



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

**MAESTRÍA EN DESARROLLO EDUCATIVO
LÍNEA: EDUCACIÓN MATEMÁTICA**

**EFFECTOS DEL APRENDIZAJE
COOPERATIVO EN LA GENERACIÓN DE
SIGNIFICADOS EN EL TEMA DE FUNCIONES
LINEALES**

TESIS

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN DESARROLLO EDUCATIVO**

PRESENTA:

JORGE LUIS ALVARADO CHÁVEZ

ASESOR DE TESIS:

DR. TENOCH ESAÚ CEDILLO ÁVALOS

INDICE	Pág.
Capítulo I. Introducción	1
Antecedentes	1
El aprendizaje cooperativo visto desde la investigación	3
El problema de investigación	6
Preguntas de investigación	6
Método de investigación	7
Estructura de la tesis	7
Capítulo II. Marco conceptual	9
Introducción	9
Aprendizaje cooperativo	9
Constructivismo y aprendizaje escolar	15
Aprendizaje escolar	20
La calculadora como una herramienta en el aula	22
El uso de la calculadora en el salón de clases	25
La calculadora en un ambiente de aprendizaje cooperativo	27
Capítulo III. El método de investigación	28
Introducción	28
El problema de investigación	28
Preguntas de investigación	29
Método de investigación	30
Selección de los sujetos	32
Instrumentos	36
Cuestionarios	37
Actividades de aprendizaje	37
Estudio exploratorio	39
Ventajas observadas durante la clase	41
Planeación del estudio de campo	42
Trabajo de campo	43
Trabajo con el grupo control	44
Trabajo con el grupo experimental	45
Capítulo IV. Descripción y análisis de datos	49
Introducción	49
Actitudes	51

Primer reactivo. <i>Aprendo más cuando trabajo en equipo en las clases de matemáticas</i>	52
Grupo control	52
Grupo experimental	53
Segundo reactivo. <i>Me gustan las matemáticas</i>	53
Grupo control	53
Grupo experimental	55
Tercer reactivo. <i>Me gusta trabajar de manera individual en la clase de matemáticas</i>	55
Grupo control	55
Grupo experimental	57
Cuarto reactivo. <i>Me gusta estudiar de manera individual en las clases de matemáticas</i>	58
Grupo control	58
Grupo experimental	59
Quinto reactivo. <i>Aprender matemáticas puede ser divertido y placentero</i>	60
Grupo control	60
Grupo experimental	60
Sexto reactivo. <i>No me gusta estudiar matemáticas</i>	61
Grupo control	61
Grupo experimental	62
Séptimo reactivo. <i>Me siento más cómodo preguntándole a un compañero de mi equipo que al profesor</i>	62
Grupo control	62
Grupo experimental	63
Octavo reactivo. <i>Aprendo menos cuando trabajo en equipo en la clase de matemáticas</i>	64
Grupo control	64
Grupo experimental	65
Noveno reactivo. <i>No me gusta aprender matemáticas</i>	66
Grupo control	66
Grupo experimental	67
Resumen del apartado	67

Conocimientos previos	72
Uso de las gráficas	72
Actividad 1. Identificación de gráficas	73
Grupo control	73
Grupo experimental	73
Actividad 2. Utilidad de las gráficas	74
Grupo control	74
Grupo experimental	74
Actividad 3. Gusto por aprender a hacer gráficas	76
Grupo control	76
Grupo experimental	77
Actividad 4. Finalidad de los ejes cartesianos	77
Grupo control	77
Grupo experimental	77
Actividad 5. Localización de puntos en el plano cartesiano	78
Grupo control	78
Grupo experimental	79
Actividad 6 y 7. Identificar la gráfica respecto a su ecuación	81
Grupo control	81
Grupo experimental	82
Resumen del apartado	83
Estudio de campo	84
Pregunta de investigación 1	84
Resumen del apartado	91
Pregunta de investigación 2	92
Correlación actitudes/aprendizaje	93
Pregunta de investigación 3	96
Resumen del apartado	100
Pregunta de investigación 4	100
Análisis de las estrategias de los alumnos	103
La calculadora como una herramienta para ejecutar algoritmos	104
Grupo control	104
Grupo experimental	106

La calculadora como una herramienta para hacer gráficas	108
Grupo control	108
Grupo experimental	109
La calculadora en el trabajo numérico y la producción de gráficas	112
Grupo control	113
Grupo experimental	113
Resumen del apartado	115
Capítulo V. Conclusiones	117
Actitudes de los alumnos hacia el aprendizaje de las matemáticas	117
Conocimientos de los alumnos	119
Uso de la calculadora	120
Consideraciones finales	120
Implicaciones sobre la enseñanza	121
Visión prospectiva	126
Referencias bibliográficas	128
Anexo I. actividades utilizadas antes del estudio de campo	131
Anexo II. Cuestionario de actitudes	137
Anexo III. Cuestionario de conocimientos	139
Anexo IV. Actividades utilizadas durante el trabajo de campo	143
Anexo V. Gráficas de los seis grupos de primer grado	151

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

El propósito central de este capítulo es mostrar de manera sucinta los principales apartados que conforman esta tesis y con esto sus propósitos y sus alcances. Iniciamos el capítulo reseñando una serie de vivencias que tuve la oportunidad de experimentar como profesor de educación básica y cómo éstas me condujeron a proponer el objeto de estudio de este trabajo; a continuación presentamos de manera breve los principales conceptos en que se enmarca este estudio citando el trabajo de los autores que de manera más determinante influyeron en su diseño y realización. En los restantes apartados abordamos en versiones resumidas el problema de investigación que adoptamos, las preguntas que orientaron este estudio y el método de investigación que se empleó; finalmente describimos cómo está estructurado este trabajo y hacemos una breve descripción del contenido de cada uno de sus capítulos.

