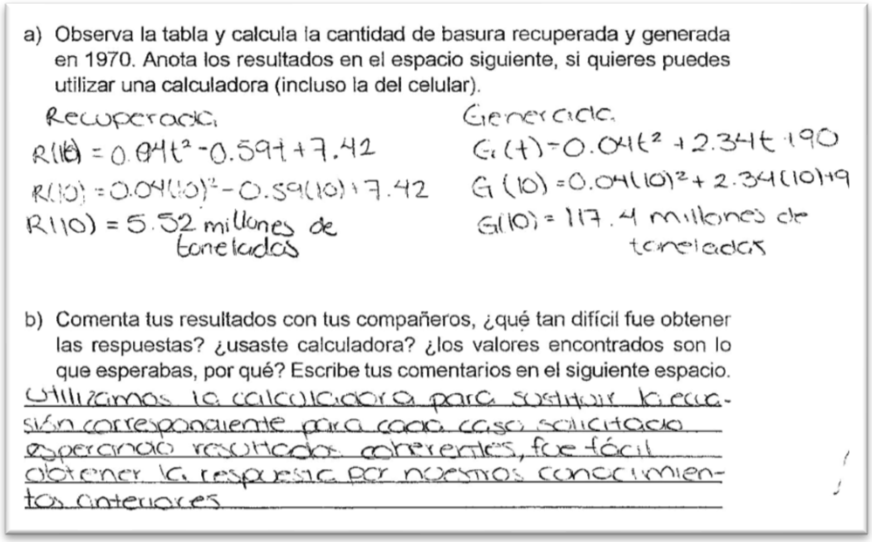
Año	t	Basura recuperada en millones de toneladas $R(t) = 0.04t^2 - 0.59t + 7.42$	Basura generada en millones de toneladas $G(t) = 0.04t^2 + 2.34t + 90$
1960	0	$R(0) = 0.04(0)^2 - 0.59(0) + 7.42 = 7.42$	$G(0) = 0.04(0)^2 + 2.34(0) + 90 = 90$
1961	1	$R(1) = 0.04(1)^2 - 0.59(1) + 7.42 = 6.87$	$G(1) = 0.04(1)^2 + 2.34(1) + 90 = 92.38$
1962	2	$R(2) = 0.04(2)^2 - 0.59(2) + 7.42 = 6.4$	$G(2) = 0.04(2)^2 + 2.34(2) + 90 = 94.84$
…		Y así sucesivamente	

En el primer renglón se puede ver el año, el tiempo y a las funciones que representan a los millones de toneladas de basura recuperada y generada. En el segundo, para 1960 ($t = 0$) la tabla establece que se recuperaron 7.42 millones de toneladas de basura, pero en ese año se generaron 90 millones de toneladas de basura.

En 1962 se generaron 94.84 millones de toneladas de basura y la basura recuperada fue de 6.4 millones de toneladas.

Para poder contextualizar al estudiante, al finalizar el enunciado del problema se agregó una tabla en donde se muestra el funcionamiento de los modelos algebraicos que representan la cantidad de basura. El estudiante relaciona variables y observa patrones de comportamiento entre ellas.

Figura 1

<table>
<tr>
<td rowspan="3"></td>
<td colspan="2">


a) Observa la tabla y calcula la cantidad de basura recuperada y generada en 1970. Anota los resultados en el espacio siguiente, si quieres puedes utilizar una calculadora (incluso la del celular).

Recuperada — Generada

$R(t) = 0.04t^2 - 0.59t + 7.42$ — $G(t) = 0.04t^2 + 2.34t + 90$

$R(10) = 0.04(10)^2 - 0.59(10) + 7.42$ — $G(10) = 0.04(10)^2 + 2.34(10) + 9$

$R(10) = 5.52$ millones de toneladas — $G(10) = 117.4$ millones de toneladas

b) Comenta tus resultados con tus compañeros, ¿qué tan difícil fue obtener las respuestas? ¿usaste calculadora? ¿los valores encontrados son lo que esperabas, por qué? Escribe tus comentarios en el siguiente espacio.

Utilizamos la calculadora para sustituir la ecuación correspondiente para cada caso solicitado esperando resultados coherentes, fue fácil obtener la respuesta por nuestros conocimientos anteriores

Figura 1 Respuesta incisos (a) y (b)
</td>
</tr>
<tr>
<td>La secuencia tiene enunciados en donde se invita a los estudiantes a compartir los resultados obtenidos con el resto de los equipos y el profesor.

Posteriormente expresa ante el grupo y el (la) profesor(a) los resultados obtenidos, ¿coinciden? Y si no es así ¿cuál consideras que es la razón?</td>
<td>En este tipo de pausa el docente puede aprovechar para corroborar hipótesis sobre las posibles respuestas esperadas.</td>
</tr>
<tr>
<td>Los equipos resuelven la pregunta principal: la interpretación de la fracción.</td>
<td>En la respuesta del inciso (c) los estudiantes están relacionando variables y logrando una parcial generalización. En la respuesta del inciso (d) hay una mejor apreciación del significado que le dan a la fracción como razón, al establecer una</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>comparación entre cantidades. Figura 2.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td colspan="2">c) Si utilizas los resultados obtenidos para 1970 ¿qué representa la expresión $\frac{R(t)}{G(t)}$? Es decir, ¿qué interpretación o significado tendría para ti, el resultado de la fracción obtenida? Escribe tu respuesta en el siguiente espacio.

Al dividir la basura reciclada entre la generada y multiplicarla por cien, como resultado tenemos el porcentaje de la basura reciclada en comparación de la basura generada en 1970.

d) Generalizando, para t representando cualquier año posterior a 1960 ¿qué interpretación le darías a la fracción $\frac{R(t)}{G(t)}$? Escribe tu respuesta en el siguiente espacio.

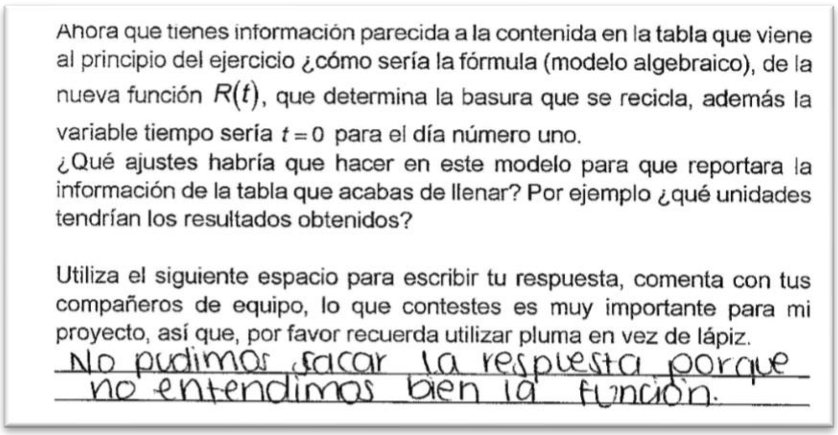
La fracción hace referencia al porcentaje de basura reciclada en comparación de la basura generada a partir de 1960 en adelante.

Figura 2. Respuestas a los incisos (c) y (d)</td>
</tr>
<tr>
<td>3° y 4 °</td>
<td>Los alumnos recolectan datos de la basura orgánica que se va acumulando en la casa de uno de ellos, durante 5 días, (figura 3).

e) Te voy a pedir que realices una recolección de 5 datos que reporten el peso de la basura reciclada, durante 5 días de la semana. Puede ser el peso de recipientes de plástico reciclables, PET, que se recopilan en el contenedor que se encuentra en la explanada del plantel, también podría ser la basura orgánica que se acumula en tu hogar, lo importante es que "midas" el peso de esa basura que puede reciclarse cada día. Anota en la siguiente tabla los datos obtenidos.

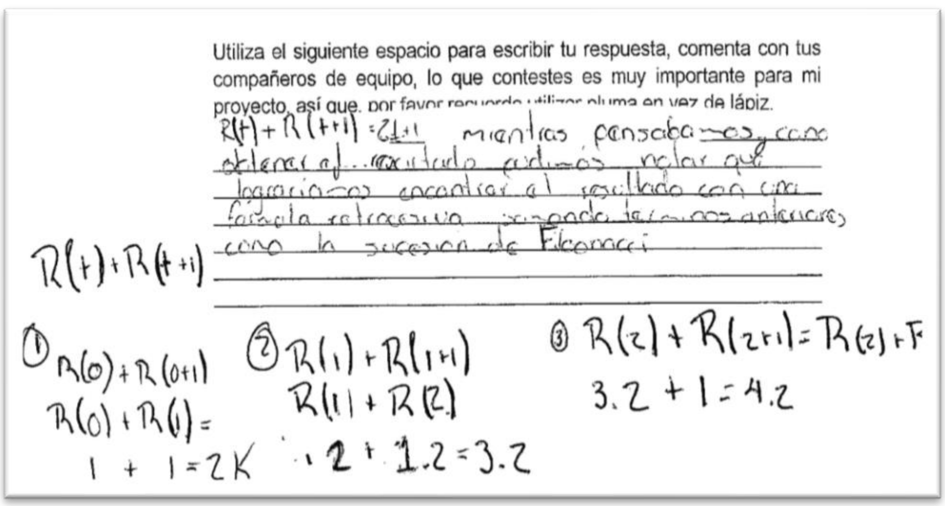
$R(t)=-0.01t^2+1,15t-0.16$

<table><tr><th>Día de la semana</th><th>Peso de la basura a reciclar</th><th>D:</th></tr><tr><td>Lunes</td><td>1 Kg</td><td>1</td></tr><tr><td>martes</td><td>2 Kg .760</td><td>2</td></tr><tr><td>miercoles</td><td>3.2Kg .300</td><td>3</td></tr><tr><td>Jueves</td><td>4.2 Kg 1</td><td>4</td></tr><tr><td>Viernes</td><td>5.2Kg 3</td><td>5</td></tr></table>
Figura 3. Problema uno segunda parte</td>
<td>Se elige este conjunto de datos para trabajar con todos los equipos, ya que no todos ellos realizaron la recolección.</td>
</tr>
</table>

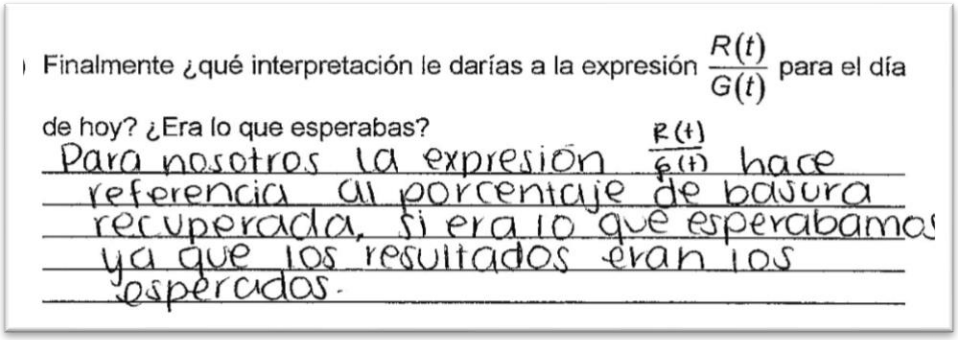
<table>
<tr><td rowspan="3"></td><td>La intención es que el equipo deduzca la función que describe el crecimiento de la cantidad de basura.</td><td>Esta actividad no pudo ser realizada adecuadamente pues hubo confusión en las instrucciones y la mayoría de los equipos no encontró la función, figura 4.</td></tr>
<tr><td colspan="2">
Ahora que tienes información parecida a la contenida en la tabla que viene al principio del ejercicio ¿cómo sería la fórmula (modelo algebraico), de la nueva función $R(t)$, que determina la basura que se recicla, además la variable tiempo sería $t=0$ para el día número uno.
¿Qué ajustes habría que hacer en este modelo para que reportara la información de la tabla que acabas de llenar? Por ejemplo ¿qué unidades tendrían los resultados obtenidos?

Utiliza el siguiente espacio para escribir tu respuesta, comenta con tus compañeros de equipo, lo que contestes es muy importante para mi proyecto, así que, por favor recuerda utilizar pluma en vez de lápiz.
No pudimos sacar la respuesta porque no entendimos bien la función.

Figura 4. Determinación del modelo</td></tr>
<tr><td>Un equipo obtuvo un modelo recursivo.
El diálogo siguiente puede ayudar a aclarar el razonamiento que condujo a la fórmula recursiva.
E_1: Ah ya entendí
E_2: ¿Sí? a ver ya se iluminó
E_1: Podríamos poner aquí t y aquí t+1
E_3: ¿Y cómo para qué?
E_1: Éste podría ser t para que sea cero, el día cero y aquí sería uno [señalando t+1]
E_3: Entonces sería tiempo n ¿no? y pondrías n_1, n_2, n_3 usamos los tiempos ahí.
E_2: Entonces ya lo tendríamos, pero ¿cuántas fórmulas son?
E_1: Por ejemplo, hablando del día cero, R sería uno y el día uno sería uno y una más uno sería dos que sería el R del día dos… y si empezamos con el día tres R … aquí sería el día uno $t=1$ y sería dos $t+1=2$ el día dos sería 1.2 kilogramos…
E_2: Sí, pero sería 3.2 y entonces ya lo sacamos porque esto es lo del día dos.</td><td>Es importante mencionar que el equipo es de alumnos de sexto año y utilizaron los datos que ellos recolectaron $\{1, 2, 3.2, 4.2, 5.2\}$. En su respuesta podemos ver como adaptan una teoría conocida (fórmula recursiva) para poder encontrar el modelo que se adapte a su tabla de valores, figura 5.</td></tr>
</table>

	E_3: Ya lo sacamos porque el día tres da 3.2 +1 o sea 4.2 y uno con otro, lo mismo, daría 5.2. E_2: ¡Perfecto! E_1: ¿Qué opina? [dirigiéndose a la profesora] M: Me parece muy importante el avance de ver el problema como una fórmula que se le conoce como recursiva, regresándote al primero para poder obtener el segundo, y esa parte me parece muy interesante. Empezaron desde el cero y eso explica porque aquí le pusieron *t+1.* E_1: Van sumándose para obtener el que sigue. M: Ajá van sumándose y esa es una fórmula que describe el tiempo. La suma de las erres es la fórmula que describe la cantidad de basura, muy bien chicos, gracias.	En el diálogo podemos observar como los alumnos asignan una notación recursiva a cada valor del tiempo y a la cantidad de basura generada ese día. La respuesta de la profesora no es de aprobación ni desaprobación, pero estimula y valora el razonamiento del equipo.
	 *Figura 5. Fórmula recursiva*	
	Otro equipo usa el software de GeoGebra y la herramienta de Análisis de regresión de dos variables, y obtienen los modelos algebraicos de la cantidad de basura orgánica y total generada, estos modelos son usados posteriormente por el resto de los	Los estudiantes adaptan un modelo polinomial al conjunto de datos usando la tecnología, sin embargo, se observa una confusión en el uso de la literal que

	equipos. En la fotografía 2 los equipos usan el equipo de cómputo de la tesista.  *Fotografía 2 Uso de GeoGebra*	representa al tiempo. No todos los equipos saben usar este software y los que lo intentan tienen dudas en cómo hacerlo.
5° y 6°	Para esta última parte, los alumnos usan las funciones que algunos equipos encontraron para poder dar la interpretación a la fracción $\frac{R(t)}{G(t)}$	Como para la primera parte del problema algunos equipos interpretaron la fracción como un porcentaje, esta interpretación fue para la basura recuperada y la total generada, pero en este caso se trataba de basura orgánica e inorgánica, figura 6. Con esta pregunta terminó la aplicación del piloto, por circunstancias fuera de alcance no se pudo continuar con las sesiones.



Finalmente ¿qué interpretación le darías a la expresión $\frac{R(t)}{G(t)}$ para el día de hoy? ¿Era lo que esperabas?

Para nosotros la expresión $\frac{R(t)}{G(t)}$ hace referencia al porcentaje de basura recuperada, si era lo que esperabamos ya que los resultados eran los esperados.

Figura 6. Nuevamente porcentaje

Es necesario señalar que las evidencias mostradas corresponden sólo a algunos equipos que la tesista pudo observar más de cerca.

3.4 Registro de observación del estudio definitivo

El estudio definitivo también se realizó en un plantel de la Escuela Nacional Preparatoria de la UNAM. Se trabajó con un grupo de cuarto año de bachillerato, el cual estuvo conformado por 45 jóvenes de 15 a 16 años recién ingresados al nivel preparatoria y provenientes de secundarias públicas y de paga.

Se mantuvo comunicación constante con el profesor responsable de la asignatura de Matemáticas IV (cuarto año), en este grupo. El objetivo fue estar al tanto de los contenidos vistos por el docente, para tener un panorama sobre los antecedentes teóricos requeridos en la realización de la secuencia, es decir, el grupo tenía que haber visto el tema de funciones y algún ejercicio de aplicación a un contexto real.

Para la aplicación de la secuencia se consideró una sesión en la sala de computo, en donde los estudiantes pudieron realizar la gráfica de un conjunto de datos recolectados, proporcionados por la tesista, quien como observador participante estuvo al frente del grupo en todas las actividades de este trabajo (observador participante y tesista).

Igual que para el estudio piloto, el observador participante actuó también como docente del grupo durante las siete sesiones que duró el estudio. La razón de esta decisión fue para tener un mejor control sobre las respuestas a las preguntas de los alumnos, pues es importante que el docente no solucione la problemática, sino que motive al estudiante para que analice y explore diferentes alternativas que lo ayuden. En el registro de observación, al referirse a la profesora del grupo, se estará hablando del observador participante (tesista).

El trabajo en equipos de tres integrantes también se mantuvo para este estudio. Desde la primera sesión los estudiantes recibieron información sobre las ventajas de trabajar con equipos pequeños, en los que pudieran escuchar la opinión de sus compañeros y tomar una decisión para resolver la problemática planteada.

En la parte de descripción de la actividad de este registro de observación, la secuencia será presentada parte por parte, pero se podrá consultar en el anexo de este capítulo tal como fue presentada a los alumnos.

A continuación, se presenta un ejemplo del registro del estudio definitivo.

<u>Ejemplo del Registro de observación del estudio definitivo</u>

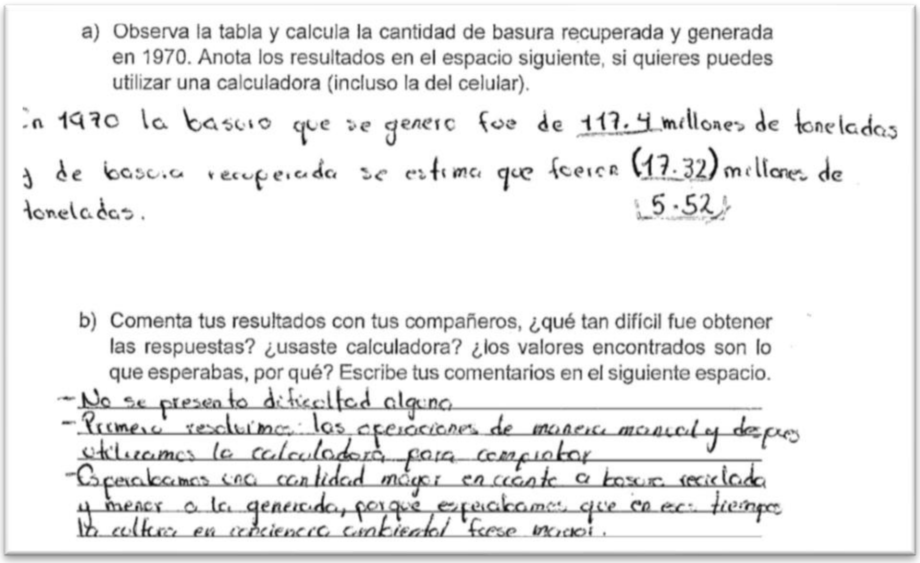
LOCALIDAD: Ciudad de México
CONTEXTO: Plantel de la Escuela Nacional Preparatoria de la Universidad Nacional Autónoma de México
ACTORES: Alumnos de cuarto año de preparatoria con edades de 15 a 16 años, tesista (observador participante).
FECHA: primera y tercera semana de noviembre 2017
DURACIÓN DE REGISTRO: siete sesiones de 50 minutos cada una
ESCENARIO: aula de clase (seis sesiones) y sala de cómputo (una sesión)
OBSERVADOR: Marisol Sandoval Rosas (tesista)

No. de sesión	Descripción de la actividad	Observaciones
Primera semana de	Al inicio de la primera sesión la profesora platicó con el grupo y les explicó las actividades que se realizarían (fotografía 3).	Al destinar unos minutos para explicar el objetivo principal de estas actividades, los alumnos saben que se evaluará a

	 *Fotografía 3 Inicio de la actividad* M: La idea es realizar una secuencia de dos problemas, la cual es uno de los productos de mi investigación. El nuevo programa de cuarto año se implementó, y ahora aborda problemas de modelización, que son problemas donde se trabaja en un contexto más cercano al de ustedes. En la secuencia se trata del problema de la basura…	la secuencia y no a ellos, esto logró un ambiente relajado (los estudiantes sabían que la forma en que realizaran la actividad no afectaría su calificación en la asignatura), pero comprometido con el proyecto.
	Los incisos (a), (b) y (c) del problema 1 fueron contestados en una sesión de 50 minutos. A continuación, se muestra el problema y una tabla de valores de las funciones utilizadas. 1. Concepto de fracción. Supón que la cantidad de *basura generada* en Estados Unidos en millones de toneladas está dada por la función $G(t)=0.04t^2+2.34t+90$, donde t es la cantidad de años, con $t=0$ para 1960 y la cantidad de *basura recuperada* (en millones de toneladas), está dada por la función $R(t)=0.04t^2-0.59t+7.42$, en México lo entenderíamos como la basura que se puede reciclar. La tabla que se muestra a continuación puede servir para aclarar la información dada en el párrafo anterior.	La tabla que se agregó después del enunciado del problema funcionó como un excelente apoyo para poder entender el significado de las funciones y de la variable tiempo, es decir, los integrantes del equipo comprendieron que la variable *t* representaba al tiempo en años y que, al sustituirla en las funciones el resultado representaba a la basura generada y recuperada

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><th>Año</th><th>t</th><th>Basura recuperada en millones de toneladas
$R(t)=0.04t^2-0.59t+7.42$</th><th>Basura generada en millones de toneladas
$G(t)=0.04t^2+2.34t+90$</th></tr>
<tr><td>1960</td><td>0</td><td>$R(0)=0.04(0)^2-0.59(0)+7.42=7.42$</td><td>$G(0)=0.04(0)^2+2.34(0)+90=90$</td></tr>
<tr><td>1961</td><td>1</td><td>$R(1)=0.04(1)^2-0.59(1)+7.42=6.87$</td><td>$G(1)=0.04(1)^2+2.34(1)+90=92.38$</td></tr>
<tr><td>1962</td><td>2</td><td>$R(2)=0.04(2)^2-0.59(2)+7.42=6.4$</td><td>$G(2)=0.04(2)^2+2.34(2)+90=94.84$</td></tr>
<tr><td>…</td><td></td><td>Y así sucesivamente</td><td></td></tr>
</table>
En el primer renglón se puede ver el año, el tiempo y a las funciones que representan a los millones de toneladas de basura recuperada y generada. En el segundo, para 1960 ($t=0$) la tabla establece que se recuperaron 7.42 millones de toneladas de basura, pero en ese año se generaron 90 millones de toneladas de basura.
En 1962 se generaron 94.84 millones de toneladas de basura, y la basura recuperada fue de 6.4 millones de toneladas.
</td>
<td>en ese año, esto se pudo observar en las respuestas del inciso (a). En ambos estudios, ninguno de los equipos tuvo dificultades para responder.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>
A continuación, son presentados los incisos a y b, también una parte de la secuencia donde se invita al equipo a compartir con los demás compañeros.
a) Observa la tabla y calcula la cantidad de basura recuperada y generada en 1970. Anota los resultados en el espacio siguiente, si quieres puedes utilizar una calculadora (incluso la del celular).
b) Comenta tus resultados con tus compañeros, ¿qué tan difícil fue obtener las respuestas? ¿usaste calculadora? ¿los valores encontrados son lo que esperabas, por qué? Escribe tus comentarios en el siguiente espacio.
Posteriormente expresa ante el grupo y el profesor los resultados obtenidos, ¿coinciden con los resultados de los demás? y si no es así ¿cuál consideras que es la razón?
</td>
<td>
Se considera que los incisos a y b son fáciles de responder para los alumnos pues los resolvieron en poco tiempo, también pudo deberse a contenidos vistos en clase de problemas similares.
En la figura 7 se puede ver la respuesta de uno de los equipos.
Es importante destacar que anotaron los resultados sin olvidar las unidades. La redacción sugiere que tienen un
</td>
</tr>
</table>

		dominio del significado de la respuesta.



a) Observa la tabla y calcula la cantidad de basura recuperada y generada en 1970. Anota los resultados en el espacio siguiente, si quieres puedes utilizar una calculadora (incluso la del celular).

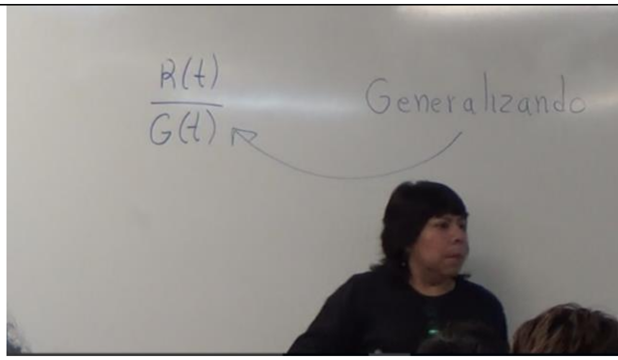
En 1970 la basura que se genero fue de 117.4 millones de toneladas y de basura recuperada se estima que fueron (17.32) millones de toneladas. 5.52

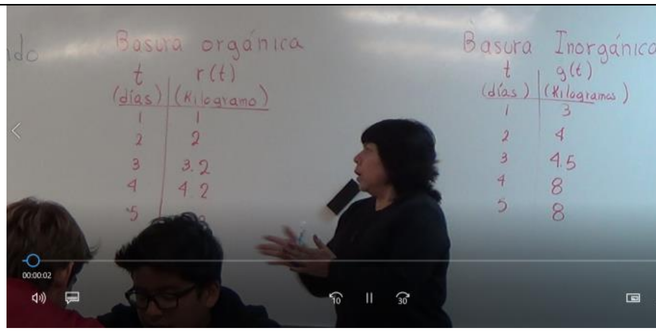
b) Comenta tus resultados con tus compañeros, ¿qué tan difícil fue obtener las respuestas? ¿usaste calculadora? ¿los valores encontrados son lo que esperabas, por qué? Escribe tus comentarios en el siguiente espacio.

- No se presento dificultad alguna
- Primero resolvimos las operaciones de manera manual y despues utilizamos la calculadora para comprobar
- Esperabamos una cantidad mayor en cuanto a basura reciclada y menor a la generada, porque esperabamos que en ese tiempo la cultura en conciencia ambiental fuese mayor.

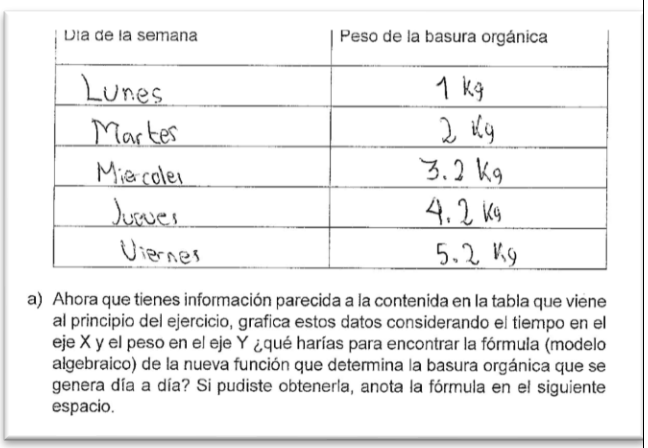
Figura 7. Respuesta del inciso (a) y (b) de la secuencia aplicada en el estudio definitivo

	Para responder el inciso (c) y (d) los equipos utilizaron casi la mitad de la sesión. Y ahora la pregunta importante… c) Si utilizas los resultados obtenidos para 1970 ¿qué representa la expresión $\frac{R(t)}{G(t)}$? es decir, ¿qué interpretación o significado tendría para ti, el resultado de la fracción obtenida? Escribe tu respuesta en el siguiente espacio.	El inciso c costó un poco más de trabajo, sin embargo, algunos equipos se comunicaron entre ellos y llegaron a una solución.
2° y 3° sesión. Primera semana de noviembre	La sesión comienza con una retroalimentación dada por la profesora sobre los resultados obtenidos en la sesión pasada, y termina con una introducción a los incisos que siguen (fotografía 4).	La retroalimentación de lo visto la clase pasada es un elemento útil para poder ayudar a resolver dudas que hubieran quedado pendientes anteriormente. Permite también que haya una introducción al trabajo actual, por lo que es

	 *Fotografía 4. Inicio de la segunda sesión* M: Chicos la pregunta del inciso (d) les dice “generalizando”, comienza con esa palabra, ¿qué interpretación le darían para cualquier año? No sólo para 1970 sino para cualquier año ¿qué significaría para ustedes? Nuevamente me interesa su interpretación…	importante que el docente observe la reacción de los estudiantes y los motive a preguntar si algo no queda claro.
	Posteriormente, la profesora proporcionó a los alumnos una colección de datos que representaban la cantidad de basura orgánica e inorgánica generada en la casa de uno de los estudiantes. El objetivo es que los equipos obtengan las fórmulas de las funciones que describen el comportamiento de la basura orgánica e inorgánica (fotografía 5).	Los datos de la basura orgánica presentan un aumento constante de 1 kilogramo, excepto el aumento que hay del dato dos al tres (figura 8, p. 97). Este hecho logró que los alumnos dedujeran la fórmula de una línea recta $y = mx + b$ que describiera el comportamiento de los datos graficados, pero se desconcertaron al notar que la fórmula no “funcionaba” con todos los datos (fotografía 6).



Fotografía 5. Datos proporcionados por la tesista



Día de la semana	Peso de la basura orgánica
Lunes	1 kg
Martes	2 kg
Miercoles	3.2 kg
Jueves	4.2 kg
Viernes	5.2 kg

a) Ahora que tienes información parecida a la contenida en la tabla que viene al principio del ejercicio, grafica estos datos considerando el tiempo en el eje X y el peso en el eje Y ¿qué harías para encontrar la fórmula (modelo algebraico) de la nueva función que determina la basura orgánica que se genera día a día? Si pudiste obtenerla, anota la fórmula en el siguiente espacio.

Figura 8. Deducción de una fórmula

Fotografía 6. Deducción de la fórmula $y = mx + b$

E_1: Lo que hicimos es considerar la función que nos dio el maestro y estuvimos siguiendo los pasos del ejercicio que nos dio [el profesor realizó un ejercicio con gráficas de rectas]. Vimos la proporción aquí y entonces hicimos lo de razones.

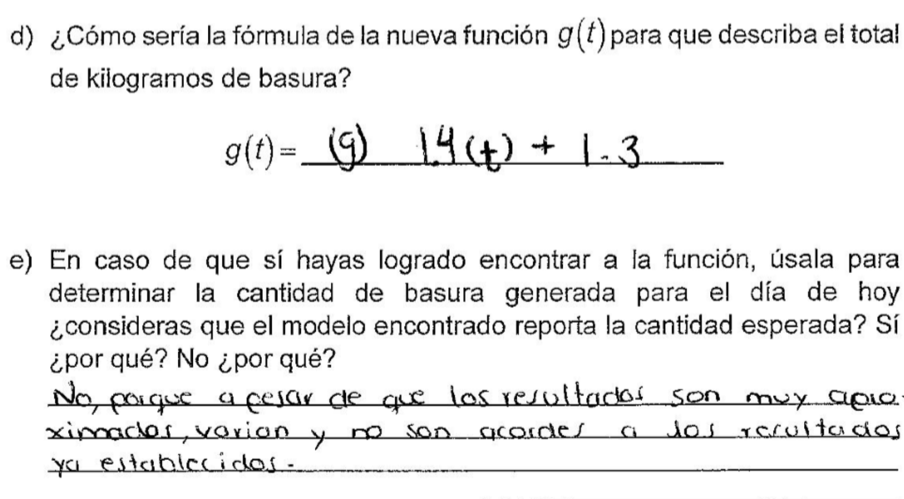
M: ¿Lo de proporciones?

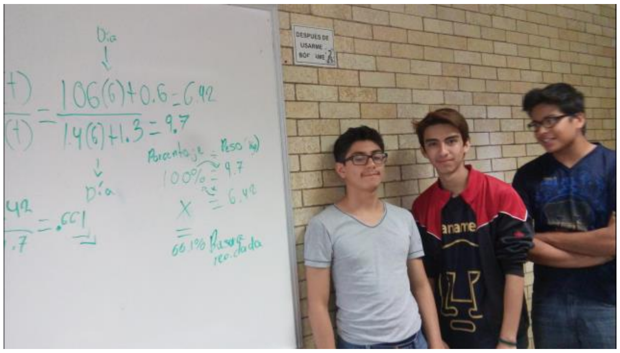
E_1: Sí, lo de proporciones para despejar lo de la basura, pero vimos que no se amoldaba en todos y le agregamos el 0.2 pues es el que da

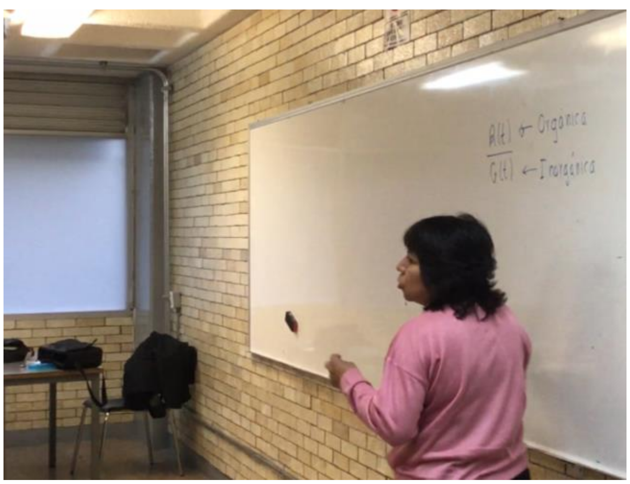
La fotografía 6 muestra uno de los equipos que aplicaron la teoría vista en clases anteriores sobre línea recta como función, y decidieron aceptar una fórmula que describiera el comportamiento de la mayoría de los datos.

Es importante notar que el equipo logró encontrar una fórmula, esto representa un avance en

	la mayoría, aquí hay un error [señalando el dato dos y tres]. M: Ajá ¿por qué piensas que hay un error? E_1: No, es que, cuando nosotros utilizamos la fórmula no nos da uno, nos da 1.2, 2.2, 3.2, 4.2 y 5.2 o sea en estos dos casos no funciona. M: No se adapta. E_2: Es decir hay un margen de error. M. ¡Oh! me gusta eso que dijiste “hay un margen de error” no es exacto el valor que está reportado pero la fórmula funciona muy bien para los otros tres, así que hay una especie de valoración: funciona para los otros tres, falla en otros dos ¿la damos por buena? E_1: Pues sí porque funciona para la mayoría. M: Ajá y ese margen de error estaría definido por este 0.2. Me parece muy bien.	la representación de un fenómeno a través de símbolos.
	En la sesión tres los estudiantes son llevados a la sala de cómputo para poder obtener las fórmulas de la basura orgánica e inorgánica con ayuda del software GeoGebra. Se cuenta con una máquina por cada alumno, pero continúan trabajando por equipo (fotografía 7).  *Fotografía 7. Sesión en la sala de cómputo* Hubo equipos que trabajaron con modelos exponenciales o logarítmicos, tratando de	Los estudiantes ya tenían cierta habilidad en el uso de la herramienta de análisis de regresión de dos variables, así que comenzaron graficando los datos y posteriormente obtuvieron las fórmulas que más se ajustaron a los puntos graficados.

	que los puntos quedaran lo más cerca posible de la curva elegida.	
4° y 5°. Primera semana de noviembre	En esta sesión los alumnos pasaron al pizarrón a mostrar las funciones obtenidas en la sala de cómputo para contestar la pregunta en la que se les pedía calcular la basura generada el sexto día: *En caso de que sí hayas logrado encontrar a la función, úsala para determinar la cantidad de basura generada para el día de hoy ¿consideras que el modelo encontrado reporta la cantidad esperada? Sí ¿por qué? No ¿por qué?*	Los alumnos utilizan las fórmulas obtenidas, analizan si "funcionan". Algunos equipos aceptaron sus respuestas como correctas pero aproximadas y otros las rechazaron, como lo muestra la figura 9 en la página 99.
	 d) ¿Cómo sería la fórmula de la nueva función $g(t)$ para que describa el total de kilogramos de basura? $g(t)=$ (9) 1.4(t) + 1.3 e) En caso de que sí hayas logrado encontrar a la función, úsala para determinar la cantidad de basura generada para el día de hoy ¿consideras que el modelo encontrado reporta la cantidad esperada? Sí ¿por qué? No ¿por qué? No, porque a pesar de que los resultados son muy apro-ximados, varian y no son acordes a los resultados ya establecidos.- *Figura 9. Modelo determinado con GeoGebra*	
	Nuevamente se les pide interpretar el cociente de las funciones y ellos dan el significado de porcentaje, y usan lo aprendido sobre proporciones. En la fotografía 8 un	En la fotografía 8 se puede apreciar el cociente de la basura orgánica y la inorgánica, sin embargo, la

<table>
<tr>
<td></td>
<td>equipo pasa al pizarrón a mostrar sus resultados.


Fotografía 8. Trabajo en el pizarrón</td>
<td>interpretación correcta no es la de porcentaje sino la de razón.</td>
</tr>
<tr>
<td>6°y 7° sesión</td>
<td>En esta sesión se resolvió el problema dos de la secuencia y nuevamente la profesora comenzó con una retroalimentación de las sesiones pasadas (fotografía 9).


Fotografía 9. Retroalimentación problema 1

M: En la segunda parte del problema uno trabajamos con la basura orgánica e inorgánica, pero la interpretación de la fracción fue diferente porque, en la primera parte, $G(t)$ representaba a la basura total generada y en la segunda parte, a la basura inorgánica, no a la total generada, es diferente [la maestra continúa y termina hablando del objetivo</td>
<td>En este inicio de sesión la profesora platica con el grupo para que reflexionen sobre la interpretación que dieron al cociente de la basura orgánica con la inorgánica. Haciendo notar las diferencias entre el anterior cociente de la basura recuperada de un total de basura generada y el actual cociente.</td>
</tr>
</table>

	actual] El objetivo por alcanzar en el *problema 2* es que analicen lo que significa para ustedes la división entre cero.	
	El problema comienza con la indicación de pedirle a los equipos que completen una tabla. Se les explica que las funciones proporcionadas son el resultado de las obtenidas por otro grupo.	En la figura 10 de la página 101, se puede ver como un equipo completa la tabla y comete un error que encierra en paréntesis para la respuesta en el caso de $t=0$, y en el caso de $t=1$ la expresión $\frac{0}{0}$ la vuelven definida (figura 10). Esto es un error muy común, pero al realizar un análisis con las gráficas y escuchar las opiniones de otros equipos y del profesor-observador, las respuestas son corregidas.

La función $r(t)=3t-3$ representa la basura orgánica (en kilogramos) y $g(t)=t^2-t$ la inorgánica (en kilogramos), igual que con el problema inicial, t representa el tiempo, pero en días. Vamos a usar una notación más simplificada y llamaremos a la fracción obtenida $f(t)=\frac{3t-3}{t^2-t}$, esta es la función con la cual trabajaremos.

a) Completa la siguiente tabla, observa el ejemplo cuando $t=2$.

t (*días*)	$f(t)=\frac{3t-3}{t^2-t}$ (kilogramos)	
0	$\left(f(0)=\frac{3(0)-3}{3^2-3}=\frac{0-3}{9-3}\right)\neq f(0)=\frac{3(0)-3}{0^2-0}=\frac{0-3}{0-0}=\frac{-3}{0}$	$=\frac{-3}{0}$ kg
0.5	$f(0.5)=\frac{3(0.5)-3}{(0.5)^2-0.5}=\frac{1.5-3}{0.25-0.5}=\frac{-1.5}{-0.25}=6$	$=6$ kg
1	$f(1)=\frac{3(1)-3}{(1)^2-1}=\frac{3-3}{1-1}=\frac{0}{0}=0$	$=0$ kg
2	$f(2)=\frac{3(2)-3}{(2)^2-(2)}=\frac{6-3}{4-2}=\frac{3}{2}=1.5$	$=1.5$ kg
3	$f(3)=\frac{3(3)-3}{(3)^2-3}=\frac{9-3}{9-3}=\frac{6}{6}=1$	$=1$ kg

Figura 10. Expresiones no definidas

	Se hizo uso de un proyector para que los alumnos pudieran ver las gráficas de las nuevas funciones. Mediante una clase coordinada por la tesista, los equipos manifestaron sus dudas y pudieron conjeturar resultados relevantes como la imposibilidad de denominador con valor nulo.	Los equipos, después de expresar sus ideas ante el resto de sus compañeros y con la profesora (tesista) pueden entender que, si la función del denominador vale cero, eso significa que no hubo basura generada ese día, pero al ver el cociente como fracción entonces el denominador nulo no tiene sentido, figura 11.