Antecedentes

Este trabajo surgió de una inquietud profesional que se concretó en una búsqueda para formular respuestas documentadas a cuestiones que emergieron durante mi etapa de formación en la Escuela Normal Superior y después como profesor en el nivel de educación secundaria.

En mis primeras experiencias como observador del proceso educativo en el nivel de educación primaria percibí que en general los alumnos se encontraban inmersos en un ambiente de aislamiento, en donde la comunicación entre ellos era inhibida por organización del trabajo en el aula. En observaciones realizadas del trabajo frente a grupo de algunos profesores de este nivel educativo encontré que se privilegia el trabajo individual; la manera en que se distribuye a los alumnos en sus respectivos lugares propicia que a pesar de que las bancas están diseñadas para que las ocupen dos alumnos, pareciera que los profesores organizaban el trabajo para que hubiera la menor comunicación posible, sentando un niño con una niña, nunca dos del mismo

sexo juntos, y con frecuencia se acompañaban estas acciones con recomendaciones como las siguientes:

- El primero que hable se para en la esquina del salón.
- El trabajo lo tienen que hacer ustedes solos, por eso tiene cada quien sus útiles.
- Si tienen alguna duda yo se las respondo, no tienen porque molestar a sus compañeros.

También noté que el ambiente en algunas escuelas de educación secundaria presenta una tendencia muy marcada hacia el trabajo individual, en las observaciones que tuvimos la oportunidad de realizar durante nuestra última etapa de formación como alumnos de la escuela Normal Superior, nos pudimos percatar que la realidad en los salones de clase distaba mucho de la propuesta plasmada en nuestros planes de estudio; el mobiliario está diseñado para un solo alumno, ordenados en filas con vista hacia el pizarrón, haciéndose de esta manera muy difícil la comunicación, incluso la visual, ya que los alumnos solamente se podían ver las espaldas, y si alguno se atrevía a voltear hacia uno de los lados se podía hacer acreedor a una sanción por estar mal sentado. El papel del profesor, además de sancionar las actitudes como hablar en clase, levantarse de su banca, salir del salón sin permiso, etc., era básicamente un expositor de algunos ejemplos ante todos los alumnos en el pizarrón, para culminar la clase con una lista grande de ejercicios, los que generalmente eran muy similares a los expuestos como ejemplos. A esta forma de llevar la clase la considero como tradicionalista, pues era exactamente igual a la que habíamos experimentado durante nuestra formación en educación básica.

Se podría pensar que los profesores a los que tuve la oportunidad de observar no obtenían buenos resultados en su quehacer docente, lo paradójico de esto es que ellos gozaban de un prestigio como “excelentes maestros” ante sus compañeros, directivos y padres de familia. Esto propició en mí una inquietud profesional por saber en qué forma de trabajo los alumnos podían acceder mejor a los conocimientos, la que se sustenta en el trabajo individual de los alumnos o mediante otra organización del trabajo en el aula que se oriente a favorecer el aprendizaje cooperativo.

Esta incertidumbre se llegó a despejar un poco en mi primer año como profesor en el nivel de secundaria, las experiencias obtenidas durante este periodo fueron alentadoras, pude observar cómo los alumnos respondían más satisfactoriamente en el contexto de la nueva propuesta en que fuimos formados como educadores, la cual tenía dos objetivos principales: proponer a los alumnos situaciones en donde pusieran en práctica sus conocimientos y promover el trabajo grupal para lograr la construcción colectiva del conocimiento dentro del salón de clases.

El aprendizaje cooperativo visto desde la investigación

Poco tiempo después, al entrar como estudiante de maestría en la Universidad Pedagógica Nacional, el problema de investigación fue adquiriendo mayor solidez al estudiar diversos trabajos realizados sobre este tema. Tal es el caso de Ferreiro (2001), quien afirma que el aprendizaje realizado en el ambiente cooperativo es un medio eficaz para la obtención de un aprendizaje significativo en los alumnos, siendo esta estrategia una promisorio respuesta al rezago educativo que se observa en nuestros tiempos. Coll (2000), relaciona el aspecto socializador de las escuelas para dar un marco explicativo a la concepción constructivista, partiendo de la idea de que la escuela debe cumplir con este carácter: “... en lo que se refiere a la escuela, negar su carácter social y socializador parece bastante absurdo; en realidad, ésta es una de las razones de su existencia” (Coll, 2000, p.15).