<table>
<tr>
<td></td>
<td colspan="2">
e) Para las funciones como, $f(t)$ llamadas funciones racionales, es importante *vigilar* que su denominador (en este caso $g(t)=t^2-t$) nunca resulte igual a cero. Regresa a la tabla que completaste ¿hay algún valor del tiempo para el cual el denominador sea igual a cero? ¿qué significa que el denominador valga cero? Es decir, si $g(t)=0$ ¿cómo lo interpretas?

Si; ya que en el dia 0 y 1 nos da el resultado de 0 en basura inoganica, esto quier decir que en esos días no se genero tal tipo de basura

f) Cuando el denominador de la función racional $f(t)$ vale cero ¿cómo interpretas el resultado de la fracción?

(Que el resultado sera mayor a 1)
Que el resutado es indefinido

Figura 11. Denominador cero
</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>En estas sesiones hubo la necesidad de coordinar las respuestas y dudas de los equipos, sobre todo al final para poder escuchar las conclusiones a las que se llegaron.</td>
<td></td>
</tr>
</table>

Capítulo 4. Análisis de resultados

Corresponde en este capítulo abordar el análisis de los resultados y datos obtenidos de la aplicación de la secuencia diseñada, la cual resultó ser una valiosa herramienta para dar respuesta a la pregunta de investigación. Con ayuda de una comparación entre los resultados esperados y descritos en el análisis previo, las producciones de los alumnos y los resultados conseguidos en ambos estudios (el piloto y el definitivo) se pudieron definir las categorías de análisis que fueron usadas y establecer el vínculo entre las evidencias mostradas y la pregunta de investigación.

Las evidencias fueron obtenidas de las videograbaciones de cada sesión, la transcripción de los diálogos considerados relevantes y de las respuestas escritas por los estudiantes en la secuencia impresa.

El trabajo en equipo del que se habló en el capítulo de metodología permitió que los alumnos compartieran su conocimiento y propuestas de solución. Mediante la interacción entre iguales, la solución de los problemas planteados en la secuencia fue obtenida con mayor facilidad. En la transcripción de los diálogos grabados en el momento en que los equipos resolvían los problemas de la secuencia es posible apreciar los conocimientos previos y las estrategias de solución que los estudiantes usaron. En este aspecto (conocimientos y estrategias) el trabajo de los estudiantes de sexto y los de cuarto año fue muy similar.

Es importante resaltar que el tema de funciones resultó ser un antecedente teórico fundamental para la solución de las problemáticas planteadas en la secuencia. Los nuevos programas de estudio de la Escuela Nacional Preparatoria, implementados en el ciclo 2017-2018, integran el concepto de funciones desde el cuarto año y es considerado, desde una perspectiva personal basada en el trabajo de investigación realizado en el desarrollo de esta maestría, que introducir el concepto de funciones a través de problemas de modelización es una forma de acercarse al Álgebra. El uso de variables como cantidades que se pueden relacionar mediante una expresión simbólica (Ursini, 2008) generó un acercamiento del alumno a contextos con mayor sentido para él. Así que las respuestas de los estudiantes al interpretar o dar un significado a la fracción algebraica usando funciones racionales aportó ideas y resultados muy interesantes.

Se comienza con la definición de las *Categorías de Análisis* en la sección 4.1, seguida de una ejemplificación más clara de cada una de ellas. A partir de estas definiciones son analizados los resultados que contribuyen a dar respuesta a la pregunta de investigación en la sección 4.2 *Análisis a posteriori*. Para brindar un panorama general de los principales resultados obtenidos durante ambos estudios (piloto y definitivo) se presenta una tabla con el resumen de dichos resultados.

Las evidencias recolectadas se examinan conforme a cada una de las categorías, esto es, en la sección 4.2.1 son presentados los datos recolectados de diferentes sesiones en el aula de clases que involucren su análisis con la primera categoría, y posteriormente las evidencias (algunas diferentes a las primeras) son confrontadas usando la segunda categoría en la sección 4.2.2. El análisis de la sección 4.2.3 abordará evidencias trabajadas de acuerdo con la tercera categoría.

Al final de los resultados mostrados se encuentra un resumen de lo más importante que cada categoría aportó.

En la sección 5 Conclusiones, se presenta las limitaciones y alcances del desarrollo de esta tesis y el trabajo de investigación.

Similarmente al capítulo de Metodología, se diseñó un diagrama (figura 4.1) que muestra el panorama general de la estructura de este capítulo.

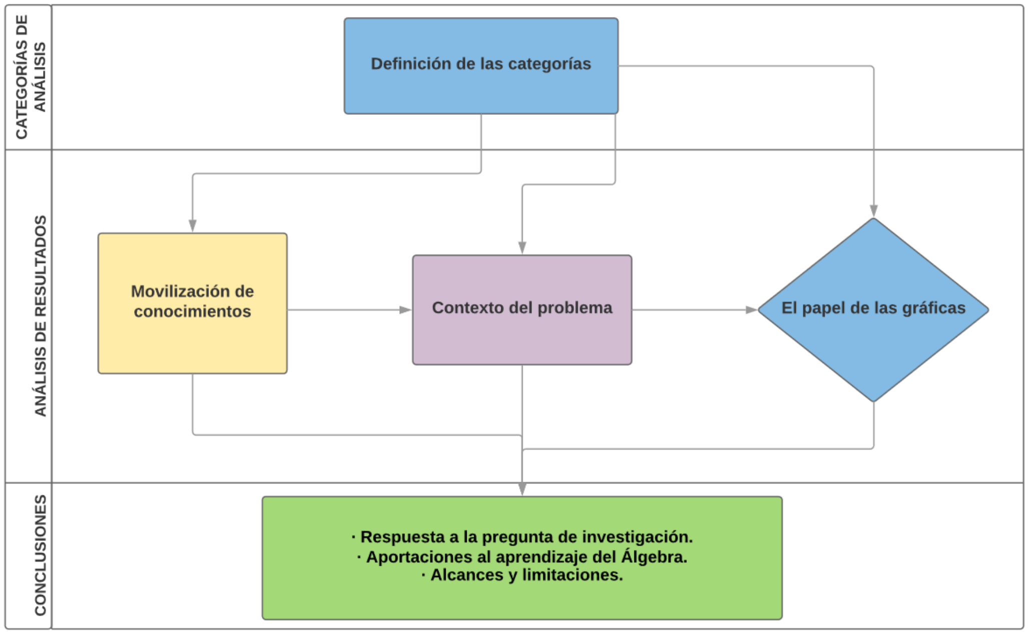


Figura 4.1 Análisis de resultados y conclusiones

4.1 Definición de Categorías de Análisis

En este apartado se definieron tres categorías de análisis: la movilización de conocimientos sobre fracciones aritméticas, el contexto del problema y el papel de las gráficas.

4.1.1 La movilización de conocimientos sobre fracciones aritméticas

Con esta categoría se busca detectar y analizar los conocimientos de aritmética, en el caso específico de fracciones que el estudiante moviliza. La considero como la categoría principal de la tesis ya que contesta parte de la pregunta de investigación:

> ¿Qué conocimientos sobre *fracciones aritméticas* se movilizan al trabajar con una secuencia didáctica que introduzca la solución de problemas sobre *fracciones algebraicas*, usando funciones racionales desde la perspectiva de modelización matemática?

Los resultados obtenidos durante el estudio piloto de la secuencia y el definitivo muestran que los estudiantes cuentan con conocimientos previos sobre el tema de fracciones aritméticas. Ya que la secuencia fue diseñada para estudiantes de cuarto año de preparatoria se considera que dichos conocimientos son obtenidos de cursos de matemáticas impartidos en primaria y secundaria; para los alumnos de sexto año el tema de fracciones, visto en cuarto año, y el de funciones en el quinto, fueron un antecedente teórico que se hizo presente en sus respuestas. No se puede afirmar que los significados que los alumnos den a los conceptos aprendidos sean formales o correctos, pero es muy notorio su uso durante el proceso de solución de las problemáticas planteadas en los ejercicios de la secuencia.

Con esta categoría se buscó analizar qué conocimientos sobre fracciones aritméticas fueron utilizados y adaptados para poder dar una interpretación al concepto de fracción algebraica. Por ejemplo, en la secuencia hay una pregunta sobre la interpretación del cociente de dos funciones evaluadas (basura generada y recuperada), el estudiante relacionó el valor específico de este cociente con su significado dentro del contexto planteado en el problema, para posteriormente usarlo como *fuente de significado* para la fracción algebraica.

Así que se define *La movilización de conocimientos sobre fracciones aritméticas* como el uso de conocimientos previos que los estudiantes tengan sobre fracción aritmética para poder comprender el concepto de la fracción algebraica.

El primer ejemplo está compuesto de diálogos que refieren al uso de esta categoría, ya que proporcionan información sobre dos diferentes significados que los alumnos de sexto año usaron para interpretar a la fracción algebraica $\frac{R(t)}{G(t)} = \frac{\textit{Basura}\ \text{recuperada}}{\textit{Basura}\ \text{generada}}$.

A manera de recordatorio se expresa que en la secuencia se usaron modelos algebraicos de segundo grado para representar a la basura generada y recuperada en un año determinado, siendo 1960 el año cero, adicionalmente les fue solicitado a los alumnos que interpretaran el cociente de los resultados obtenidos en el año 1970.

En el primer diálogo la *estudiante uno* interpretó a la fracción como *razón* y posteriormente como *porcentaje*, y aunque lo expresó en forma de pregunta, con palabras como “relación entre” o “por ciento”, es una evidencia de los significados de fracciones aritméticas que la alumna posee. La *estudiante dos* ofreció un significado más orientado a lo social, pero en la frase “cada año se recupera menos basura”, al comparar la basura recuperada con la generada, establece el significado de fracción como una *razón*.

En el segundo diálogo, que corresponde a otro equipo de estudiantes, se puso de manifiesto el significado de fracción como porcentaje en la participación de los estudiantes número *tres* y *cuatro*. Es posible observar la movilización del conocimiento del porcentaje desde una perspectiva de proporcionalidad. Al final del diálogo la estudiante llamada Vania realizó una afirmación que es comentada en la definición de la siguiente categoría.

Ejemplo 1

Recordemos que E_i se refiere al estudiante *i* y M a la maestra.

Diálogo 1

E_1: Mi pregunta es ¿qué representa conforme a los resultados si haces la división o que representan la relación entre estos dos? [estudiante uno preguntando a la maestra] Es mi duda.

M: Exactamente ¿Qué representan para ti? Pero a lo mejor para ti representan otra cosa [dirigiéndose a otra alumna]

E_2: Ajá, es que lo que estábamos platicando hace rato, es que cada año se recupera menos basura pero se genera muchísimo más, para mí eso es lo importante, hicimos la división y fue de 0.04, y realmente para mí eso no tiene nada de importancia, bueno para mí lo que fue más significativo fue eso, que cada vez se incrementa más, y estamos generando más basura pero la reciclamos menos, para mí eso es lo que significa pero para ella es una relación.

E_1: Si, como le digo, para mí es una relación porque conforme a la basura generada ¿es lo que se va a recuperar como un porciento de ella? Es lo que no entendía y sigo sin entender.

M: ¿Por ciento, mencionaste por ciento?

E_1: Es como el porciento que se recupera si usamos la fracción sale 0.04, pero es el por ciento que se recupera de la basura generada.

M: Ahorita lo vamos a exponer y preguntamos a ver qué opinan el resto de los chicos, gracias.

Diálogo 2

E_1: Para nosotros fue como lo que se recupera por cada millón de tonelada de basura generada.

E_2: Que no es suficiente comparado con lo que se genera.

E_3: Porcentaje de lo que se recupera ¿no?

E_4: Sí es el porcentaje pues el denominador de esa división, el 117.4 es el 100%, y el resultado de 0.04, si recorremos el punto, lo convertimos en el 4% de la basura que se recupera.

M: ¿Qué opinan? El 4% de la basura se recupera… escuché otra opinión [dirigiéndose a otra alumna]. Vania ¿querrías compartir lo que encontraron?

Vania: Ah bueno, es que nosotros lo comparamos con otro año [un año anterior a 1970] y salió 0.08, entonces nosotros llegamos a la conclusión de que cada año se perdía el interés por reciclar y se generaba cada vez más basura.

El comentario de Vania es importante porque muestra que su equipo, para poder dar una interpretación a la fracción constituida por las funciones que representaban a los dos tipos de basura, trabajó con los resultados de otros años y pudo observar un patrón decreciente en los mismos.

De esta forma la categoría permite realizar un análisis sobre los conocimientos que los alumnos están usando, y que no necesariamente han sido adquiridos en el curso presente, sino que forman parte de su *cultura escolar*. También se observó que los alumnos de sexto año hicieron uso de conocimientos más variados en comparación a los de cuarto año; sin embargo, el estudio de los resultados obtenidos del trabajo de éstos últimos hizo de esta categoría una importante fuente de significados.

Lo relevante de analizar la movilización de conocimientos previos reside en las posibilidades de utilizar dicha información en beneficio de la enseñanza del estudiante. Es frecuente que el docente se ajuste a cubrir un contenido, y en ocasiones, al preguntarse el porqué del orden establecido en el programa, se atreva a generar cambios que considera de mayor provecho en el aprendizaje de sus alumnos. En Matemáticas la parte de Aritmética es un contenido que se trabaja antes de Álgebra, la pregunta sería ¿puede ser de otra forma? Los estudiantes han recibido cursos sobre Aritmética, y pocas veces se les explica que pueden servir para su comprensión del Álgebra, que los significados adquiridos los podrán usar en cursos posteriores, e incluso en otras disciplinas; entonces, considero que es posible confiar en que los alumnos cuentan con sus propios significados, tal vez la labor del docente pueda descentrarse para centrarse en el aprendizaje del alumno, el cual pueda ser motivado a construir su propio conocimiento.

La creencia de que los estudiantes comienzan un nuevo curso sin haber aprendido algo del anterior, tal vez implique que el docente no se interese en indagar si sus alumnos son capaces de aplicar conocimientos previos en las problemáticas planteadas en el curso actual; desde el “lente” que nos proporciona esta categoría es posible observar que los alumnos con los que se trabajó sí movilizan conocimientos previos. Ellos tienen sus propios significados de la fracción en

Aritmética, y al usar funciones pudieron establecer relaciones entre cantidades numéricas y su representación a través de símbolos algebraicos[16], estrategias que sirvieron para proporcionar las soluciones requeridas.

A continuación, es presentada la definición de *Contexto* como la segunda categoría de análisis.

4.1.2 Contexto del problema

Se consideró el contexto como una fuente de significados al corroborar, sobre todo en los alumnos de sexto año, que constituía una fuerte influencia en su perspectiva crítica hacia la problemática de la generación de basura.

El contexto del problema para este trabajo es definido como el entorno real en el que se pretende ubicar a la problemática. Para el *problema uno* de la secuencia el contexto es la basura generada y recuperada en un año, para *el dos* es la orgánica e inorgánica generada en la casa de un estudiante. Con esta categoría es analizado cómo el contexto contribuye a que el estudiante se apropie del problema y con ello genere posibles soluciones.

Dotar a un problema de un contexto cercano al alumno puede ayudar a que el estudiante no se sienta aislado. En una clase de Matemáticas constantemente se pregunta si lo que el maestro quiere que aprenda le va a servir o al menos lo va a utilizar en su vida práctica. Sadovsky (2005) en su libro *Enseñar Matemáticas hoy. Miradas sentidos y desafíos,* nos invita a dar un sentido diferente a la enseñanza de las Matemáticas, la autora nos lleva a reflexionar sobre abordar problemas que ella llama *problemas en serio,* es decir: “Cambiar los mecanismos aislados que algún día irían a ser útiles para abordar *problemas en serio…*” (p.10) y trabajar los *problemas en serio* ahora. Enfrentar al alumno con un problema que le tocará vivir, como el de la gran cantidad de basura generada y la poca reciclada, es un contexto

[16] Se hablará de esta relación en la categoría “El papel de las gráficas”.

que ayudó al estudiante a dar una interpretación a la fracción $\frac{\textit{Basura}\text{ recuperada}}{\textit{Basura}\text{ generada}}$ y propiciar o crear también un pensamiento crítico hacia los resultados obtenidos año tras año.

En el *diálogo uno* la estudiante 2 se mostró preocupada al realizar una comparación entre la cantidad de basura generada y la recuperada.

> E_2: Ajá, es que lo que estábamos platicando hace rato es que cada año se recupera menos basura pero se genera muchísimo más, para mí eso es lo importante, hicimos la división y fue de 0.04, y realmente para mí eso no tiene nada de importancia, bueno, para mí lo que fue más significativo fue eso, que cada vez se incrementa más y estamos generando más basura pero la reciclamos menos, para mí eso es lo que significa, pero para ella es una relación.

La alumna detectó que el resultado de la división es un valor pequeño, y aunque afirmó que “eso no tiene nada de importancia”, en realidad el *contexto del problema* la ayudó a comprender que debido a que la cantidad de basura generada es mayor que la recuperada, el cociente obtenido es menor que uno (0.04). Posiblemente no esté del todo consciente de haber dado una interpretación de la fracción algebraica como *razón*, pero lo hizo al establecer una relación entre el numerador y denominador de la fracción.

En el segundo diálogo la estudiante llamada Vania nos habló sobre los resultados de dividir la cantidad de basura recuperada entre la generada en dos diferentes años, y al comparar los resultados notó que hubo una disminución. Lo interesante es ver cómo la estudiante se apropió de la problemática e interpretó a la división y su patrón decreciente.

Se puede entonces usar esta categoría para confirmar que los problemas que involucran al alumno con su entorno pueden ser un factor determinante en el análisis e interpretación que realiza al obtener un resultado.

Es importante resaltar que el *contexto del problema* puede generar una relación dialéctica, ya que como se ha explicado con los anteriores diálogos, fue un apoyo para que el estudiante validara sus resultados al confrontarse con la realidad que se deriva del contexto en la primera parte del *problema uno* de la secuencia. En otra parte de la secuencia, segunda parte del *problema uno*, en la que las funciones representaban a la basura orgánica y a la inorgánica generada en la casa de un estudiante, el contexto similar al primer problema indujo la misma interpretación para el cociente $\frac{r(t)}{g(t)} = \frac{Basura \text{ orgánica}}{Basura \text{ inorgánica}}$, pues para algunos equipos fue también la de porcentaje. Los alumnos no notaron que la basura inorgánica no podía representar al *todo* (el 100%) y la orgánica una parte (la orgánica no es una parte de la inorgánica), así que el significado de la fracción como porcentaje no era posible ajustarlo a este caso.

A continuación, en el ejemplo dos, se mostrarán las respuestas de dos equipos de cuarto año a la siguiente pregunta de la secuencia:

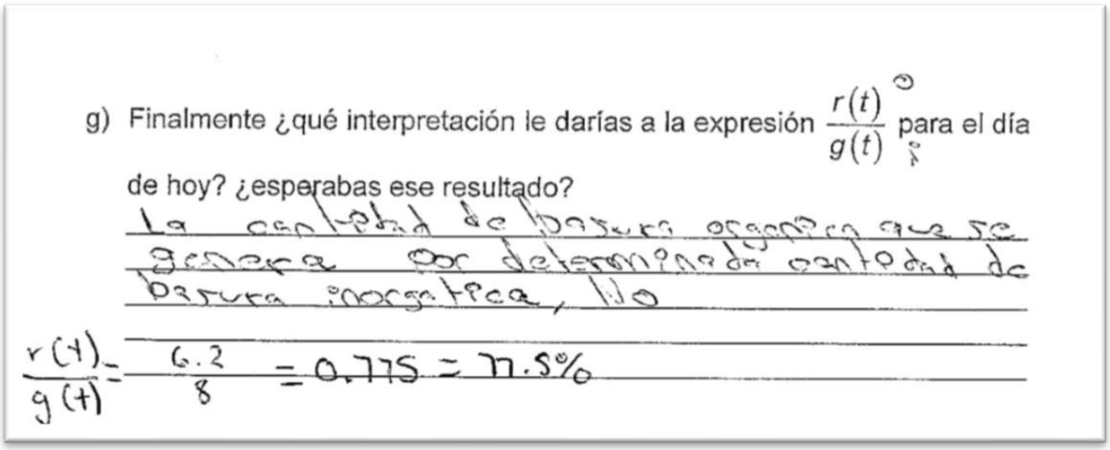
a) Finalmente ¿qué interpretación le darías a la expresión $\frac{r(t)}{g(t)}$ para el día de hoy? ¿esperabas ese resultado?

Donde la función $r(t)$ representa a la basura orgánica y la $g(t)$ a la inorgánica.

En la figura 4.2 se muestra la respuesta en la que los estudiantes usan el significado de *parte-todo* y en la figura 4.3 la de *razón,* en la cual se puede observar la relación que los alumnos detectaron entre los dos tipos de basura.