El reporte de la OCDE (1991) acerca de las escuelas de calidad refuerza esta idea, señala que dichas escuelas no sustentan su eficiencia en la enseñanza que imparten los profesores, sino también en el bienestar y en el desarrollo general de los alumnos en otras dimensiones sociales. En este reporte se asigna a los aspectos emocionales y afectivos un papel como el motor principal para la construcción de significados en el aula. Asimismo, se identifica esto como un fruto de la interacción de los alumnos en un ambiente cooperativo, en el que su participación se basa en la aportación activa de conocimientos previos para la construcción de significados adecuados para los contenidos

escolares, en donde el profesor tiene el papel de mediador y guía entre el niño y la cultura.

Johnson y Johnson (1989) reportan que el aprendizaje cooperativo en las clases de matemáticas puede llegar a reforzar en los alumnos una comprensión de los conceptos que propicia la identificación de conexiones entre diversos procedimientos matemáticos; estos autores encontraron que un ambiente de aprendizaje cooperativo favorece la capacidad de utilizar los conocimientos matemáticos formalmente establecidos de manera más flexible.

Walmsley y Muñiz (2003) informan acerca de los resultados obtenidos en un estudio realizado con treinta y ocho alumnos de educación secundaria, donde se propusieron identificar el grado de aceptación que tienen las matemáticas cuando éstas se dan en un ambiente de trabajo cooperativo. Dicho estudio fue conducido en dos ambientes de trabajo diferentes; en un grupo de control se trabajó con diecinueve alumnos de manera individual, mientras que en otro grupo, denominado experimental, otros diecinueve alumnos se condujeron en un ambiente de trabajo cooperativo; en ambos casos se les pidió a los participantes que llenaran un cuestionario antes de iniciar el proceso de investigación para identificar el agrado que presentaban los sujetos hacia las matemáticas y posteriormente compararon estos datos con los obtenidos al final de la investigación utilizando la misma herramienta. Estos autores concluyeron que los alumnos que trabajaron en un ambiente cooperativo aumentaron de manera significativa su gusto hacia el estudio de las matemáticas, mientras que en los alumnos que trabajaron en un ambiente individual no se observaron evidencias de un cambio de actitud.

Cazden (1991) plantea la problemática que hay en las escuelas primarias de Estados Unidos de Norteamérica y en el Reino Unido debido a la carencia de socialización en las aulas, lo cual se refleja en una comunicación restringida entre los alumnos, lo que dio título a su trabajo (La conversación entre iguales). Él relata cómo en las aulas escolares, a pesar de ser ambientes humanos como los restaurantes o los autobuses, la organización social en su interior es muy diferente, ya que en las aulas el maestro planifica, controla e intenta

impedir que varias personas hablen al mismo tiempo. Este autor, basado en estudios de larga duración* realizados en los países antes citados, afirma de manera categórica que lo único que se ha llegado a socializar en las aulas es el mobiliario, se ha cambiado la manera de sentarse, de filas a grupos; sin embargo, la forma de trabajo predominante “es básicamente la tradicional, en grandes grupos, con el maestro ejerciendo el control en la parte frontal del aula, con niños trabajando solos en las tareas asignadas y el maestro controlando y comprobando sus progresos individuales, bien sea en el pupitre del alumno o desde su propia mesa” (Cazden, 1991, p.136).

Este autor propone una serie de ventajas que se podrían lograr si se cambiara la manera de trabajar en estos países, cita a autores como Vygotsky, Piaget, Clermont, Paley, Forman, Duckworth, Barnes, Kamler y Graves, los cuales coinciden en que la conversación entre iguales potencia el desempeño académico de los educandos.

Ruiz (2001), establece de manera clara las habilidades que demanda el sector laboral para la formación de profesionales competentes, las cuales incluyen el liderazgo, el trabajo en equipo, la competencia comunicativa, la toma de decisiones, el poder desarrollar, seguir y evaluar proyectos, la detección y solución de problemas. Propone que un aspecto importante que debemos resaltar es que la mayoría de estas habilidades se desarrollan cuando el proceso de enseñanza aprendizaje se da en un ambiente de trabajo cooperativo; a este respecto Ferreiro (2001) propone que el aprendizaje cooperativo desarrolla en los alumnos cualidades como las siguientes:

- ❖ Confianza en sí mismos.
- ❖ Capacidad de asumir eventualmente el liderazgo.
- ❖ Interés por participar en la toma de decisiones y la resolución de conflictos.
- ❖ Competencias en la investigación.
- ❖ Competencias comunicativas.

* En los EEUU, Gooblad y sus colegas observaron 1,016 clases de 1983 a 1984 y en el Reino Unido, Galton, Simon y Croll observaron 58 clases en 19 escuelas primarias 1980.

Los reportes antes descritos serán discutidos con mayor amplitud en el capítulo correspondiente al marco conceptual, en el presente capítulo proporcionan un referente a mis experiencias vivenciales. En las secciones siguientes haremos una exposición sucinta del problema de investigación, las preguntas que orientaron el desarrollo de este trabajo y el método de investigación que empleamos. En el capítulo dedicado a la metodología empleada en el presente estudio se abordarán estas cuestiones con mayor amplitud.

El problema de investigación

Mi corta experiencia en el ambiente educativo propiciando la interacción entre los alumnos como estrategia para que logren acceder de mejor manera a los conocimientos, aunada a las observaciones realizadas donde se privilegiaba el aprendizaje de manera individual, dieron lugar a una serie de preguntas encaminadas a conocer con más profundidad en qué ambiente de aprendizaje los alumnos podían desempeñarse con mayor éxito, en el ambiente cooperativo o en el ambiente individual.

De esta inquietud surgió la investigación que aquí se presenta, su principal objetivo es obtener evidencia empírica bajo métodos rigurosos de las diferencias que se producen cuando se trabaja con un grupo de alumnos de manera individual (grupo control) y cuando se trabaja con otro grupo de alumnos de manera cooperativa (grupo experimental), y cómo estas diferencias pueden beneficiar o no el aprendizaje de las matemáticas escolares.

Preguntas de investigación

Las preguntas que presentamos a continuación orientaron el desarrollo de este estudio y determinaron de manera importante la elección del método de recolección y análisis de datos:

1. ¿Difieren las repuestas de los alumnos que trabajan en un ambiente de aprendizaje cooperativo de las que formulan los alumnos que trabajan individualmente?

2. ¿Se observan diferencias en las actitudes hacia las matemáticas por parte de los alumnos que trabajan en un ambiente de aprendizaje cooperativo y los que trabajan de forma individual?
3. ¿Existen diferencias entre las conjeturas que formulan los alumnos que trabajan en un ambiente de aprendizaje cooperativo y los que trabajan de manera individual?
4. ¿Se observan diferencias entre los alumnos que trabajan en un ambiente cooperativo y los que lo hacen en forma individual con relación a las formas en que transitan del conocimiento no convencional al conocimiento formal?

Método de investigación

Una vez formuladas las preguntas de investigación, el siguiente paso fue definir el método que usaríamos en nuestro trabajo. Elegimos el método experimental, pues nos permite abordar una comparación entre dos escenarios en ambientes controlados, lo cual se adapta bastante a nuestra inquietud de estudiar el desempeño de los alumnos en dos ambientes de aprendizaje: cooperativo e individual. Nuestro interés presenta puntos que convergen con lo planteado en el método experimental: el experimentador manipula ciertos estímulos, tratamientos o condiciones ambientales para observar cómo afecta esto la conducta del sujeto, midiendo el desempeño con el fin de comparar la efectividad entre un ambiente que fue expuesto a la variable con el que no fue expuesto, identificando las diferencias que se dan, que es precisamente lo que pretende hacer en este trabajo.

Estructura de la tesis

Además del presente capítulo este trabajo consta de otros cuatro capítulos. En el Capítulo II se discute lo que la investigación ha reportado respecto al problema de nuestro interés; en Capítulo III se aborda el método de investigación que empleamos para este trabajo, en el Capítulo IV se discuten los resultados encontrados y en el Capítulo V se discuten los alcances y limitaciones de este trabajo a la luz de las preguntas de investigación que formulamos.

En el *Capítulo II*, Marco Conceptual, se presenta una revisión de la literatura de investigación respecto a los siguientes temas:

- ❖ Aprendizaje cooperativo.
- ❖ Constructivismo.
- ❖ El uso de la calculadora como herramienta didáctica en el tema de funciones lineales.

La revisión de la literatura de investigación nos permite delimitar los alcances, pertinencia y originalidad del estudio que se desarrolla en esta tesis.

En el *capítulo III*, El método de investigación, se abordan las siguientes cuestiones:

- ❖ El método de Análisis Cualitativo.
- ❖ Diseño de la investigación: Sujetos, ambiente escolar, ambiente de trabajo en el aula, las fuentes de datos y las fases del trabajo de campo: el estudio exploratorio y el estudio principal.

En el *capítulo IV*, Análisis de Resultados, se describen y analizan los datos obtenidos durante el trabajo de campo y cómo éstos nos permiten formular los resultados de esta investigación.

En el *capítulo V*, "Conclusiones", se discuten las experiencias obtenidas durante el desarrollo del trabajo de investigación, así como algunas implicaciones hacia la enseñanza que se derivan de nuestro estudio. Este apartado finaliza con la exposición de cuestiones no resueltas que requieren atenderse en una siguiente etapa de investigación.

CAPÍTULO II

MARCO CONCEPTUAL

Introducción

El objetivo de este capítulo es discutir los conceptos y teorías que dieron sustento a esta investigación. Iniciamos este capítulo con el tema de aprendizaje cooperativo, en donde resaltamos la importancia del trabajo en equipo como un recurso en la búsqueda de mejores resultados en las producciones de los estudiantes y en el ámbito afectivo respecto a sus relaciones con sus compañeros y sus profesores; después de esto abordamos el tema del constructivismo, en donde se discuten los preceptos de esta corriente del pensamiento y cómo los alumnos pueden llegar a construir su conocimiento; a continuación se presenta un apartado aprendizaje escolar, en donde se abordan, entre otras cosas posturas teóricas acerca de cómo se da el aprendizaje en la escuela; en los últimos apartados de este capítulo se aborda el tema de la calculadora, iniciando con una breve historia de la incorporación de esta herramienta en el trabajo del aula y concluyendo con la reseña de algunos reportes de investigación, en particular se discute el uso de esta herramienta en el salón de clases y las posibilidades que puede brindar para potenciar de manera significativa el aprendizaje de los alumnos.