Ejemplo 2

En la figura 4.2 de la página 115, el equipo usó el significado de la fracción como parte-todo. Es posible que la notación para la basura orgánica $r(t)$ o para la inorgánica $g(t)$ haya sido la causa de esta confusión ya que, al trabajar previamente con la basura generada y recuperada, los alumnos trataron de adaptar la misma teoría al contexto de la basura orgánica e inorgánica. Matz (1980) explica en su proceso de *extrapolación* cómo uno de los errores que cometen los alumnos es tratar de resolver una problemática con las herramientas usadas en otra diferente.



g) Finalmente ¿qué interpretación le darías a la expresión $\frac{r(t)}{g(t)}$ para el día de hoy? ¿esperabas ese resultado?

La cantidad de basura orgánica que se genera por determinada cantidad de basura inorgánica, No

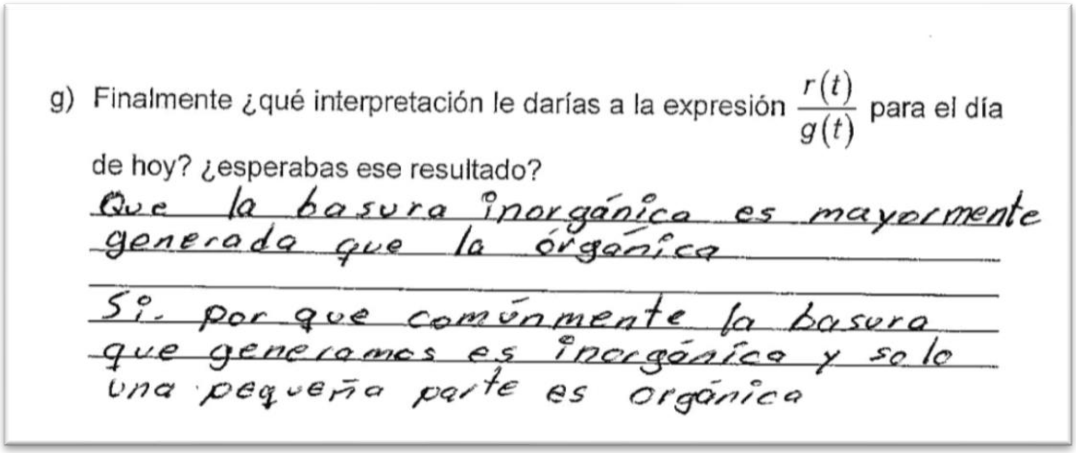
$\frac{r(t)}{g(t)} = \frac{6.2}{8} = 0.775 = 77.5\%$

Figura 4.2 Interpretación inadecuada a la fracción como parte-todo

En esta misma imagen la palabra "No" es la respuesta a la pregunta "¿esperabas ese resultado?", aunque el equipo no fue más específico, es muy probable que esperaban un resultado parecido al del cociente de la basura recuperada y la generada (0.04), para este equipo el contexto resultó un obstáculo para su interpretación.

En la respuesta mostrada en la figura 4.3 (p. 117) el equipo estableció una relación entre las cantidades de basura: "inorgánica es mayormente generada que la orgánica". Se nota que el equipo *comparó* a la basura orgánica con la inorgánica y por lo tanto usó el significado de razón, sin embargo, en la respuesta a la pregunta ¿esperabas ese resultado?

La frase "sólo una pequeña parte" sugiere el uso del significado *parte-todo.*



g) Finalmente ¿qué interpretación le darías a la expresión $\frac{r(t)}{g(t)}$ para el día de hoy? ¿esperabas ese resultado?

Que la basura inorgánica es mayormente generada que la orgánica

Si. por que comúnmente la basura que generamos es inorgánica y solo una pequeña parte es orgánica

Figura 4.3 Interpretación de fracción como razón

Entonces ¿influye el contexto en las respuestas de los alumnos? Se considera que sí.

Para finalizar esta categoría es importante mencionar que en la introducción de este capítulo se especificó que el tema de funciones era un requisito para la resolución de la secuencia, por lo que se procuró que los grupos con los que se trabajó ya lo hubieran visto. Al situar a la problemática en un contexto que los alumnos conocieran o hubieran escuchado al respecto, se pudo observar como ellos se contextualizaron y la respuesta al primer inciso "calcula la cantidad de basura recuperada y generada en 1970" fue contestada por la mayoría de los equipos, demostrando así que ante un tema complicado como el de funciones el contexto ayudó a facilitar la comprensión del problema.

Es posible entonces suponer que el contexto establecido en el problema puede ayudar a dar una interpretación de la fracción algebraica, pero en algunas ocasiones también puede resultar un obstáculo, pues puede confundir al estudiante.

4.1.3 El papel de las gráficas

Se considera que el *papel de las gráficas* es otra fuente importante de significados. Los estudiantes han trabajado en clase o cursos anteriores con las gráficas de la línea recta y la parábola, se puede suponer que le son conocidas, al interpretarlas usan esta información para establecer un modelo. Ellos están adaptando la teoría sobre funciones vistas anteriormente, y la obtención del modelo surge a partir de los conocimientos movilizados en el estudiante al observar los datos graficados.

En una parte de la aplicación de la secuencia, fue proporcionado al grupo una serie de 5 datos que representan la cantidad de basura generada durante cinco días en la casa de un estudiante, ver figuras 4.4 y 4.5, posteriormente se les pidió a los equipos que anotaran esta información (número de día-cantidad de basura) en una tabla y graficaran estos datos. El objetivo fue que el alumno tuviera dos representaciones del fenómeno, la tabla con los datos y la gráfica, para poder deducir el modelo algebraico que describiera tal comportamiento.

Día de la semana (t)(días)	Peso de la basura orgánica r(t) (Kilogramos)
1	1
2	2
3	3.2
4	4.2
5	5.2

Figura 4.4 Tabla de valores

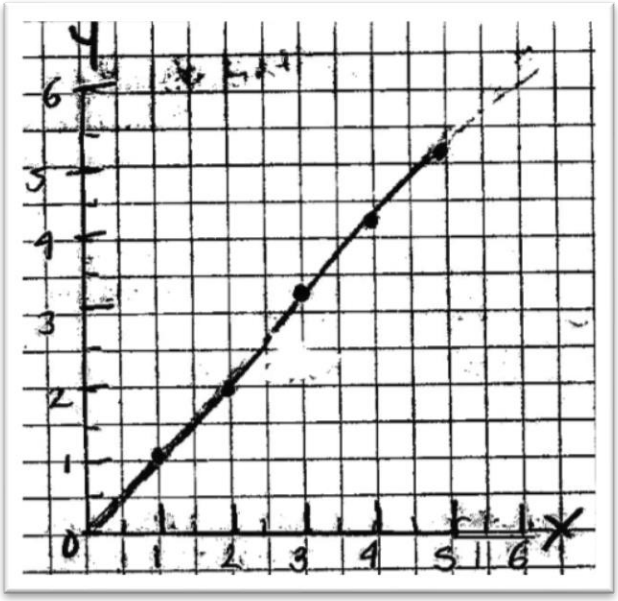


Figura 4.5. Gráfica basura orgánica

De lo anterior es posible observar que cuando el equipo trabajó con la tabla empezó a detectar patrones de comportamiento que relacionaron con la gráfica de estos datos. Casi todos los equipos trataron de obtener el modelo algebraico de una recta, debido seguramente al tema de función lineal que ellos habían visto en clases anteriores. Lo anterior lleva a considerar al proceso de graficación como una fuente de significados, en el que el alumno relaciona la información obtenida de la gráfica con teorías vistas previamente.

El papel de las gráficas es analizado dentro del marco teórico de la modelización intramatemática, es decir, “la producción de conocimiento de un sistema matemático a través de otro sistema, también matemático” (Chevallard citado por Sadovsky, 2005, p.27). Esta es la razón por la que es definido como la habilidad que el estudiante presenta al relacionar representaciones como la gráfica y tabla de valores para poder deducir el modelo algebraico.

Esta tercera categoría de análisis ayudará a conocer el proceso en que el estudiante utiliza la representación gráfica y los datos recolectados como dos tipos de representaciones, que le sirven para generar conjeturas acerca del tipo de modelo que puede obtener.

Durante el estudio piloto se pidió a los estudiantes de sexto año que recolectaran datos de la basura orgánica e inorgánica generada en la casa de uno de ellos durante 5 días. Se eligió una colección de datos[17] que fueron proporcionados a los alumnos de cuarto año en el estudio definitivo. El objetivo fue que graficaran los datos, considerando el tiempo (en días) y la cantidad de basura orgánica (en kilogramos) en un plano cartesiano, posteriormente, el tiempo y basura inorgánica en otro. Con los puntos graficados los alumnos obtendrían un modelo algebraico que se ajustaría a estos puntos.

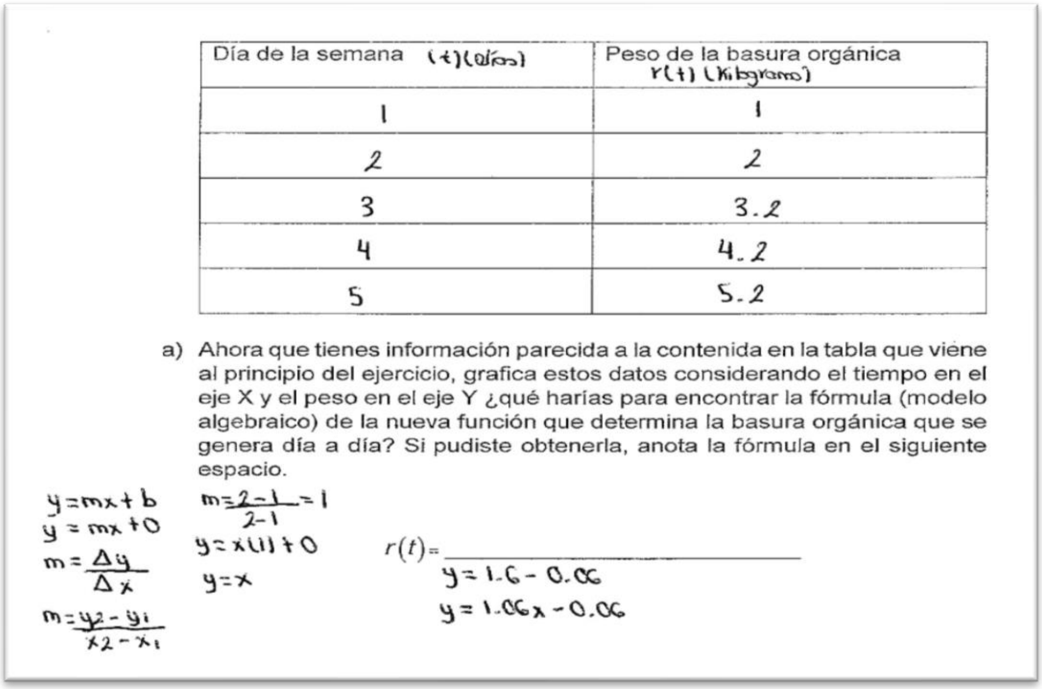
La parte inicial del trabajo fue realizada en el aula de clase, una primera observación mostró que los equipos trataron de encontrar el modelo algebraico de una línea recta. Después en la sala de cómputo los estudiantes hicieron uso del software GeoGebra y determinaron el modelo que más se ajustó a los puntos graficados.

El siguiente ejemplo muestra el trabajo de tres equipos donde los alumnos establecieron un modelo de línea recta, tema que se trabajó en clases anteriores con su profesor titular.

Ejemplo 3

La figura 4.6 muestra cómo el equipo relacionó la hoja de cálculo de los datos recolectados y la obtención del modelo algebraico usando el método de pendiente (m) y ordenada al origen (b), dando como resultado la expresión $y = x$. En la misma figura también aparece el modelo obtenido usando la computadora, ya que los equipos posteriormente trabajaron en la sala de cómputo con la misma actividad.

[17] La elección de estos datos se detalla en el capítulo 3 de Metodología.



Día de la semana (t)(días)	Peso de la basura orgánica r(t) (Kilogramo)
1	1
2	2
3	3.2
4	4.2
5	5.2

a) Ahora que tienes información parecida a la contenida en la tabla que viene al principio del ejercicio, grafica estos datos considerando el tiempo en el eje X y el peso en el eje Y ¿qué harías para encontrar la fórmula (modelo algebraico) de la nueva función que determina la basura orgánica que se genera día a día? Si pudiste obtenerla, anota la fórmula en el siguiente espacio.

$y = mx + b$

$y = mx + 0$

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m = \frac{2-1}{2-1} = 1$

$y = x(1) + 0$

$y = x$

$r(t) =$

$y = 1.6 - 0.06$

$y = 1.06x - 0.06$

Figura 4.6. Obtención del modelo lineal usando pendiente y ordenada al origen

Como el grupo había visto en clase problemas de modelización matemática que involucraban la gráfica de una línea recta, el equipo consultó sus notas y obtuvo el modelo $y = x$, sin embargo, manifestaron desconcierto al ver que no todos los datos (día 2 y 3) podían calcularse usando esta fórmula. Ellos observaron un incremento en la cantidad de basura de 1 kilogramo cada día, excepto el aumento del día dos al día tres.

La figura 4.7 muestra una fotografía de la pantalla de la computadora, donde aparece el modelo obtenido usando la herramienta de regresión de dos variables: $y = 1.6x - 0.06$

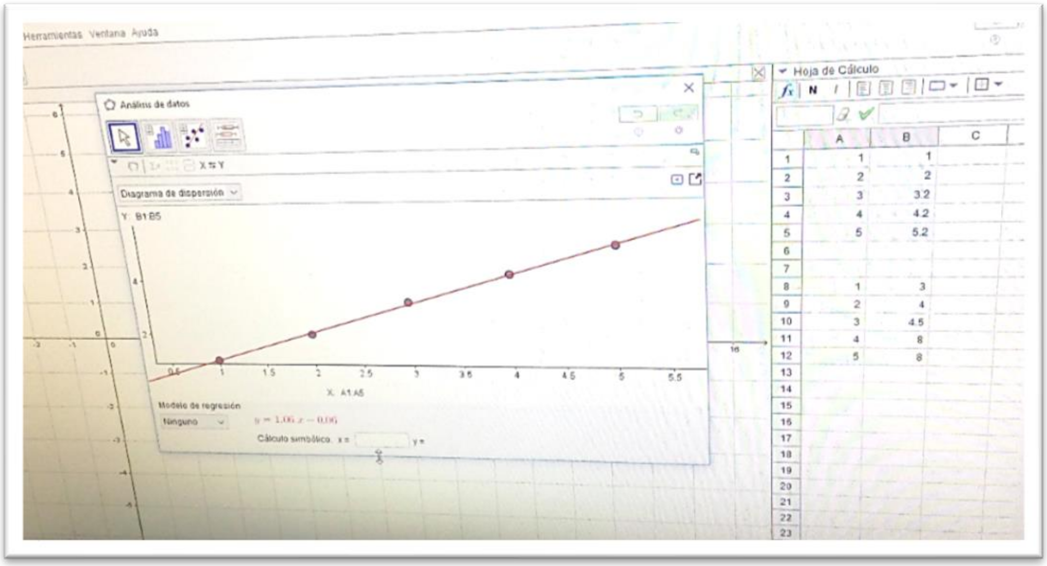


Figura 4.7. Pantalla de computadora

En la figura 4.7 se aprecia el uso de la hoja de cálculo y la herramienta de análisis de datos para obtener el modelo algebraico.

Es entonces observable cómo los estudiantes usan los conocimientos sobre la gráfica de una línea recta para encontrar el modelo que se ajuste a sus datos.

Finalmente, presento la transcripción de un diálogo en donde es posible apreciar cómo los alumnos establecieron el significado de las variables x y y con los valores del tiempo en días, y la cantidad de basura en kilogramos, respectivamente. El uso de la computadora abrió un panorama hacia otro tipo de funciones, sin embargo, nunca se perdió el significado de las variables.

E_1: Lo que hicimos es irnos igual a graficar la tabla de valores en la hoja de cálculo, ya pusimos los datos que tenemos, este, ya nuestra duda era que si esto que tenemos que hacer es en polinomio ¿verdad?

M: Pueden hacerlo en polinomio de segundo grado o en uno de primer grado, es decir, línea recta

E_1: Ah, lineal y ya con los valores me fue dando lo que tenía que ser y la función se modificó un poco y ahora es $y = 1.6x - 0.06$

M: Esa sería la nueva función, pero yo observo en la pantalla que utilizaron x y y, entonces, como que necesitan decirme que es x en este caso.

E_1: Ah sí. En la hoja de cálculo de Excel como nada más estamos haciendo una prueba para ver si lo que hicimos estaba bien, no lo especificamos, pero sí lo entendimos.

M: ¿Pero qué sería la x ? ¿cómo lo interpretaron?

E_1: La x es el tiempo y la y sería la basura.

M: [Dirigiéndose a otro compañero del equipo] en tu caso, estás utilizando la herramienta de regresión.

E_2: Sí, para ver si es una potencia o exponencial…

M: Vean que fórmulas tan diferentes aparecen en la pantalla, pero ¿qué es lo que buscas?

E_2: Pues que analice dos variables.

M: Ok utilizaste la herramienta de regresión porque ya la habían visto con el profesor.

E_2: Ajá.

M: Pero ¿qué modelo elegirías? Porque ya probaste con el exponencial, con el de potencia ¿con cuál te vas a quedar?, tus compañeros utilizaron la lineal, tú estás probando con otros, lo cual me parece muy interesante.

E_2: Pues solamente es la prueba porque dijeron que ellos iban a ver una forma y yo otra, ahorita vamos a ver con cuál nos vamos a quedar.

M: ¿Sí? O sea que ¿no hay mucha diferencia?

E_2: Estoy checando a ver si puede haber un resultado diferente [señalando la tabla de valores].

M: Muy bien chicos, todos estos resultados vayan anotándolos en la secuencia, gracias.

Los estudiantes comienzan a graficar desde sus cursos en secundaria (12 a 15 años) pero se observa desde la práctica docente de la tesista que, muy difícilmente pueden imaginar que la variable equis, ubicada en el eje de las abscisas, pueda representar al tiempo u otra magnitud, y que se pueda establecer entre la ordenada y la abscisa una relación que cobre significado por la forma de la recta o la parábola que se dibuje en el plano cartesiano.

Cuando los equipos graficaron en sus cuadernos o mediante la computadora se pudo apreciar una apropiación de conocimiento. En ambas poblaciones (alumnos de sexto y cuarto año) se han tenido experiencias previas con el proceso de graficar, y en la secuencia los alumnos esperaban que los datos se ajustaran a una función conocida, las reflexiones derivadas de este trabajo son una importante sección para analizar. El papel de las gráficas en el aprendizaje del estudiante posiblemente se fundamente en el hecho de trabajar con parejas ordenadas, cuyas entradas son valores de números reales que el alumno interpreta, y esto la convierte en la tercera fuente de significados y la categoría que complete nuestro análisis.

4.2 Análisis a posteriori

A continuación, se presenta una tabla que resume los resultados principales obtenidos durante el estudio piloto y el definitivo. Posteriormente se muestran breves descripciones de la secuencia didáctica para tener una visión más fresca sobre la problemática planteada al alumno.

Movilización de conocimientos previos	*Contexto del problema*	*El papel de las gráficas*
Significado de la fracción como parte-todo y como porcentaje.	Significado de las variables que intervienen en el problema: t, $G(t)$, $R(t)$, $g(t)$ y $r(t)$ como tiempo, cantidad de basura generada, recuperada, inorgánica y orgánica.	Relación de la gráfica de una recta con su modelo algebraico $Y = mx + b$.
La variable en una relación funcional.	Interpretación del resultado de evaluar a una función polinómica al asignarle unidades a la respuesta.	Interpretación del punto de intersección de las gráficas como “la misma producción de basura”.
Interpretación del denominador nulo en una función racional.	Discurso formal (contextualizado) en las respuestas.	Interpretación de la gráfica de una función por “encima de la otra” como una producción mayor de un tipo de basura.

		Obtención de una fracción diferente de la unidad cuando el numerador y denominador son distintos (las gráficas no se intersecan).
		La función que representa el denominador de una función racional puede asumir el valor de cero.

El análisis a posteriori utiliza como apoyo los resultados que se esperaban (análisis previo) y los que se obtuvieron en las producciones obtenidas por parte de los estudiantes en la aplicación de la secuencia durante el estudio piloto y el definitivo.

Para poder dar mayor claridad a esta sección del documento es descrita de forma breve la estructura de la secuencia[18], y aunque los resultados analizados no necesariamente se encuentran en el orden de las sesiones en el aula de clases, sí corresponden al orden en que se definieron las categorías, y la descripción facilita ver en qué parte de la aplicación de la secuencia se presentaron.