Aprendizaje cooperativo

Podríamos citar varios pasajes de la historia el hombre que muestran puntos de concordancia con los principios que caracterizan al aprendizaje cooperativo. Por ejemplo, aquéllos donde se resaltan los aspectos positivos de una forma de vida social en la que los sujetos comparten su tiempo y su espacio con individuos de características diferentes y se proponen como objetivos desarrollar el bienestar común y establecer su cultura en un ambiente de cooperación, en donde cada miembro de la sociedad debe cumplir ciertos roles, estableciendo reglas de

convivencia, determinando significados y sentidos a lo establecido en esta organización.

Ferreiro (2001) plantea que una educación basada en los preceptos del aprendizaje cooperativo puede ayudar a resolver muchos problemas educativos que enfrentamos actualmente. *“El aprendizaje cooperativo es, sin duda la respuesta de la educación de fines del siglo XX y principios del siglo XXI”* (Ferreiro (2001, pp. 22). Los principios que subyacen en la propuesta del aprendizaje cooperativo están basados en la idea de la socialización de una situación problemática, en donde a cada individuo se le hace consciente de que su participación es fundamental para alcanzar un objetivo común entre todos los miembros de su comunidad. Esto hace posible que los integrantes incrementen de forma notable su autoestima, por ejemplo, si los alumnos se dan cuenta que su participación fue fundamental para resolver un problema hace que ganen mayor seguridad para argumentar sus respuestas y discutir sus puntos de vista.

Algunos autores reportan empleando argumentos como los siguientes:

- El aprendizaje cooperativo ayuda a los alumnos en el desarrollo de habilidades para relacionarse, cultivan destrezas para la comunicación, desarrollan confianza en sí mismos y en los demás, se proponen asumir eventualmente el liderazgo, les interesa participar en la toma de decisiones y en la resolución de conflictos (Johnson y Johnson, 1989).
- El aprendizaje cooperativo propicia que los estudiantes que trabajan juntos son responsabilicen no sólo de su aprendizaje, sino también del de sus compañeros, Lindauer y Petrie (1997) [citado en Walmsley, A. y Muñiz, J. (2003)].
- Ferreiro (2000) propone que las relaciones entre las personas en torno a las tareas a realizar constituyen una importante fuerza motriz en el desarrollo humano, que esto tiene un extraordinario impacto en la autoestima, la auto

realización que se refleja en un desempeño exitoso de los miembros del equipo en su totalidad y se manifiesta en eficiencia productiva y altos niveles de competitividad.

Estos autores coinciden en que el aprendizaje en un ambiente de cooperación es un detonante en el desarrollo de características como las que mencionamos a continuación:

- Propicia un incremento en la autoestima de los alumnos que fomenta su capacidad de argumentar y defender sus ideas.
- Favorece una mayor eficiencia en el trabajo.
- Proporciona oportunidades para que asuman una actitud de liderazgo.

Coll (2000), reporta que el factor afectivo puede influir en el aprendizaje cooperativo, aunque destaca que es una explicación hipotética, pues no se disponen de suficientes datos empíricos que le den un sustento más sólido a esta suposición. Al respecto discute que en el aprendizaje intervienen numerosos aspectos de tipo afectivo y relacional; que el éxito que alcanzamos desempeña un papel definitivo en la construcción del concepto que tenemos de nosotros mismos (auto concepto), en la estima que nos profesamos (autoestima) y, en general, en todas las capacidades relacionadas con el equilibrio personal. Este autor considera que dichas capacidades median la actualización de otras, por ejemplo, las capacidades de relación interpersonal o las cognitivas. En el proceso en que se da el aprendizaje cooperativo se establecen también vínculos afectivos entre los miembros de los equipos que propician un equilibrio interpersonal y motivan la necesidad de aprender. Este autor señala que el interés de los alumnos hacia un tema de estudio es un factor importante en el aprendizaje y que esto puede estar relacionado con los resultados que se obtengan en un ambiente de aprendizaje cooperativo, que, a su vez, depende de un propósito compartido y la comprensión colectiva /de la tarea, la cual debe responder a sus propias necesidades.

Para sentir interés hay que saber qué se pretende y sentir que ello responde a alguna necesidad (de saber, de realizar, de informarse, de profundizar); esto implica que si un alumno no conoce el propósito de una tarea y no puede relacionar dicho propósito con la comprensión de lo que la tarea implica y con sus propias necesidades, muy difícilmente va a poder llevar a cabo lo que supone el estudio en profundidad.

En un ambiente de aprendizaje cooperativo se debe establecer la necesidad de resolver un problema de manera cooperativa, en donde el propósito central radica en formular argumentos válidos que permitan llegar a una solución, estimulando el valor de trabajar juntos, de compartir un compromiso y una responsabilidad hacia su aprendizaje y el de los demás, esto puede favorecer en el alumno la formación de un propósito claro, que genere una mayor profundidad en el conocimiento del tema estudiado.

Brousseau (1986), en su teoría de las situaciones didácticas, plantea que una situación problemática en un ambiente de aprendizaje cooperativo debe incluir el establecimiento de una responsabilidad de aprender por parte de los alumnos, pero esta responsabilidad debe ser recíproca entre sus compañeros y el profesor, instituyéndose algo parecido a un contrato (contrato didáctico): “[En todas las situaciones didácticas] se establece una relación que determina -explícitamente en una pequeña parte, pero sobre todo implícitamente- lo que cada participante, el profesor y el alumno, tiene la responsabilidad de hacer y de la cuál será, de una o de otra manera, responsable frente al otro. Este sistema de obligaciones recíprocas se parece a un contrato” Brousseau, (1986, pp. 229) [citado en Ávila (2004)].

El incremento en la autoestima es otro de los beneficios que se obtienen al aplicar una forma de trabajo cooperativo, cuando aprendemos tenemos una imagen positiva de nuestra persona, la motivación que implica saber que podemos aprender desencadena una mayor seguridad en los individuos para explicar las

estrategias con que llegaron a completar la actividad, defendiendo y argumentando frente a los demás su postura, forzándose a pensar más profundamente acerca de sus ideas, todo esto no sería posible si el alumno no tuviera seguridad en sí mismo (alta autoestima).

Coll (2000), afirma que cuando uno aprende, la experiencia vivida nos ofrece una imagen positiva de uno mismo y refuerza nuestra autoestima, lo que sin duda proporciona un buen bagaje para continuar afrontando los retos que se le presentan. Lo anterior nos induce a pensar que la aplicación de esta teoría en el ámbito educativo sería muy natural, pues el hombre salvo excepciones vive de manera aislada. Casi siempre el grupo social es el medio natural del ser humano, por el cual se concibe, nace, sobrevive, crece, se desarrolla, transforma, crea y trasciende; primero en la familia, más tarde en el grupo de amigos y el grupo escolar, luego en el grupo laboral y social.

Ferreiro (2001), reporta que en el grupo escolar surgen una serie de situaciones que obstaculizan la creación de un ambiente de aprendizaje cooperativo, menciona que en muchas escuelas se pueden observar rasgos como los siguientes:

- Un aislamiento de los problemas sociales.
- Un aprendizaje escolar tedioso para la mayoría, mientras que el aprendizaje fuera de la escuela resulta placentero.
- Una oferta educativa homogénea pese a la diversidad humana.
- Un proceso centrado en la enseñanza y no en el aprendizaje.
- Un énfasis en el aprendizaje individual competitivo e individualizado.
- Una distribución frontal, tal como hace siglos se disponía a alumnos y maestro en el salón de clases; el maestro al frente y los alumnos dándose la espalda, de frente al instructor que declama.
- Bajo porcentaje de tiempo dedicado a que los alumnos participen en la construcción del conocimiento.
- Una evaluación del aprendizaje formal, individual y de resultados.

- Una comunicación deficiente entre director-profesor; profesor-alumno; alumno-alumno; escuela-familia.
- Un criterio de ciencia como un sistema cerrado de nociones acabadas, las cuales se reproducen tal cual el profesor las “explica” y se exponen en el libro de texto, lo que no da oportunidad ni posibilidad de redescubrir y/o construir el conocimiento.
- Un libro de texto, en la mayoría de los casos, único, lineal y descriptivo que invita más a la memorización reproductiva que a la reflexión.
- Una secuencia rígida de contenidos de enseñanza.
- Poca responsabilidad y compromiso del alumno con su propio aprendizaje y el de sus compañeros.

Lo anterior dificulta indudablemente la práctica de un aprendizaje cooperativo, al parecer el sistema educativo no está diseñado para facilitar este modo de trabajo; Ferreiro (2001) plantea ocho puntos que pueden favorecer el desarrollo de un aprendizaje cooperativo:

1. Precisión de la tarea.
2. Establecimiento colectivo de las normas y principios.
3. Asistencia y puntualidad a las sesiones programadas.
4. Distribución de responsabilidades dentro del grupo.
5. Participación constante de todos los miembros.
6. Empleo de técnicas de trabajo grupal.
7. Dinámica grupal favorable, un juego cambiante de papeles y una atmósfera psicoafectiva positiva.
8. Satisfacción de las necesidades de aprendizaje.

Este autor propone que cumpliendo estos puntos se podría crear un ambiente de aprendizaje cooperativo dentro del salón de clases, fomentando de esta manera la incorporación temprana del alumno a un sistema de trabajo privilegiado por el sector productivo de acuerdo a las necesidades laborales de nuestro tiempo, las cuales, según Ruiz (2001), exigen desarrollar habilidades intelectuales de auto

aprendizaje emprendedoras y *transferibles*, así como conocimientos generales e interdisciplinarios. Es interesante cómo define la autora las habilidades transferibles, ya que esto tiene muchas semejanzas con las habilidades que los alumnos desarrollan en un ambiente de aprendizaje cooperativo: “De esas categorías [habilidades intelectuales de auto aprendizaje emprendedoras y transferibles] debemos detenernos en la referida al desarrollo de habilidades transferibles, porque ellas encierran la concepción de competencias generales que necesita el futuro egresado para poder adaptarse a los requerimientos cambiantes del mundo laboral” (Ruiz, 2001, p. 234).

Habilidades transferibles

- Liderazgo.
- Trabajo en equipo.
- Competencia comunicativa.
- Conocimiento de un idioma extranjero.
- Detección y solución de problemas.
- Aprender a aprender.
- Competencias investigadoras.