Primera parte de la secuencia. En esta parte el objetivo es que el alumno experimente y se familiarice con el uso de dos funciones cuadráticas: $R(t)$ y $G(t)$ para poder dar una interpretación a la fracción algebraica formada por estas dos funciones como numerador y denominador respectivamente $\frac{R(t)}{G(t)}$.

[18] Ver en anexos la secuencia completa.

Segunda parte de la secuencia. En la segunda parte los alumnos recolectan una serie de datos sobre la basura orgánica e inorgánica, posteriormente tienen que determinar los modelos algebraicos que describen el comportamiento de las gráficas de esos datos para interpretar nuevamente la fracción constituida por ambas funciones.

Tercera parte de la secuencia. En la tercera parte se les proporciona a los alumnos dos funciones, modelos algebraicos propuestos por la autora de este documento. Para una mayor comprensión es transcrita esta parte de la secuencia:

> Los compañeros de un equipo obtuvieron la siguiente expresión: $\dfrac{r(t)}{g(t)}=\dfrac{3t-3}{t^2-t}$
>
> La función $r(t)=3t-3$ representa la basura orgánica (en kilogramos) y $g(t)=t^2-t$ la inorgánica (en kilogramos), igual que con el problema inicial, t representa el tiempo, pero en días.
>
> Vamos a usar una notación más simplificada y llamaremos a la fracción obtenida $f(t)=\dfrac{3t-3}{t^2-t}$, esta es la función con la cual trabajaremos.

Se pidió a los alumnos interpretar lo que ocurre con esta función cuando el denominador asume un valor de cero para un valor específico del tiempo.

Después de estas breves descripciones es posible comenzar el análisis abordando la categoría que se considere más importante por ser la que directamente contesta la pregunta de investigación, pero las otras dos también aportaron información relevante que sirvió para englobar resultados finales.

4.2.1. Movilización de conocimientos sobre fracciones aritméticas

Uno de los objetivos principales de esta tesis es el conocer la movilización de conocimientos que los alumnos tienen sobre la fracción aritmética. En el análisis previo se supuso que el significado de la fracción como *parte-todo* sería el utilizado para poder interpretar a la fracción algebraica. Se determinó el uso de diferentes conocimientos sobre aritmética, los estudiantes recurrieron a significados de la fracción como *razón* o *porcentaje*, además usaron lo aprendido en el tema de funciones al poder establecer una relación entre las variables de tiempo y peso de la basura, lo anterior se considera relevante pues representa un excelente ejemplo del uso de la literal como variable, esto es trabajado con la última categoría.

En la *primera parte de la secuencia* se procuró que el alumno comprendiera la problemática de la basura generada y recuperada de un país con la incorporación de una tabla en donde se muestran los valores de las cantidades de basura en los años de 1960,1961 y 1962.

La tabla 1 muestra dichos valores.

Año	t	Basura recuperada en millones de toneladas $R(t)=0.04t^2-0.59t+7.42$	Basura generada en millones de toneladas $G(t)=0.04t^2+2.34t+90$
1960	0	$R(0)=0.04(0)^2-0.59(0)+7.42=7.42$	$G(0)=0.04(0)^2+2.34(0)+90=90$
1961	1	$R(1)=0.04(1)^2-0.59(1)+7.42=6.87$	$G(1)=0.04(1)^2+2.34(1)+90=92.38$
1962	2	$R(2)=0.04(2)^2-0.59(2)+7.42=6.4$	$G(2)=0.04(2)^2+2.34(2)+90=94.84$
…		Y así sucesivamente	

Tabla 1. Valores de la basura cada año

En el análisis previo se estimó que la tabla 1 serviría para que los estudiantes reconocieran la notación de funciones y observaran el proceso de evaluar una función. Se esperaba que esto contribuyera a movilizar conocimientos previos en el alumno, así como ayudarlo a proporcionar la **interpretación** de la fracción generada por el cociente entre la basura recuperada y la generada $\frac{R(t)}{G(t)}$ en el año de 1970.

Si utilizas los resultados obtenidos para 1970 ¿qué representa la expresión $\frac{R(t)}{G(t)}$? es decir, ¿qué interpretación o significado tendría para ti, el resultado de la fracción obtenida? Escribe tu respuesta en el siguiente espacio.

Al principio los integrantes de los equipos se mostraron confusos, entonces la maestra (tesista) sugirió usar los resultados de la tabla para otros años, esto logró que algunos equipos usaran el concepto de *promedio* y/o el de *media.* En la siguiente transcripción del diálogo de un equipo de sexto año aparece la palabra *promedio* como la interpretación que se le da a la fracción, lo que significa que el estudiante relacionó los valores de los dos tipos de basura.

E_1: [Comienza leyendo el enunciado del problema].

E_2: Vamos a dividir el resultado de $R(t)$ entre $G(t)$.

E_3: La recuperada sobre la generada.

E_2: Ajá, sería como la media ¿no?

E_3: Sería más bien como la resultante.

E_2: La diferencia ¿no?

E_3: ¿Cuál era la pregunta?

E_1: ¿Qué interpretación o significado tendría el resultado de la fracción obtenida?

E_3: Haz de cuenta que tienes la generada… si lo divides sería como lo que en verdad…

E_2: Ajá, lo que en promedio se genera al día, no, por años.

[risitas]

Se puede observar la confusión de los integrantes y claro, su esfuerzo por responder.

El diálogo de un segundo equipo también de sexto año muestra que usaron el significado de la fracción como *parte-todo,* pero convirtieron el resultado de una expresión decimal a una con porcentajes. Las opiniones de los integrantes se transcriben a continuación.

E_1: Para nosotros fue como lo que se recupera por cada millón de tonelada de basura generada.

E_2: Que no es suficiente comparado con lo que se genera.

E_3: Porcentaje de lo que se recupera ¿no?

E_4: Sí, es el porcentaje pues el denominador de esa división, el 117.4 es el 100%, y el resultado de 0.04, si recorremos el punto lo convertimos en el 4% de la basura que se recupera.

En la frase "lo que se recupera por cada millón de tonelada" se observa que el equipo está usando el significado de la fracción como *parte-todo* que era lo esperado. El uso del concepto de *porcentaje*, aunque no se esperaba, pudo haber surgido del valor en decimales del cociente (0.04). Posiblemente los estudiantes relacionaron esta escritura con un porcentaje por ser un valor muy pequeño.

Ahora se mostrará la transcripción de un diálogo entre los integrantes de un equipo de cuarto año respecto a la interpretación de la fracción $\frac{R(t)}{G(t)}$, en ella los alumnos usaron el significado de la fracción como *parte-todo*.

E_1: Yo siento que puede representar el estimado de la basura que no se puede reciclar, o sea que no es apta para reciclaje.

E_2: Sí, yo pienso lo mismo, que es la basura que se genera y que no es apta para el reciclaje, es decir, cada que aumenta la basura que se genera se disminuye la basura que es apta para el reciclaje, y entonces intuimos que el resultado de la operación es la basura que no es apta para ser reciclada.

M: Ah ok.

E_1: No, lo estamos viendo al revés, lo que de verdad puede representar esta cifra es el número de basura que se puede reciclar porque es un número muy pequeño, entonces si aumenta el número de basura que se genera y disminuye la que se puede recuperar.

E_2: [Interrumpiendo] disminuye muchísimo más la que se puede reciclar.

E_1: Eso es este número, porque mira aquí [señalando la tabla 1 de valores] va aumentando este número y este va disminuyendo, entonces yo pienso que eso sería.

M: ¿Tú eres Melani? [dirigiéndose a la E_3] ¿qué opinas Melani de lo que comentan tus compañeros?

E_3: Pues sí, de hecho, yo di la idea de que podría ser la basura que no se puede reciclar, pero ahorita como mi compañero está diciendo, como es muy pequeña la cantidad, significa que es la basura que sí puede ser reciclada.

M: La reciclada, entonces cómo lo manejaríamos ¿0.04millones de toneladas de basura recuperada?

E_1: Puede ser la que se puede reciclar de la estimada, por ejemplo, nosotros tenemos 117.4 y de esos 117.4 sólo el 0.04 millones se puede reciclar.

M: Ah ya, dijiste algo que llama mi atención, de esos 117.4 sólo el 0.04 se recupera.

E_1: Ajá, lo que nosotros estimamos.

M: Sí, me queda claro, gracias.

Al principio mencionan que se trata de la cantidad de basura que no se puede reciclar y después de observar la tabla corrigen, así que se puede observar: la tabla sirvió para que el estudiante detectara el patrón de comportamiento de las funciones cuadráticas dentro de un contexto real o más cercano al entorno del alumno; los resultados obtenidos al evaluar las funciones (el 117.4 millones de toneladas de basura generada y el 5.52 millones de toneladas de recuperada) ayudaron a la interpretación de la fracción como razón y porcentaje, significados que no se esperaban.

A continuación, se muestra la respuesta a la interpretación del cociente entre la basura orgánica e inorgánica que aparece en la segunda parte de la secuencia.

La figura 4.8 muestra la respuesta a la interpretación de la fracción que el equipo dio en la segunda parte de la secuencia al trabajar con los modelos obtenidos de la basura orgánica $r(t)$ y la inorgánica $g(t)$.

g) Finalmente ¿qué interpretación le darías a la expresión $\frac{r(t)}{g(t)}$ para el día de hoy? ¿esperabas ese resultado?

Que por cada 6.42 kg de basura orgánica, se generan 9.7 kg o casi el doble de basura inorgánica, o visto de otra perspectiva, por cada 100% de basura generada inorgánica, sólo el 66.1 %. es / será basura orgánica.

Figura 4.8. Fracción orgánica e inorgánica

La respuesta que aparece en la figura 4.8 resulta interesante e importante porque los integrantes del equipo ya no utilizan el significado de *parte-todo*, sino el de *razón* de acuerdo con Llinares (2003). El equipo al escribir que se genera "casi el doble de basura inorgánica…" establece una comparación entre estas dos cantidades. Lamentablemente al hablar sobre porcentajes, seguramente influenciado por la primera parte de la secuencia, el equipo utiliza a la basura inorgánica como el todo y a la orgánica como una parte de ella.

En el grupo de cuarto año se formaron 14 equipos de tres integrantes, para esta segunda parte de la secuencia sólo dos equipos pudieron dar la interpretación de fracción como *razón*, el resto uso la de *parte-todo.* Se considera que el motivo se deriva de la tendencia a adaptar procesos de solución de *problemas tipo* a los que sean similares (Matz, 1980).

En la tercera parte de la secuencia se trabajó con la *imposibilidad de la división entre cero*, los alumnos de cuarto año recibieron los modelos algebraicos de las funciones que representaban a la basura orgánica e inorgánica, y se les pidió que evaluaran a la función racional formada por el cociente de estas dos funciones $f(t)=\frac{r(t)}{g(t)}=\frac{3t-3}{t^2-t}$ con diferentes valores para *t*. Entre los resultados obtenidos se presentó el caso del denominador nulo, para $t=0$ y $t=1$.

$$f(t=0)=\frac{3(0)-3}{(0)^2-(0)}=\frac{-3}{0} \qquad \text{y} \qquad f(t=1)=\frac{3(1)-3}{(1)^2-(1)}=\frac{0}{0}$$

Resulta interesante observar cómo los equipos sustituyen el valor del tiempo sin dar una interpretación a su respuesta, ya que expresiones de la forma $\frac{-3}{0}$ para algunos equipos no tiene una solución concreta, pero en el caso de $\frac{0}{0}$ la mayoría de los equipos escribió cero como respuesta de esta expresión, ver figura 4.9 en la siguiente página.

La función $r(t) = 3t - 3$ representa la basura orgánica (en kilogramos) y $g(t) = t^2 - t$ la inorgánica (en kilogramos), igual que con el problema inicial, t representa el tiempo, pero en días. Vamos a usar una notación más simplificada y llamaremos a la fracción obtenida $f(t) = \frac{3t-3}{t^2-t}$, esta es la función con la cual trabajaremos.

a) Completa la siguiente tabla, observa el ejemplo cuando $t = 2$.

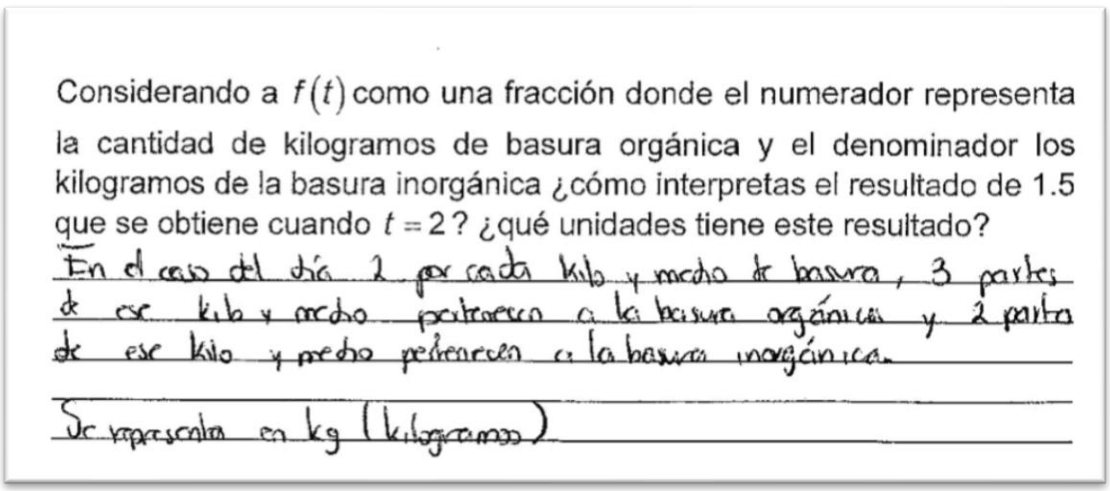
t (*días*)	$f(t) = \frac{3t-3}{t^2-t}$ (kilogramos)	
0	$f(0) = \frac{3(0)-3}{3^2-3} = \frac{0-3}{9-3} \neq f(0) = \frac{3(0)-3}{0^2-0} = \frac{0-3}{0-0} = \frac{-3}{0}$	$= \frac{-3}{0}$ kg
0.5	$f(0.5) = \frac{3(0.5)-3}{(0.5)^2-0.5} = \frac{1.5-3}{0.25-0.5} = \frac{-1.5}{-0.25} = 6$	$= 6$ kg
1	$f(1) = \frac{3(1)-3}{(1)^2-1} = \frac{3-3}{1-1} = \frac{0}{0} = 0$	$= 0$ kg
2	$f(2) = \frac{3(2)-3}{(2)^2-(2)} = \frac{6-3}{4-2} = \frac{3}{2} = 1.5$	$= 1.5$ kg
3	$f(3) = \frac{3(3)-3}{(3)^2-3} = \frac{9-3}{9-3} = \frac{6}{6} = 1$	$= 1$ kg

Figura 4.9. División entre cero

Por fuera de la tabla aparecen las respuestas concretas de las evaluaciones pedidas. En el primer renglón vuelve aparecer la expresión $\frac{-3}{0}$ junto con las unidades de kilogramo. Hasta este momento el alumno ha realizado el llenado de la tabla, pero es posible que también estuviera intentando interpretar lo que significa dicho resultado, sin embargo, ¿estaría consciente de que no puede haber un resultado negativo como el -3? En la otra respuesta, $\frac{0}{0} = 0$ ¿podría ser que el equipo interpretara que no hay producción de basura orgánica ni inorgánica, y por lo tanto no hay basura?

Es muy común que los alumnos se confundan con expresiones en donde el denominador de una fracción es cero, ya que la mayoría tiene como conocimientos previos que para una fracción $\frac{p}{q}$, q representa el *número de partes* en que se divide al *todo* y p el número de esas partes a considerar. Así pues, para la expresión $\frac{-3}{0}$ el denominador nulo implicaría que el todo se divide en ¡cero partes!

Para poder aclarar un poco más el proceso de razonamiento que siguió este equipo se procederá a analizar la siguiente pregunta (figura 4.10).



Considerando a $f(t)$ como una fracción donde el numerador representa la cantidad de kilogramos de basura orgánica y el denominador los kilogramos de la basura inorgánica ¿cómo interpretas el resultado de 1.5 que se obtiene cuando $t = 2$? ¿qué unidades tiene este resultado?

En el caso del día 2 por cada kilo y medio de basura, 3 partes de ese kilo y medio pertenecen a la basura orgánica y 2 partes de ese kilo y medio pertenecen a la basura inorgánica.

Se representa en kg (kilogramos)

Figura4.10. Fracción como razón

Las preguntas de la figura 4.10 se refieren a la evaluación de la función $f(t) = \frac{3t-3}{t^2-t}$ en el tiempo $t = 2$. Las operaciones se transcriben a continuación.

$$f(2) = \frac{3(2)-3}{(2)^2-(2)} = \frac{6-3}{4-2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

Los integrantes interpretan el *todo* como 1.5 kilogramos, y hablan de la fracción $\frac{3}{2}$ dando un significado de razón ya que establecen "tres partes de ese kilo y medio" como basura orgánica y dos partes como inorgánica. Así, en los resultados de $\frac{-3}{0}$ se podría afirmar que sí estaban interpretando, como lo hicieron con el resultado de $\frac{3}{2}$, pero hubo confusión ante un numerador negativo y un denominador nulo.

Sadovsky (2005) al referirse a una fase de un problema de modelización establece que el alumno adapta la teoría o conocimientos que posee para resolver una problemática planteada; en el caso de esta tercera parte de la secuencia, los estudiantes utilizaron los conocimientos adquiridos al resolver la primera y segunda parte para resolver la última. Aunque sólo se les pidió llenar la tabla, en las secuencias impresas, las respuestas de los equipos llevaban como unidades a los kilogramos. Podría ser que se ajustaran a lo observado en las anteriores partes de la secuencia y estuvieran tratando de interpretar y *validar* sus resultados.

El presente análisis concluye con la pregunta en la que directamente se interroga sobre la imposibilidad de la división entre cero.

En la figura 4.11 en la siguiente página, se puede ver la respuesta del mismo equipo sobre su interpretación del caso en que la función que aparece en el denominador asume un valor de cero para un tiempo dado.

e) Para las funciones como, $f(t)$ llamadas funciones racionales, es importante *vigilar* que su denominador (en este caso $g(t) = t^2 - t$) nunca resulte igual a cero. Regresa a la tabla que completaste ¿hay algún valor del tiempo para el cual el denominador sea igual a cero? ¿qué significa que el denominador valga cero? Es decir, si $g(t) = 0$ ¿cómo lo interpretas?

Si, por que no hay basura inorganica generada y su interpretacion dariamos con nds para esto.

f) Cuando el denominador de la función racional $f(t)$ vale cero ¿cómo interpretas el resultado de la fracción?

Que el valor está /será indefinido.

Figura 4.11. División entre cero

Después que los equipos estuvieron trabajando con este tipo de resultados (expresiones con cero en el denominador), pudieron conjeturar que el denominador sí podía ser cero porque eso significaría que no habría basura inorgánica generada ese día, pero se requirió la discusión en grupo con la profesora cuando se trató de dar una interpretación a la función racional cuyo denominador vale cero.