Según la autora, estos puntos se retoman de las exigencias del sector productivo como las cualidades que deben cubrir los egresados de las escuelas del nivel superior para una mejor incorporación a la fuerza de trabajo. Si tomamos en cuenta lo anterior, podemos deducir que si fomentamos un ambiente de aprendizaje cooperativo en las escuelas de nivel básico, estaremos desarrollando en los alumnos cualidades que le serán de utilidad en el ámbito laboral, creándose mejores expectativas de vida para los alumnos (Lindauer y Petrie, 1997; Ferreiro, 2001; Johnson y Johnson, 1989; Brousseau, 1986; Coll, 2000).

Constructivismo y el aprendizaje escolar

Coll, (2000) plantea que el constructivismo no es un método ni un modelo, mucho menos una receta que asegure el éxito del aprendizaje de los estudiantes,

simplemente es un principio epistemológico fundamentado y articulado en diferentes teorías que nos ayudan a entender, diagnosticar y establecer diferentes formas de actuar ante problemas del tipo enseñanza-aprendizaje en situaciones y contextos diferentes. De acuerdo con este autor, la concepción constructivista no es un libro de recetas, sino un conjunto articulado de principios desde donde es posible diagnosticar, establecer juicios y tomar decisiones fundamentadas en el proceso de enseñanza

Algunos otros autores, como Piaget y Vygotsky, se centraron en el constructivismo desde el contenido y funcionamiento de la mente; por ejemplo, el constructivismo psicogenético de Piaget (1978) plantea que la forma en que los niños llegan a aprender es por medio de la interacción con el medio físico, mientras actúan sobre éste como individuos. Según Piaget la manera de construir el conocimiento se centra en las formas en las que los niños llegan a comprender propiedades físicas y lógicas del mundo de manera individual, minimizando el papel formativo de la interacción social.

En la teoría de equilibración, Piaget (1978) plantea que el niño, al enfrentarse con las diferencias existentes entre su forma de ver el mundo y la nueva información que le llega, modifica su forma de pensar para ajustarla mejor a la realidad, alterando sus esquemas conceptuales para que la nueva experiencia pueda ajustarse mejor, estableciéndose el equilibrio a un nivel superior.

La mayor parte de la teoría de Piaget se centraba en el conflicto cognitivo causado por el desequilibrio que se produce cuando un individuo actúa sobre el medio físico, sin embargo, en otros trabajos, Piaget (1932, 1928, 1945 y 1977) mantenía que el conflicto cognitivo podía surgir en el curso de la interacción social.

Para Vygotsky el centro de interés se ubica en el desarrollo de lo social, bajo la idea de que los procesos sociales no son simplemente transferidos al individuo, sino por el contrario, la apropiación del individuo de lo practicado en la interacción

social implicaba una transformación activa. *“Una operación que inicialmente representa una actividad externa se reconstruye y comienza a suceder internamente, un proceso interpersonal queda transformado en otro intrapersonal. En el desarrollo cultural del niño toda función aparece dos veces: primero a nivel social y, más tarde, a nivel individual: primero entre personas –interpsicológica- y después en el interior del propio niño –intrapsicológica- esto puede aplicarse igualmente a la atención voluntaria, a la memoria lógica y a la formación de conceptos. Todas las funciones superiores se originan como relaciones entre los seres humanos”* (Vygotsky, 1978, p. 93)

Un concepto que Vygotsky proponía para comprender la naturaleza interactiva y social del desarrollo del niño es el de “zona de desarrollo próximo”, en la que el niño actúa más allá de los límites de su capacidad individual, apoyado por una persona con más experiencia.

La Zona de Desarrollo Próximo *“es la distancia entre el nivel de desarrollo real actual y el nivel de desarrollo potencial, determinado mediante la resolución de problemas con la guía o colaboración de adultos o compañeros más capaces”* (Vygotsky, 1978, p. 86).

Lo anterior es retomado por Coll (2000), quien afirma que la postura constructivista en educación se alimenta de las aportaciones de diversas corrientes psicológicas: el enfoque psicogenético piagetano y en el aprendizaje significativo de la psicología vygotskiana.

En el presente estudio asumimos la postura de que el constructivismo es una teoría que pretende utilizar la base estructural de conocimientos existentes en los alumnos para fundamentar los nuevos conocimientos, es importante tomar en cuenta que este proceso no se da utilizando solamente las aportaciones de los alumnos, sino que parte de marcos explicativos ordenados y coherentes establecidos formalmente por la escuela. Surge un problema cuando se intenta

explicar un tema sin brindar un marco referencial acorde al contexto y al bagaje cultural de los educandos. Esto crea un ambiente de desinterés debido a la falta de sentido que los alumnos perciben en los contenidos curriculares, ya que en la mayoría de los casos estos contenidos carecen de un propósito claro, teniendo como consecuencia que los alumnos vean a los nuevos conocimientos estériles, sin un sentido funcional.