Para explicar esta indefinición (función racional con denominador cero) se usó la gráfica de la función racional realizada con GeoGebra (ver figura 4.12), en la que **no** aparece el *punto problema*[19], pero sirvió para que el alumno comprobara una limitante de este programa. En la figura 4.12 cuando $t = 1$ la función $f(t)$ no está definida, ya que $f(1) = \frac{3(1)-3}{(1)^2-(1)} = \frac{3-3}{1-1} = \frac{0}{0}$ pero al graficarla en GeoGebra la

[19] Punto donde la función no está definida. Para la función racional de este caso, cuando el denominador vale cero.

curva no presenta ninguna discontinuidad, sin embargo, en la vista algebraica el punto aparece como *indefinido.*

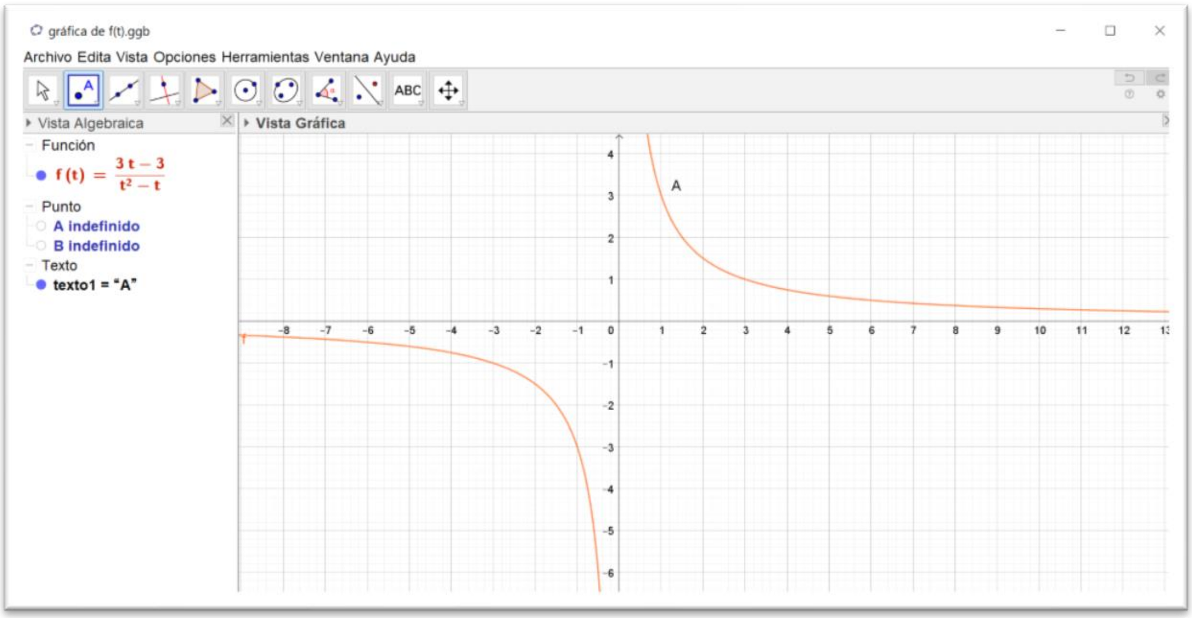


Figura 4.12. Función racional

El concepto de la división entre cero se puede abordar desde una perspectiva intramatemática, pues se requiere de significados de la fracción, del concepto de cociente de una división o de diferentes representaciones de este fenómeno como lo fueron las gráficas y la hoja de cálculo, para que el alumno a través de estos sistemas matemáticos pueda establecer relaciones entre las variables que intervienen y adquirir un aprendizaje que tenga significado. Seguirá siendo un reto para el docente poder llevarlo a la mesa de discusión en el aula, pero es una de las responsabilidades adquiridas como maestros de Matemáticas.

Es importante percatarse de que los alumnos cuentan con conocimientos previos adquiridos en su trayectoria escolar, y que para el profesor sería de mayor utilidad aprovechar lo que ellos saben y *afinar* (reestructurar, corregir o formalizar) dichos conocimientos. Los aprendizajes que los estudiantes tienen ya son significativos, representan un objetivo logrado: la interpretación que le dieron al momento de recibir la clase. No siempre lo que el docente quiere que aprendan es lo que ellos van a aprender y no siempre lo que el maestro quiere que *miren* es lo que ellos van a *mirar.*

Ahora se continuará con el análisis usando la siguiente categoría: Contexto.

4.2.2 Contexto del problema

La realización de esta secuencia se hizo en función de diseñar un problema que utilizara modelización desde la perspectiva de Sadovsky (2005), en la que se sugiere problemas que tengan que ver con un contexto más cercano al alumno. Lo que se pudo observar es que la temática de la basura fue un catalizador para la vinculación de la fracción algebraica como función racional. A continuación, se analizarán respuestas de los estudiantes en donde la contextualización influyó de manera significativa.

Se comenzará con la tabla 1, en ella se encuentran las funciones de la basura generada y recuperada evaluadas en $t = 0,1, \text{y } 2$. La experiencia en la práctica docente demuestra lo complicado que resulta el tema de funciones: la notación, regla de correspondencia, gráficas y la interpretación de las variables para problemas de contexto real, pero lo que se observó en esta primera sección de la secuencia es que los alumnos usaron la información dada en la tabla para poder determinar la basura generada en $t = 10$ y posteriormente interpretar a la fracción $\frac{R(t)}{G(t)}$.

Los estudiantes con ayuda de la tabla 1 pudieron interpretar el significado de cada variable, y ante la pregunta de qué tan difícil fue calcular la basura para 1970 ($t = 10$), los equipos contestaron que fue muy fácil. Es importante mencionar que el algoritmo de evaluar una función no era el objetivo principal, pero se requería para después dar una interpretación a la fracción algebraica. Así surgió la idea de elaborar la tabla para mostrar al equipo el significado de cada función y el de la variable *t* como tiempo. El contexto facilitó el proceso al grado de observar que los alumnos escribieron el resultado acompañado de unidades, y el significado de la fracción como *parte-todo* resultó espontáneo. Las siguientes evidencias mostradas en las fotografías 4.1, 4.2 y las breves transcripciones de diálogos, que corresponde a la parte de la sesión donde dos estudiantes pasan al pizarrón y la maestra coordina los trabajos, muestran lo dicho en este párrafo.

Fotografía 4.1. Basura en 1970

Vanessa: Nosotros entendimos que para el inciso (a) tenemos que calcular la basura en 1970 que son transcurridos de acuerdo con la tabla 10 años, entonces lo que hicimos fue sustituir la *t* por los 10 años.

Emmanuel, el segundo estudiante, al terminar su cálculo expresa la conclusión de su equipo.

Fotografía 4.2. Basura 1970 (t=10)

Emmanuel: No fue difícil porque ya contábamos con una fórmula. Sí usamos calculadora para corroborar los resultados, los resultados sí fueron lo que esperábamos porque cuando había recuperación de basura ésta disminuía y cuando generábamos, aumentaba.

La intención de poner una tabla de valores de la función (tabla uno) es familiarizar al alumno con la notación de funciones y la obtención de resultados de la cantidad de basura generada o recuperada en un año determinado. Los conocimientos sobre el tema de “Evaluación de funciones”, que los jóvenes de sexto año ven como parte de los contenidos de Matemáticas V, fueron utilizados sin presentar alguna dificultad, permitiendo que la respuesta al inciso (a) “Observa la tabla y calcula la cantidad de basura recuperada y generada en 1970…” fuera casi inmediata; y en el caso de los jóvenes de cuarto año, el profesor del grupo había visto con anterioridad el tema de funciones cuya gráfica es una recta, y esto contribuyó que a los alumnos se les facilitara contestar, pero fue el contexto del problema lo que convirtió a la tabla uno en una fuente de significados.

Desde la experiencia adquirida en la práctica docente se puede pensar que el contenido de funciones representa un alto nivel de dificultad para los alumnos, sin embargo, durante la realización de la secuencia se observó un adecuado manejo de estos conocimientos, esto se puede notar en el siguiente diálogo.

E_1: La tabla de abajo ya está como enseñándote a usar la fórmula.

E_2: Ajá, de hecho, van por años, si te fijas… [es interrumpido].

E_3: O sea t es igual a 10.

E_2: Y aquí en la basura generada sería igual [risitas].

E_1: Ok, entonces el problema es ¿cuál es la pregunta?

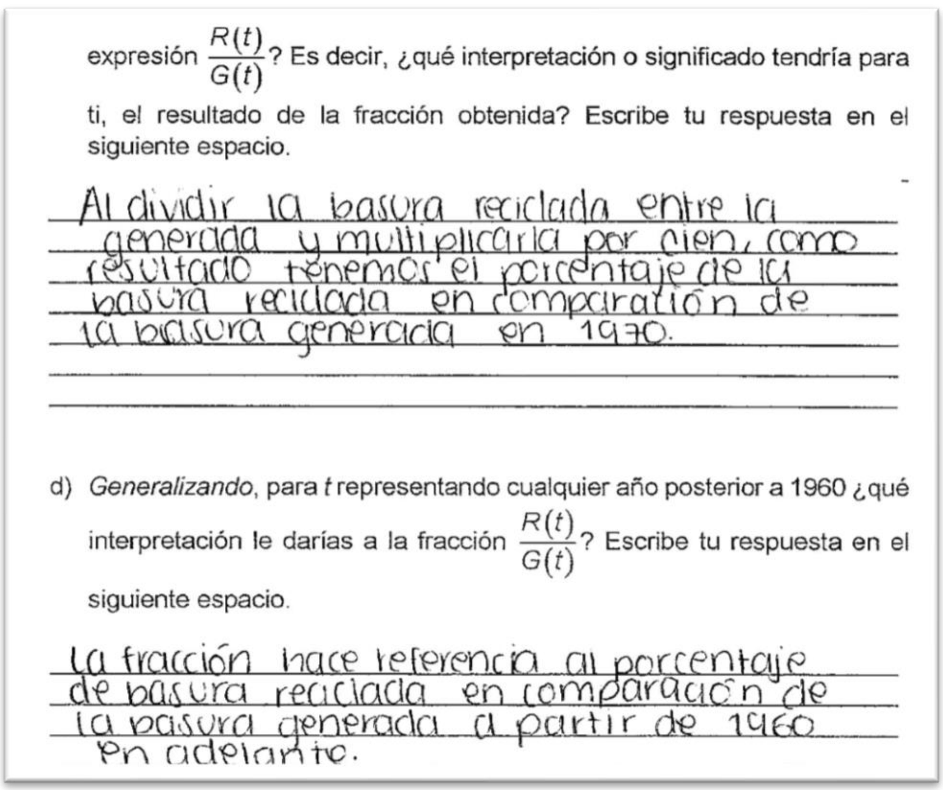
E_3: Calcular la basura recuperada y generada para 1970.

E_1: Ah sí, $t = 10$ ¿$t = 10$?

Actualmente el término basura generada o basura recuperada tiene un significado para el alumno, no es algo que desconozca, más bien le interesa, pues este problema empeora cada día y los alumnos saben que es una realidad cada vez más latente. Entonces, el contexto ayudó a la apropiación de la problemática y por ende a la interpretación de la fracción, también promovió un discurso más formal (matemático) entre los estudiantes.

El trabajo con los alumnos de sexto año hizo más notorio lo importante del contexto, pues la mayoría de los equipos dieron una interpretación a la fracción constituida por el cociente de los dos tipos de basura, como el porcentaje de la basura recuperada, ver figura 4.13. En esta imagen también aparece la pregunta donde se pide que generalicen esta interpretación, el equipo utiliza la frase “a partir de 1960 en adelante” como parte de esa generalización.

Para los estudiantes de sexto año el tema de funciones es más conocido y saben que la literal puede asumir diferentes valores, lo interesante es la forma de expresar sus respuestas, denota una contextualización, pues están conscientes de lo que significa cada variable, y esto se traduce en un discurso más propio del contexto del problema.


expresión $\frac{R(t)}{G(t)}$? Es decir, ¿qué interpretación o significado tendría para ti, el resultado de la fracción obtenida? Escribe tu respuesta en el siguiente espacio.

Al dividir la basura reciclada entre la generada y multiplicarla por cien, como resultado tenemos el porcentaje de la basura reciclada en comparación de la basura generada en 1970.

d) *Generalizando*, para t representando cualquier año posterior a 1960 ¿qué interpretación le darías a la fracción $\frac{R(t)}{G(t)}$? Escribe tu respuesta en el siguiente espacio.

La fracción hace referencia al porcentaje de basura reciclada en comparación de la basura generada a partir de 1960 en adelante.

Figura 4.13. Generalización

Es en la segunda parte de la secuencia en donde se proporcionan datos recolectados por los alumnos de la basura orgánica e inorgánica generada en casa de uno de ellos. En la figura 4.14 es presentado el conjunto de datos de la orgánica. Se elije este conjunto porque casi todos los valores muestran un incremento de 1 kilogramo, y esto propició que los alumnos pensaran que el patrón de comportamiento de los datos se podría adaptar a la gráfica de una línea recta, contenido matemático visto en clases anteriores.

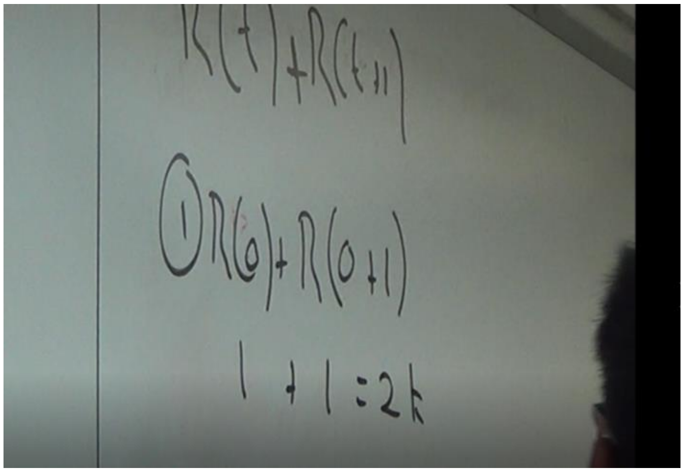
e) Te voy a pedir que realices una recolección de 5 datos que reporten el peso de la basura reciclada, durante 5 días de la semana. Puede ser el peso de recipientes de plástico reciclables, PET, que se recopilan en el contenedor que se encuentra en la explanada del plantel, también podría ser la basura orgánica que se acumula en tu hogar, lo importante es que *"midas" el peso de esa basura que puede reciclarse cada día. Anota en* la siguiente tabla los datos obtenidos.

$R(t) = -0.01t^2 + 1.15t - 0.16$

Día de la semana	Peso de la basura a reciclar	N:
Lunes	1 Kg	1
martes	2 Kg .760	2
miercoles	3.2Kg .306	3
Jueves	4.2 Kg 1	4
Viernes	5.2Kg 3	5

Figura 4. 14. Basura orgánica

Los resultados de pedirles a los equipos que dedujeran sus propias fórmulas representativas de ambos tipos de basura (orgánica e inorgánica) trajeron resultados muy interesantes. El trabajo de los equipos de sexto año fue intentar ver un patrón en los datos recolectados, pero el grupo en general se mostró muy confundido con la pregunta, y sólo un equipo pudo proponer una fórmula que podría considerarse recursiva. En la fotografía 4.3 aparece parte de la fórmula diseñada.



Fotografía 4.3. Fórmula recursiva

La variable *t* representa el tiempo y $R(t)$ la cantidad de basura generada ese día, por ejemplo $t=0$ representa el primer día y $R(0)=1$ significa que ese día se generó 1 kilogramo de basura.

La expresión $t+1$ significa el siguiente día y $R(t+1)$ la basura generada el día siguiente. Lo que el equipo hizo fue asignarle a cada dato recolectado la notación de una función, de esta manera usando la tabla de los datos recolectados podían obtener el valor de la *basura acumulada*.

Con esta evidencia se muestra que, para el caso de este equipo de sexto año, el uso de conocimientos sobre la notación de funciones y el asignarle a la literal un valor definido, los ayudó a elaborar una fórmula, pero el contexto del problema los hizo distinguir entre el papel de la *t* como el tiempo en días y $R(t)$como la cantidad de basura registrada ese día.

La modelización según la perspectiva de Sadovsky resalta la importancia del contexto en un problema como una herramienta que cause interés en el alumno, pero la estrategia seguida en la elaboración de la secuencia fue utilizar el contexto del modelo algebraico de las funciones que representaban a la basura, haciendo que el alumno comprendiera la notación y obtuviera algunos resultados para otorgarle un significado propio a estas funciones. Definitivamente trabajar con un problema que habla sobre un contexto que el alumno reconoce facilitó el surgimiento de los procesos de solución.

4.2.3 El papel de las gráficas

En este apartado es presentada la tercera parte de la secuencia, en la cual los equipos trabajaron con las gráficas de las funciones que representaban a la basura orgánica e inorgánica, y cuyos modelos algebraicos fueron obtenidos por los alumnos usando GeoGebra. Es importante señalar que el grupo de sexto y cuarto año ya habían visto en clases anteriores el tema de línea recta planteada como función, por lo que algunos equipos intentaron construir los modelos algebraicos sin usar GeoGebra.

En esta parte de la secuencia se les proporcionó a los alumnos de cuarto año los modelos de la basura orgánica $r(t)=3t-3$, cuya gráfica corresponde a una línea recta y de la inorgánica $g(t)=t^2-t$ que representa a la gráfica de una parábola. Estas funciones fueron propuestas por la tesista, pues fueron adaptadas para los fines de esta sección de la secuencia. Con ellas se forma a la función racional $f(t)=\dfrac{3t-3}{t^2-t}$, la cual no está definida para los valores $t=0$ y $t=1$, ya que $f(0)=\dfrac{3(0)-3}{(0)^2-(0)}=\dfrac{0-3}{0-0}=\dfrac{-3}{0}$ y $f(1)=\dfrac{3(1)-3}{(1)^2-(1)}=\dfrac{3-3}{1-1}=\dfrac{0}{0}$ muestran expresiones indefinidas.

Usando las gráficas de estas funciones se pidió a los alumnos que dieran una interpretación a la fracción $\dfrac{3t-3}{t^2-t}$ cuando el tiempo asumiera los valores de $t=1$ y $t=3$. La intención fue que los alumnos basaran su interpretación en lo que observaran en las gráficas, pues estos valores correspondían a las abscisas de los puntos de intersección, ver figura 4.15.

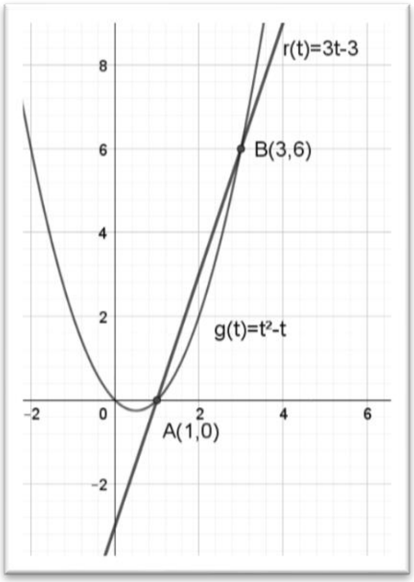


Figura 4.15. Gráficas de basura orgánica e inorgánica

El valor $t=1$ genera un denominador nulo y por lo tanto una expresión indefinida. El otro valor da una expresión bien definida pero similar, ya que en ambos casos el numerador y denominador de cada fracción son iguales, como se muestra a continuación.

$$f(1)=\frac{3(1)-3}{(1)^2-(1)}=\frac{3-3}{1-1}=\frac{0}{0} \quad \text{y} \quad f(3)=\frac{3(3)-3}{(3)^2-(3)}=\frac{9-3}{9-3}=\frac{6}{6}$$

Con esta imagen (figura 4.15) proyectada en el pizarrón se les preguntó a los equipos “¿Qué pasa en $t=1$?, y ¿en $t=3$?” La intención es que el alumno observe que ambos son puntos de corte entre las gráficas pero que el punto A es indefinido para la función racional $f(t)=\dfrac{3t-3}{t^2-t}$.

Se transcribe el diálogo de la respuesta de un equipo

M: ¿Qué han pensado del inciso c muchachos? En dónde les pido que grafiquen y me digan qué pasa en $t=1$ y $t=3$, que son justamente los valores expuestos ahí [señalando el pizarrón] ¿qué contestarían?

E_1: Pues son los puntos donde se intersecan las gráficas, la parábola y la recta, lo que viene siendo la inorgánica y orgánica.

M: Ajá, entonces en esos puntos la orgánica e inorgánica se cortan, pero qué significa, digamos… [es interrumpida por el estudiante]

E_1: Ese día tuvieron la misma cantidad de basura ¿no?

M: Muy bien, muy bien ¿cómo te llamas?

E_1: Daniel

M: Daniel entonces tienen la misma cantidad de basura, por favor anótenlo aquí [señalando la secuencia impresa].

Lo anterior permite comprobar que el *estudiante uno* se ha apropiado del contexto del problema y puede interpretar lo que significan los puntos de intersección. En este ejemplo se observa que el dato numérico que proporcionan los puntos A y B podría ser el conducto para que el alumno interprete, y que además generalice, pues cuando el alumno afirma "tuvieron la misma cantidad de basura", está hablando de los dos puntos, el punto $A(0,0)$ y el $B(3,6)$, sabe que tienen la misma cantidad de basura porque las gráficas se cortan.

El alumno esté aplicando conocimientos previos sobre lo que sabe de las gráficas. Los estudiantes ven en secundaria el tema de la gráfica de una recta y de una parábola, sin embargo, en este caso se muestran las gráficas de dos funciones distintas: recta y parábola en un mismo plano cartesiano. Definitivamente el alumno está *leyendo* a la gráfica y distingue la variable t como el tiempo ubicado en el eje horizontal, y considera el punto de corte como la cantidad de basura generada ese día, ya que las gráficas se *unen*, entonces el alumno interpreta que debe ser la misma cantidad.

En la siguiente pregunta se les hace notar que para el intervalo de 1 a 3 días la gráfica de la orgánica está por “encima” de la gráfica de la inorgánica, y se les pregunta cómo afecta esta situación a los resultados de la fracción que define a la función racional. Los equipos se mostraron confusos, pero las respuestas llevaron a conjeturas muy interesantes. Se transcribe el diálogo de uno de los equipos.

M: ¿Cómo afecta el que una de las gráficas esté por encima de la otra?, ¿qué opinan?

E_1: Bueno, concluimos que obviamente la basura orgánica que iba a haber es mucho mayor que la inorgánica, el sentido de la recta es que iba a continuar, continuar y continuar. Los resultados [se refiere a la función racional] siempre van a ser mayores que uno.

M: ¿Mayores que uno? ¿Están seguros? Porque en este caso el numerador ¿cómo es con respecto al denominador?

E_1: Es menor.

M: El de “arriba” cómo son sus valores con respecto al de “abajo”.

E_1: No, son mayores.

M: Son mayores ¿por qué?

E_1: Porque si sustituimos la función $g(t)$ por el siguiente día, ya son tres días, por lo tanto, tiene que ser mayor.

M: Porque el tiempo ¿ha transcurrido? Porque ¿hay más basura? A mí, lo que me interesa es que ustedes me digan qué pasa por el hecho que una de ellas, la orgánica, se encuentra por encima de la inorgánica. Tú me dices que los resultados son mayores que uno, pero lo que no me quedó muy claro es ¿por qué es así?

E_2: Porque si no fueran mayores que uno entonces la gráfica sería negativa, los valores fueran hacia abajo.

M: La gráfica ¿sería negativa? O bien la gráfica [es interrumpida].

E_1: Más bien los valores que tenemos en la gráfica estarían mal.

M: No, no entendí esa parte.

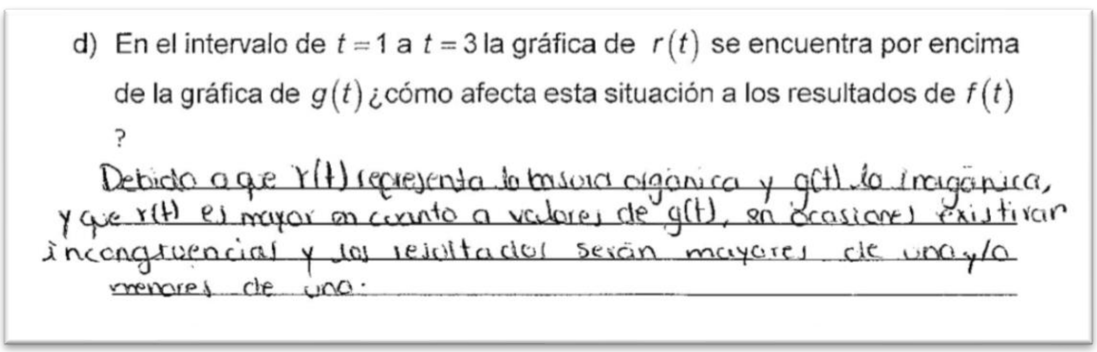
E_1: O sea que si no nos diera un valor mayor que uno, que si no fuera aumentando conforme pasan los días como tenemos en el punto A la gráfica estaría mal.

M: Ah bueno ya me queda más claro.

La respuesta del equipo era correcta si sólo se considera al intervalo de 1 a 3 días, pero como el alumno mencionó que la gráfica continuaría, entonces como observadora participante surgió en la tesista un interés por conocer la argumentación de los alumnos.

Lo que afirmó el *estudiante número dos* proporciona información para establecer que el alumno relaciona una gráfica decreciente con valores negativos, pero es claro que el *estudiante uno* no concordaba con esta opinión pues al observar los valores de la gráfica se percató que eran positivos.

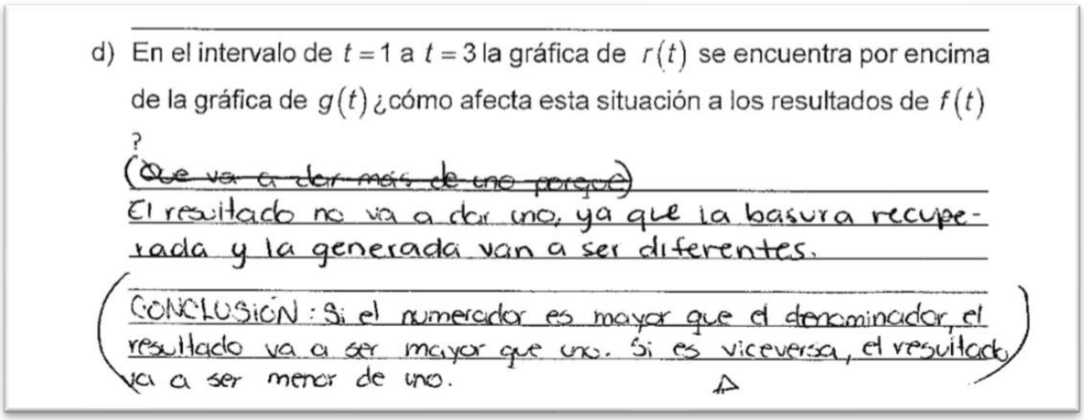
Las figuras 4.16y 4.17 muestran dos respuestas a la misma pregunta que aparece al inicio del diálogo. Por lo tanto, son analizadas con detenimiento pues se aprecian como conclusiones derivadas de un proceso de análisis que los equipos llevaron a cabo.


d) En el intervalo de $t=1$ a $t=3$ la gráfica de $r(t)$ se encuentra por encima de la gráfica de $g(t)$ ¿cómo afecta esta situación a los resultados de $f(t)$?

Debido a que r(t) representa la basura orgánica y g(t) la inorgánica, y que r(t) es mayor en cuanto a valores de g(t), en ocasiones existiran incongruencias y los resultados serán mayores de uno y/o menores de uno:

Figura 4.16. Numerador mayor

En la figura 4.16, cuando el alumno dice “en ocasiones existirán incongruencias”, posiblemente se refiera a que los valores de las funciones son diferentes comparados con los puntos donde se intersecan las gráficas, y los valores resultan ser iguales. El alumno sabe que, si el valor que asume el numerador es diferente al del denominador, la fracción tendrá valores diferentes de uno, pero puede ser que aún no esté del todo claro cuando son mayores y cuando son menores.



d) En el intervalo de $t=1$ a $t=3$ la gráfica de $r(t)$ se encuentra por encima de la gráfica de $g(t)$ ¿cómo afecta esta situación a los resultados de $f(t)$?

~~(Que va a dar más de uno porque)~~

El resultado no va a dar uno, ya que la basura recupe-rada y la generada van a ser diferentes.

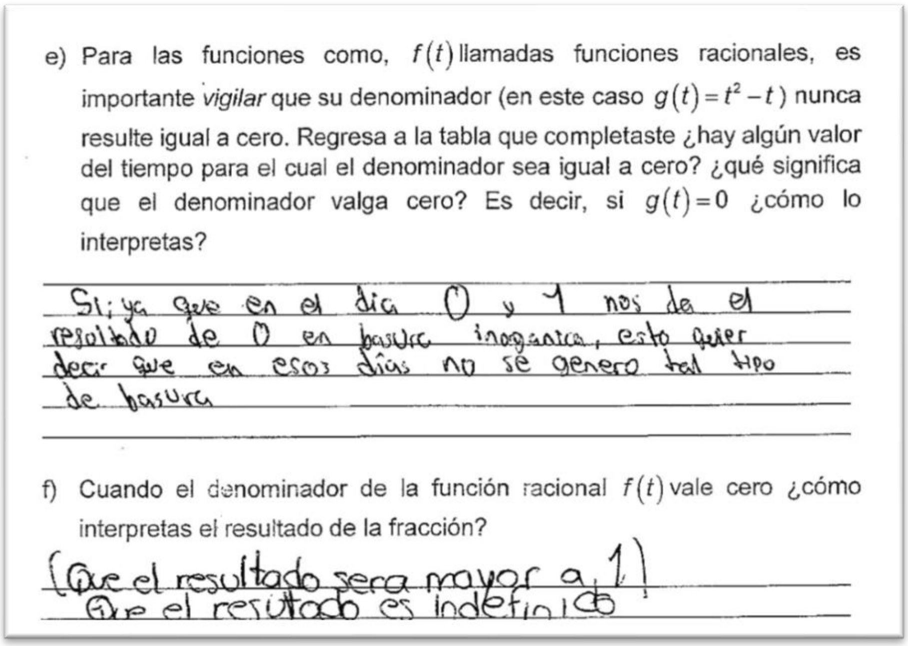
CONCLUSIÓN: Si el numerador es mayor que el denominador, el resultado va a ser mayor que uno. Si es viceversa, el resultado va a ser menor de uno.

Figura 4.17. Numerador diferente del denominador

En la figura 4.17 el equipo realiza una importante conjetura, ya que la pregunta era "¿cómo afecta esta situación a los resultados de $f(t)$?", su respuesta es tanto argumentativa como concreta: el resultado será diferente de uno *porque* los valores del numerador y denominador son diferentes. Esto lleva a pensar en lo que significó para el equipo el que la gráfica de la basura orgánica estuviera "por encima" de la otra gráfica, para ellos implicó que los valores serían diferentes y la fracción no podría dar un resultado igual a uno.

La última parte de este problema tiene como objetivo llevar al estudiante a conjeturar respecto al denominador nulo y su implicación en la fracción algebraica.

En la figura 4.18 se muestran las preguntas de la secuencia y las respuestas de un equipo.



e) Para las funciones como, $f(t)$ llamadas funciones racionales, es importante *vigilar* que su denominador (en este caso $g(t)=t^2-t$) nunca resulte igual a cero. Regresa a la tabla que completaste ¿hay algún valor del tiempo para el cual el denominador sea igual a cero? ¿qué significa que el denominador valga cero? Es decir, si $g(t)=0$ ¿cómo lo interpretas?

Si; ya que en el dia 0 y 1 nos da el resultado de 0 en basura inorganica, esto quiere decir que en esos días no se genero tal tipo de basura

f) Cuando el denominador de la función racional $f(t)$ vale cero ¿cómo interpretas el resultado de la fracción?

~~(Que el resultado sera mayor a 1)~~
Que el resutado es indefinido

Figura 4.18. Denominador nulo

Finalmente, en la respuesta que aparece en la figura 4.18 los equipos llegan a un acuerdo sobre lo que significa un denominador nulo, ellos pueden ver que la función que representa al denominador puede asumir el valor de cero, y en este contexto lo interpretan como la ausencia de basura, pero con ayuda de la gráfica de la función racional se percatan que el programa de GeoGebra lo señala como *punto indefinido* (figura 4.12).

El uso de la literal como variable está muy presente en las diferentes interpretaciones que los alumnos dan a la tabla de valores (hoja de cálculo) y a la gráfica de ambas funciones, saben que la variable tiempo va a estar asumiendo diferentes valores, también fue muy notorio el apoyo visual que implicó la gráfica de cada función, pues los alumnos reconocieron patrones de crecimiento y los relacionaron con intervalos donde las funciones son crecientes. Se considera que el trabajo realizado con las secciones anteriores motivó al alumno a la reflexión y análisis de cada respuesta. En sus respuestas fue notoria una constante validación sobre la congruencia de los resultados.

La última sección de este capítulo está dedicada a las conclusiones obtenidas durante el desarrollo de este proyecto de investigación.

5. Conclusiones

Se inicia con las conclusiones derivadas de la respuesta a la pregunta de investigación en la sección 5.1. Le sigue en la sección 5.2 lo que se considera las aportaciones al campo de investigación: aprendizaje del Álgebra, y los principales resultados que aportaron los análisis; y finalmente, en la sección 5.3 se habla sobre los alcances y limitaciones que este proyecto trajo consigo.

5.1 Respuesta a la pregunta de investigación

> ¿Qué conocimientos sobre *fracciones aritméticas* se movilizan al trabajar con una secuencia didáctica que introduzca la solución de problemas sobre *fracciones algebraicas*, usando funciones racionales desde la perspectiva de modelización matemática?

Al enfocarme en las fracciones algebraicas me basé en la experiencia adquirida en mi práctica docente para conocer la relevancia de usar los conocimientos sobre Aritmética para la introducción de los conceptos algebraicos. Fue este el punto de partida para ir modificando la pregunta de investigación. Al principio sólo era “movilizar conocimientos de Aritmética para comprender el Álgebra”, después fue concentrarme en las fracciones, y finalmente usar a las funciones como enlace entre la fracción aritmética y la algebraica.

La primera vez que escuché el término modelización (modelación) me percaté de la diferencia entre un problema de aplicación, que frecuentemente usaba en mis cursos de quinto y sexto año, y un problema de modelización. Considero que la principal ventaja que tienen los segundos sobre los primeros es que con la modelización el alumno se responsabiliza de su propio aprendizaje, construyéndolo a través de la vinculación de conocimientos previos (no necesariamente aprendidos en el aula de clases) con el conocimiento nuevo que surge al resolver una problemática. Al detectar esta ventaja decidí adaptar problemas sobre fracciones algebraicas usando a la función racional y aplicarlos en una población de cuarto año, donde nunca había utilizado problemas de aplicación. Los resultados han sido analizados en la sección 4.2 *Análisis a posteriori*, por lo tanto, me concentraré en contestar la pregunta de investigación.

Con los resultados obtenidos es posible afirmar que los conocimientos que se movilizaron fueron los significados de número racional desde las interpretaciones de *parte-todo* y *razón* de acuerdo con Llinares (2003). Los alumnos utilizaron el *todo* como la basura generada en un país y definieron a la basura recuperada como una *parte* de la generada. En el caso de la basura orgánica e inorgánica, algunos equipos establecieron relaciones entre ellas, esto es, usaron expresiones como: “es más del doble que”, a partir de ellas la interpretación de *razón* se hizo presente.

El conocimiento nuevo que se generó fue la distinción entre una interpretación y otra, ya que para el caso de la basura orgánica e inorgánica se podía obtener mayor cantidad de la primera produciendo una fracción mayor de uno, caso que no podía surgir para la basura generada y recuperada.

Los estudiantes movilizaron conocimientos sobre los comportamientos de las cantidades de basura. Se dieron cuenta de que, aunque las cantidades de ambos tipos de basura se incrementaban, el crecimiento de la basura generada en un país era mucho mayor que el de la recuperada, produciendo fracciones de valor cada vez más pequeños. Para el problema de la basura orgánica e inorgánica, el valor de la fracción dependía de si la gráfica de la orgánica estaba “por encima” de la inorgánica o viceversa.

En cada problema de la secuencia hubo un inciso en el que se les preguntó sobre la interpretación de la fracción algebraica derivada de la expresión racional del cociente de las dos funciones. Para la basura recuperada y generada, los jóvenes de sexto año (población del piloto) lo expresaron como una generalización de un caso particular, es decir, la interpretación de la fracción obtenida de resultados de basura generada y recuperada en 1970 fue la que dieron para la fracción algebraica al decir que era “la cantidad de basura recuperada de la total generada *de 1960 en adelante*”.

Introducir el concepto de fracción algebraica usando funciones racionales en un contexto que tenga sentido para el alumno, permitió el uso de la literal como variable que asume un conjunto de valores determinados por las condiciones de la problemática. El alumno sabía que los valores de la literal que representaba al tiempo y la que representaba a la basura, debían ser siempre positivos y cada vez mayores. Al transcurrir los días o años las cantidades de basura se incrementarían igual que el valor del tiempo, también que las cantidades de basura podían ser números reales mientras que para el tiempo serían números enteros positivos.

El uso de la tecnología fue un punto clave en la movilización de conocimientos. La población de estudiantes que participó de esta investigación se mostró más perceptiva a las gráficas elaboradas en el salón de computación, usaron el programa de GeoGebra para validar conjeturas que habían surgido en el aula de clases y para mejorar los resultados a los que habían llegado; por ejemplo, un equipo de cuarto año obtuvo el modelo algebraico de la basura orgánica usando procesos aprendidos en clase con el tema de línea recta, posteriormente al usar GeoGebra, el programa les proporcionó un modelo que se ajustaba más a los datos recolectados por los alumno. Ellos pudieron comparar los dos modelos y elegir el que les resultó más adecuado al contexto del problema.

Para concluir esta sección es importante mencionar que el concepto de función se encontraba en contenidos vistos en clases anteriores a la aplicación de la secuencia, tanto en el grupo de sexto año como en el de cuarto; pero fue la perspectiva de modelización la que movilizó los conocimientos a través de problemas con un contexto real, para así convertirse en el enlace entre la fracción aritmética y la algebraica.

5.2 Aportaciones a la investigación sobre el aprendizaje del Álgebra

La principal aportación de esta tesis surge en el marco de la implementación de los nuevos programas de estudio de Matemáticas en los tres grados del bachillerato de la UNAM, ya que en los contenidos de cada programa y como estrategia de enseñanza aparecen sugeridos los problemas de modelización. La siguiente cita fue obtenida del programa de cuarto año aprobado por el H. Consejo Técnico el 17 de noviembre de 2016.

> El propósito de la asignatura Matemáticas IV es que los estudiantes desarrollen sus capacidades de abstracción, generalización, comunicación matemática y razonamiento lógico mediante el análisis y la resolución de problemas contextualizados a partir de la construcción de modelos aritméticos, algebraicos y geométricos. Trascender la dimensión informativa de la instrucción matemática y direccionarla a una dimensión integral formativa es una demanda impostergable: es indispensable que la educación matemática aporte elementos tangibles a la formación de los ciudadanos que requiere nuestro país, informados, con interés por comprender su entorno natural y social, comprometidos en la solución de los grandes problemas de su momento, que sepan usar los recursos tecnológicos de su época de manera racional, para analizar situaciones, evaluar posibilidades y posicionarse crítica y responsablemente ante los retos de la sociedad del siglo XXI (ENP, Plan 2016).

El aprendizaje del Álgebra ha sido un punto de constante preocupación en mi práctica docente, ya que he mantenido el objetivo que se marcó en el anterior Plan de estudios de la ENP (1996), dicho objetivo lo transcribo en la siguiente cita.

> Reafirmar y enriquecer los conocimientos del álgebra previamente adquiridos, para aplicarlos correctamente en el desarrollo de nuevos conceptos, así como en la solución de problemas de otras disciplinas afines, para que el alumno comprenda que las Matemáticas son un lenguaje y una herramienta que lo vincula con su entorno social (ENP, Plan 1996).

La Nacional Preparatoria tiene dentro de sus objetivos que el Álgebra, como una rama de las Matemáticas, se convierta en un lenguaje que el alumno pueda utilizar para la solución de problemas de otras disciplinas. Considero que en la actualidad cobra relevancia para el estudiante su utilización en la solución de problemas de su entorno, entonces la investigación sobre la efectividad de utilizar problemas con un contexto real y cercano al alumno surge como un punto corroborado en esta tesis. La conclusión a la que se llega es que este tipo de problemas se convirtió en una herramienta que movilizó los conocimientos de las poblaciones de alumnos con los que se trabajó, y ayudó a su conocimiento de la literal dentro de un uso que Ursini (2008) llama “variable en una relación funcional”.

El aprendizaje del concepto de fracciones algebraicas a través de problemas de modelización, desde la perspectiva de Sadovsky, es posible si el contexto del problema tiene un significado para el alumno. Adicionalmente es importante que el docente desempeñe el acompañamiento y guía que le permita detectar los conocimientos que se movilizan en el alumno para poder usarlos en la introducción de una estructura algebraica.

5.3 Alcances y limitaciones de la investigación

Trascender dificultades como las que marca Booth (1984) en el área de “Formalización y simbolización del método”, en donde se busca enfocar la atención sobre la estructura formal de un problema para su solución correcta, y que de esta forma el estudiante al obtener una estructura formal en problemas de aritmética pudiera ayudarlo a tenerla en problemas de álgebra, se convirtió en otro de los objetivos de este trabajo de investigación; sin embargo, limitaciones en el tiempo para la aplicación de la secuencia y las interacciones con los estudiantes como observador participante por parte de la tesista, impidieron llegar a resultados más contundentes para saber si los alumnos lograron construir una estructura formal en álgebra. Como un ejemplo de la creación de estructuras formales se puede mencionar el concepto de la imposibilidad de la división entre cero que se incluyó en la secuencia.

Los estudiantes al analizar la imposibilidad de la división entre cero empezaron a comprender la “regla” de que en una fracción aritmética no puede haber un denominador que valga cero, pero dentro del contexto del problema de la basura, la función que aparece en el denominador de la fracción algebraica (basura inorgánica) sí puede asumir el valor de cero, pues se interpretaría como que ese día no se produjo basura.

Para el estudiante usar la función de la basura inorgánica como el denominador de una función racional es posible siempre y cuando se “cuide” de considerar valores del tiempo para los cuales el denominador no se anule, pero la pregunta que surge es ¿qué sentido tuvo para el alumno cuidar que el denominador de una función racional no se anulara? El principal obstáculo que se enfrentó en el desarrollo de esta investigación fue que el alumno comprendiera lo que ocurría con la fracción algebraica cuando se usaba para generar una función racional, y se abordaban valores para los cuales el denominador de la función valía cero. Por ejemplo, los estudiantes al usar el programa de GeoGebra observaron en la gráfica los puntos indefinidos de la función racional y se percataron que correspondían a un denominador nulo, entonces ¿tuvo sentido para los alumnos? Considero que para algunos sí lo tuvo, pero sólo para una minoría.

En esta sección se buscó brindar una estructura en aritmética donde la regla dicta que una fracción aritmética no puede tener un denominador nulo, y que en el caso de una fracción algebraica la expresión del denominador puede, para un valor específico de la variable, asumir un valor de cero y ser aun así un resultado aceptable dependiendo del contexto del problema; sin embargo, establecer una estructura algebraica para el caso de fracciones se considera una limitante, pues en la aplicación de la secuencia se observó una confusión en los alumnos, la cual tuvo que ser aclarada con una explicación más amplia por parte de la tesista que en ese momento actuó como docente del grupo.

Dentro de los alcances de la investigación es importante señalar el papel de la tecnología como herramienta de apoyo para el aprendizaje del alumno. La Nacional Preparatoria ha implementado cursos de actualización en el uso de tecnología para que el docente pueda usarla en apoyo a su enseñanza, sin embargo, algunas veces escucho a mis colegas quejarse de la falta de estructura como salones de computación o disponibilidad de tiempo para realizar prácticas en este ambiente de trabajo.

Lo que se observó en el desarrollo de la aplicación de la secuencia es que el alumno adquiere rápidamente habilidades en el manejo de programas como GeoGebra, pero lo más importante es que ese conocimiento lo utilizó para validar resultados o comprobar hipótesis. Actualmente los jóvenes son expertos en el uso de objetos como el celular, la tableta y equipo de cómputo, pero es responsabilidad del docente mostrarles las ventajas de utilizar esta tecnología como apoyo en sus aprendizajes y ampliar la cultura escolar en su beneficio.

El papel de las gráficas fue la última categoría a definirse, sin embargo, los logros obtenidos por el alumno al visualizar la problemática planteada en la secuencia, con programas como GeoGebra, fueron muy alentadores. No se trata de sustituir el papel de un docente en el aula de clases por el uso de la tecnología, tal idea se considera totalmente errónea, sino establecer las ventajas que se podrían obtener a través de ella.

En concreto se propone como línea de investigación a seguir: el papel de las gráficas en la adquisición de nuevos conocimientos sobre el uso de funciones en problemas de modelización.

Como cierre de las conclusiones obtenidas me gustaría comentar lo siguiente:

Durante el transcurso de los 15 años en mi práctica docente he tenido la fortuna de trabajar con los tres grados del nivel bachillerato de la UNAM, y he podido observar las dificultades que presentan los estudiantes en su aprendizaje del Álgebra, de esta manera llegué a la Maestría en desarrollo educativo con el objetivo de aprender sobre estas dificultades y establecer propuestas que permitan trascenderlas para lograr mejores resultados.

Cuando estoy frente a grupo, y ante la mirada de los jóvenes que ingenuamente piensan que la profesora todo lo sabe y que lo único que tienen que hacer es tratar de entender un lenguaje que no siempre ha sido claro, de manera frecuente me cuestiono si estoy lista para comunicar y transmitir lo que creo *debo* enseñar. El proyecto que dio origen a esta tesis se basó en la firme creencia de poder aprender de mis alumnos, de movilizar los conocimientos que ellos poseen y de aprovecharlos para vincularlos con el conocimiento nuevo que puedo proporcionarles. Hoy ya no me cuestiono acerca del lugar que ocupo en el proceso de enseñanza, sé que mis alumnos y yo trabajaremos en equipo, siempre aprendiendo uno del otro. Considero que la transmisión de conocimiento dentro de la disciplina en la que me he formado puede ser de utilidad a los estudiantes para seguir desarrollándose en su comunidad y ser cada vez más capaces en el área que decidan seguir.

Es muy común escuchar a algún profesor de matemáticas quejarse de los conocimientos previos que sus alumnos *deberían tener,* pues ellos *nunca se acuerdan* de lo que aprendieron en el curso anterior o bien su profesor es tan malo que *nunca les enseñó nada.* En este proyecto se pudo determinar que los estudiantes sí poseen conocimientos previos y los usan de formas que no se esperaba. La *cultura escolar* que los alumnos han ido construyendo a través de diferentes cursos en la materia de Matemáticas, y seguramente también fuera del aula de clases, les han ayudado sólo a *sobrevivir* en el curso actual, estas condiciones no pueden seguir manteniéndose, se requiere de una perspectiva nueva desde donde abordar la problemática. El alumno requiere una orientación respecto a lo que ya sabe, como profesor se debe desarrollar la habilidad de poder detectar lo que el alumno está *viendo* para poder aprovechar ese conocimiento y enseñarle cómo usarlo para comprender el conocimiento actual. Asumir el compromiso por lograr que “la educación matemática aporte elementos tangibles a la formación de los ciudadanos que requiere nuestro país, informados, con interés por comprender su entorno natural y social, comprometidos en la solución de los grandes problemas de su momento” (ENP, Plan 2016, p. 2).

Anexo 1. Secuencia
Funciones racionales y fracciones algebraicas
Parte I
Nombres:

____

____

____

El siguiente trabajo representa una serie de dos ejercicios que te ayudarán a comprender o a aclarar aún más el concepto de fracción algebraica. Usando como principal soporte el tema de Funciones, cada problema te permitirá analizar las características de una fracción y sus usos en diferentes contextos.
Resuelve los siguientes ejercicios en equipo de tres integrantes, utiliza pluma en vez de lápiz y si tienes que corregir, encierra entre paréntesis al error.

1. Concepto de fracción.
   Supón que la cantidad de *basura generada* en Estados Unidos en millones de toneladas, está dada por la función $G(t)=0.04t^2+2.34t+90$, donde t es la cantidad de años, con $t=0$ para 1960 y la cantidad de *basura recuperada* (en millones de toneladas), está dada por la función $R(t)=0.04t^2-0.59t+7.42$, en México lo entenderíamos como la basura que se puede reciclar.
   Problema adaptado del libro *Álgebra* de Ignacio Bello (2009) p. 342.

   La tabla que se muestra a continuación puede servir para aclarar la información dada en el párrafo anterior.

Año	t	Basura recuperada en millones de toneladas $R(t)=0.04t^2-0.59t+7.42$	Basura generada en millones de toneladas $G(t)=0.04t^2+2.34t+90$
1960	0	$R(0)=0.04(0)^2-0.59(0)+7.42=7.42$	$G(0)=0.04(0)^2+2.34(0)+90=90$
1961	1	$R(1)=0.04(1)^2-0.59(1)+7.42=6.87$	$G(1)=0.04(1)^2+2.34(1)+90=92.38$
1962	2	$R(2)=0.04(2)^2-0.59(2)+7.42=6.4$	$G(2)=0.04(2)^2+2.34(2)+90=94.84$
…		Y así sucesivamente	

En el primer renglón se puede ver el año, el tiempo y a las funciones que representan a los millones de toneladas de basura recuperada y generada.

En el segundo, para 1960 ($t = 0$) la tabla establece que se *recuperaron* 7.42 millones de toneladas de basura, pero en ese año se *generaron* 90 millones de toneladas de basura.
En 1962 se generaron 94.84 millones de toneladas de basura y la basura recuperada fue de 6.4 millones de toneladas.

a) Observa la tabla y calcula la cantidad de basura recuperada y generada en 1970. Anota los resultados en el espacio siguiente, si quieres puedes utilizar una calculadora (incluso la del celular).

b) Comenta los resultados con tus compañeros ¿qué tan difícil fue obtener las respuestas?, ¿usaste calculadora?, ¿los valores encontrados son lo que esperabas, por qué? Escribe tus comentarios en el siguiente espacio.

Posteriormente, expresa ante el grupo y el profesor los resultados obtenidos, ¿coinciden con los resultados de los demás? y si no es así ¿cuál consideras que es la razón?

Y ahora la pregunta importante…

c) Si utilizas los resultados obtenidos para 1970 ¿qué representa la expresión $\frac{R(t)}{G(t)}$? Es decir, ¿qué interpretación o significado tendría para ti el resultado de la fracción obtenida? Escribe tu respuesta en el siguiente espacio.

-

d) *Generalizando*, para *t* representando cualquier año posterior a 1960 ¿qué interpretación le darías a la fracción $\frac{R(t)}{G(t)}$? Escribe tu respuesta en el siguiente espacio.

A las funciones de la forma $\frac{R(t)}{G(t)}$ con $R(t)$, $G(t)$ polinomios y $G(t) \neq 0$ (polinomio no nulo), se les conoce como Funciones Racionales. Para este problema la función racional que se genera de la fracción $\frac{R(t)}{G(t)}$ es:

$$f(t) = \frac{0.04t^2 - 0.59t + 7.42}{0.04t^2 + 2.34t + 90}$$

Finalmente, comparte los resultados, respuestas e impresiones derivados de esta práctica, con el resto de los equipos y con el profesor.

Parte II

Nombres:____

Las funciones trabajadas en la parte I, reportaban resultados de los años de 1960 en adelante, ¿podrías adaptarlo a las condiciones actuales de tu entorno? Tal vez diseñar tus propias funciones que representen la basura generada y recuperada a través de estimaciones o aproximaciones. Para contestar esta sección puedes usar el software GeoGebra.

Realiza una recolección de 6 datos, que reporten el peso de la basura orgánica que se genera en tu casa día tras día, es decir, mide el peso de la basura que se genera el día de hoy, y luego suponiendo que no se desecha, mide el peso de la *basura acumulada* al siguiente día. Anota en la siguiente tabla los datos obtenidos.

Día de la semana	Peso de la basura orgánica

b) Ahora que tienes información parecida a la contenida en la tabla que viene al principio del ejercicio, grafica estos datos considerando el tiempo en el eje X y el peso en el eje Y ¿qué harías para encontrar la fórmula (modelo algebraico) de la nueva función que determina la basura orgánica que se genera día a día? Si pudiste obtenerla, anota la fórmula en el siguiente espacio.

$$r(t) =$$

1. ¿Qué diferencias y semejanzas hay con la fórmula de R(t) de la primera parte de este problema?

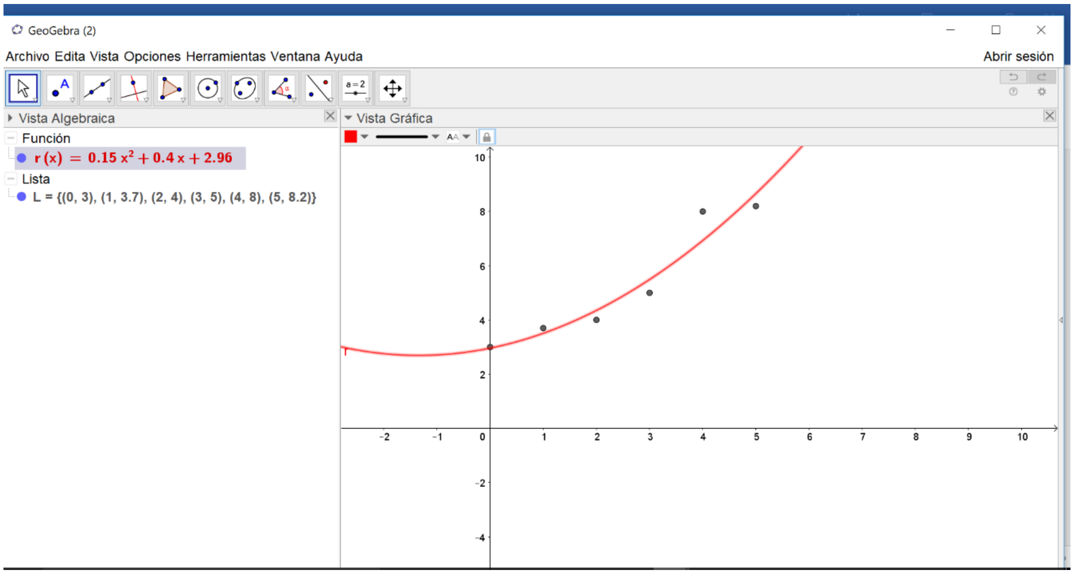
2. ¿Qué unidades consideras que deberían tener los resultados obtenidos con la fórmula de $r(t)$?

En otro grupo recolectaron los siguientes datos.

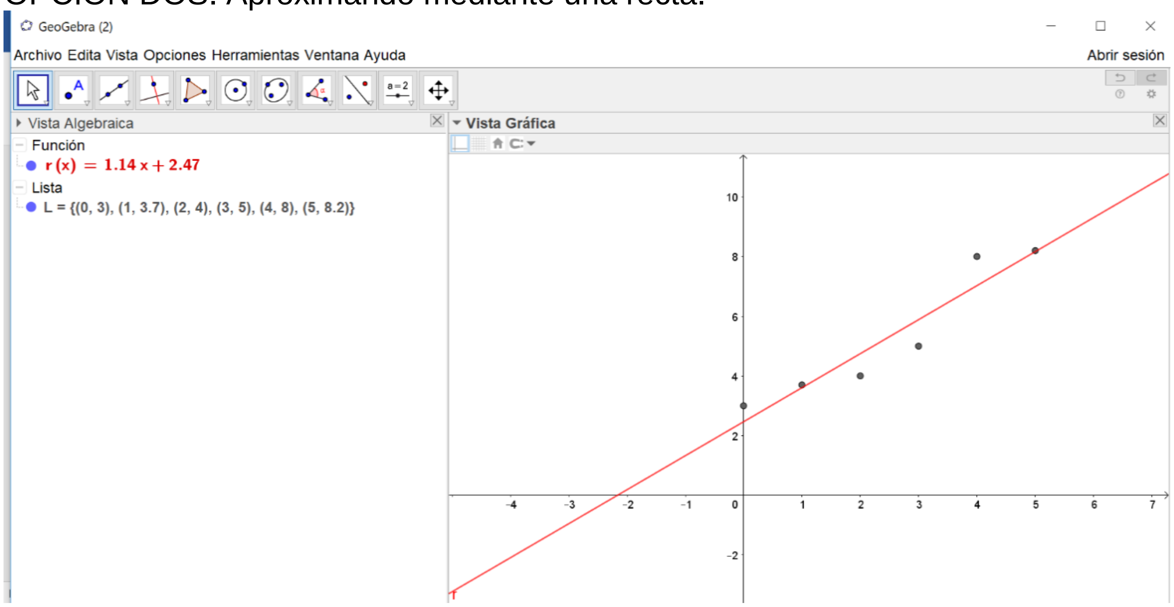
Día	Tiempo En días	Basura reciclada (orgánica) En kilogramos
Domingo	1	3
Lunes	2	3.7
Martes	3	4
Miércoles	4	5
Jueves	5	8
Viernes	6	8.2

Luego, utilizaron la herramienta de GeoGebra para encontrar una fórmula para la nueva función $r(t)$ que determina la basura que se recicla. Así, encontraron dos opciones para esta fórmula.

OPCIÓN UNO. Aproximando mediante una función cuadrática (polinomio de segundo grado)



OPCIÓN DOS. Aproximando mediante una recta.



En ambas opciones graficaron los datos y buscaron una función que se ajustara lo más posible a los otros puntos.

c) ¿Cuál de estas dos opciones te parece más conveniente? ______ ¿Por qué?

____

____

____

____

d) Regresando a tu ejercicio, usa la fórmula para determinar la cantidad de basura orgánica acumulada el día de hoy. ¿Consideras que el modelo encontrado reporta las cantidades esperadas? Sí ¿por qué? No ¿por qué?

____

____

____

____

Mide el peso de la basura inorgánica generada en tu casa y nuevamente llena la siguiente tabla.

Día de la semana	Peso de la basura total generada

e) ¿Cómo sería la fórmula de la nueva función $g(t)$ para que describa el total de kilogramos de basura?

$$g(t) =$$

f) En caso de que sí hayas logrado encontrar a la función, úsala para determinar la cantidad de basura generada para el día de hoy ¿consideras que el modelo encontrado reporta la cantidad esperada? Sí ¿por qué? No ¿por qué?

____

____

____

____

g) Si no pudiste determinarlas ¿puedes usar tus datos para predecir la cantidad de basura recuperada y total generada? Sí ¿por qué? No ¿por qué? Escribe tu respuesta en el siguiente espacio.

h) Finalmente ¿qué interpretación le darías a la expresión $\frac{r(t)}{g(t)}$ para el día de hoy? ¿esperabas ese resultado?

i) Compartan los resultados, respuestas e impresiones derivados de esta práctica con el resto de los equipos y con el profesor. Anota las conclusiones que te parezcan interesantes.

Problema 2. División entre cero
Nombres____

Escribe tus respuestas usando tinta y nunca lápiz, si el espacio no es suficiente usa la parte de atrás de la hoja y por favor indícalo.

En el problema anterior se dio una interpretación a la expresión $\frac{R(t)}{G(t)}$ que permitió relacionar la cantidad de basura recuperada con la generada, y en el caso de los datos obtenidos por tus compañeros, la cantidad de basura orgánica con la inorgánica. Ahora vamos a partir del resultado obtenido por un grupo de estudiantes de otro plantel de la Nacional Preparatoria.

Los compañeros de un equipo obtuvieron la siguiente expresión: $\frac{r(t)}{g(t)} = \frac{3t-3}{t^2-t}$

La función $r(t)=3t-3$ representa la basura orgánica (en kilogramos) y $g(t)=t^2-t$ la inorgánica (en kilogramos), igual que con el problema inicial, t representa el tiempo, pero en días.

Vamos a usar una notación más simplificada y llamaremos a la fracción obtenida $f(t)=\dfrac{3t-3}{t^2-t}$, esta es la función con la cual trabajaremos.

c) Completa la siguiente tabla, observa el ejemplo cuando $t=2$.

t *días*	$f(t)=\dfrac{3t-3}{t^2-t}$ kilogramos
0	
0.5	
1	
2	$f(2)=\dfrac{3(2)-3}{(2)^2-(2)}=\dfrac{6-3}{4-2}=\dfrac{3}{2}=1.5$
3	

Considerando a $f(t)$ como una fracción donde el numerador representa la cantidad de kilogramos de basura orgánica y el denominador los kilogramos de la basura inorgánica ¿cómo interpretas el resultado de 1.5? ¿qué unidades tiene este resultado?

____

d) Grafica a la función $f(t)$ usando GeoGebra ¿puedes usar la gráfica para comprobar los resultados de la tabla? ¿coinciden? ¿a qué crees que se deba?

e) Ahora en una *ventana nueva* grafica a $r(t)=3t-3$ junto con $g(t)=t^2-t$ Anota lo que observes ¿Qué pasa en $t=1$? Y ¿en $t=3$?

f) En el intervalo de $t=1$ a $t=3$ la gráfica de $r(t)$ se encuentra por encima de la gráfica de $g(t)$ ¿qué implica esta situación para los resultados de $f(t)$?

g) Para las funciones como $f(t)$, llamadas funciones racionales, es importante *vigilar* que su denominador (en este caso $g(t)=t^2-t$) nunca resulte igual a cero. Regresa a la tabla que completaste, ¿hay algún valor del tiempo para el cual el denominador sea igual a cero? ¿qué significa que el denominador valga cero? Es decir, si $g(t)=0$ ¿cómo lo interpretas?

h) Cuando el denominador de la función racional $f(t)$ vale cero ¿cómo interpretas el resultado de la fracción?

i) Comenta lo que escribiste de la respuesta anterior con el profesor y anota lo que hayas entendido o te haya parecido importante.

Referencias

Barkley, E. (2007). *Técnicas de aprendizaje colaborativo.* Madrid: Morata.

Bello, I. (2009). *Álgebra.* International Thomson.

Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children's Strategies and Errors. A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project.* Berkshire, England: NFER-NELSON.

David Block, T. M. (s.f.). *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica.* México, México: Somos maestras.

Herstein, I. (1988). *Álgebra abstracta.* Ciudad de México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Lehmann, C. H. (2005). *Álgebra.* Ciudad de México: Limusa.

Llinares, S. (2003). Fracciones, decimales y razón. Desde la relación parte-todo hasta al razonamiento proporcional. En M. d. Chamorro, *Didáctica de las Matemáticas para Primaria* (2006 ed., págs. 187-220). Madrid, España: Pearson Prentice Hall.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D., & Gowar, N. (1988). *Rutas hacia/ Raíces del Álgebra.* Cartagena: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *Journal of Mathematical Behavior, 3*(1), 93-196.

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar Matemáticas hoy. Miradas, sentidos y desafíos.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Segal, S., & Giuliani, D. (2008). *Modelización matemática en el aula: posibilidades y necesidades.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

UNAM, E. N. (23 de julio de 2017). *Dirección General de la Escuela Nacional Preparatoria*. Obtenido de http://dgenp.unam.mx/planesdeestudio/index.html

UNAM, E. N. (23 de julio de 2017). *Dirección General de la Escuela Nacional Preparatoria*. Obtenido de http://dgenp.unam.mx/planesdeestudio/index.html

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D., & Trigueros, M. (2008). *Enseñanza del álgebra elemental: una propuesta alternativa.* Ciudad de México: Trillas.

W. Paul Vogt, D. C. (2012). *When to Use What Research Design.* New York: The Guilford Press.