Ortega (1995), propone que no basta con que el maestro conozca lo que el alumno sabe, piensa o es capaz de hacer sobre un problema concreto. Es muy importante que el propio alumno también lo sepa, sea consciente de ello, porque la toma de conciencia le implica activamente en las actividades siguientes y en su propio proceso de cambio cognitivo. En el libro para el maestro se indica que uno de los propósitos de la educación matemática es proporcionar a los estudiantes el sentido de utilidad de esta asignatura. “El estudio de las matemáticas debe recurrir a problemas de la vida cotidiana, con el fin de despertar el interés de los estudiantes y que perciban la utilidad de las matemáticas” (SEP, 2001, pp. 18). Consideramos que este punto concuerda con los planteamientos del constructivismo en lo referente al establecimiento de una conexión con la realidad de los educandos, esto puede favorecer una mejora en el aprendizaje al fomentar el análisis y la reflexión sobre una práctica determinada por el entorno del sujeto, así como también de sus conocimientos previos, dándole a la educación una función socializadora que considera el desarrollo individual de los sujetos, tomando a las teorías como base.

Las teorías, como marcos de referencia, serán adecuadas en la medida en que puedan no sólo ofrecer alguna explicación acerca de las interrogantes a que aludíamos y a otros muchas que pueden engrosar la lista, sino también en la medida en que dicha explicación permita articular las diversas respuestas en un marco coherente, tanto a nivel interno como a nivel externo. Una explicación plausible acerca de la enseñanza y el aprendizaje en la escuela no puede ignorar ni la función social y socializadora de la educación escolar, ni el hecho que la

educación que recibe un alumno se articula desde un marco institucional que trasciende, aunque no ignora, la dimensión más individual de la enseñanza para integrarla en un proyecto educativo común (Coll, 2000).

Consideramos que esto puede permitir la oferta de una educación de calidad, en donde el interés se centre en satisfacer distintas necesidades individuales de los alumnos, sin descuidar el carácter socializador que la institución escolar debe brindar. Coll (2000), propone que las escuelas debieran tener las siguientes características:

- Ofrecer un clima favorable para el aprendizaje, en el que exista un compromiso con normas y finalidades claras y compartidas.
- Favorecer que los profesores trabajen en equipo, comprometidos con la innovación y se responsabilicen de la evaluación de su propia práctica.
- Que cuenten con una dirección eficaz.
- Que los padres apoyen la tarea educativa.
- Que existan valores propios de la escuela (identidad).
- Que se racionalice el tiempo de aprendizaje.
- Que cuenten con el apoyo activo de las autoridades educativas.

Este autor destaca la importancia que tiene la adopción de un currículo de manera que se consideren las necesidades de los alumnos, sus características y sus valores, en donde los profesores tomen en cuenta el bagaje particular de los alumnos, Coll hace énfasis en que esto le atribuirá un sentido y un significado a los contenidos y entonces se podrá hacerlos significativos y funcionales.

Al respecto Ausubel (1983) menciona que un aprendizaje puede llegar a ser significativo cuando los alumnos llegan a relacionar las nuevas ideas con algún aspecto existente en su estructura cognoscitiva, sirviendo como un anclaje para los nuevos conocimientos las imágenes y símbolos ya significativos en el bagaje conceptual del educando

Es importante mencionar que la escuela, al igual que la familia y los medios de comunicación, brindan a los alumnos una cultura determinada en el cual se ven directamente relacionados, en esta medida la escuela cumple una función socializadora en la que, desde una concepción constructivista del aprendizaje y de la enseñanza, se parte del hecho obvio de que la escuela hace accesible a sus alumnos aspectos de la cultura que son fundamentales para su desarrollo personal, en donde el aprendizaje contribuye al desarrollo en la medida en que aprender no es copiar o reproducir la realidad. Según Coll (2000), bajo la concepción constructivista, aprendemos cuando somos capaces de elaborar una representación personal sobre un objeto de la realidad o contenido que pretendemos aprender. Cuando se da este proceso decimos que estamos aprendiendo significativamente, construyendo un significado propio y personal para un objeto de conocimiento que objetivamente existe.

En resumen, podríamos plantear que el constructivismo parte de la idea de considerar a los individuos en su realidad y sus necesidades de aprendizaje, para articular el currículo al contexto cultural atendiendo las diferentes necesidades culturales de cada alumno, dando como resultado un aprendizaje significativo, en donde el individuo hace una reinterpretación de lo establecido formalmente con su bagaje cultural, estableciendo un sentido en su acción de aprendizaje. De acuerdo con lo anterior, podemos decir que el éxito de las escuelas en cuanto a su calidad educativa no radica solamente en los resultados que ofrecen los alumnos, sino en la capacidad que tengan éstas para ofrecer a cada alumno el currículo que necesita para su desarrollo sin desatender lo culturalmente establecido.

Aprendizaje escolar

El aprendizaje surge como una necesidad de conocer, por lo tanto el contenido que pretendemos enseñar debe desencadenar un interés en el estudiante. Por ejemplo, para aprender a manejar un automóvil, lo que motiva es la necesidad por saber utilizarlo para trasladarse con mayor facilidad y comodidad de un lugar a otro. Esta necesidad desencadena una serie de nuevos aprendizajes que el

individuo relaciona con conocimientos anteriores (el significado de los colores de los semáforos, en qué carril tiene que circular, qué hacer cuando se aproxima a un tope etc.).

Un punto importante que se debe considerar para que el alumno sienta interés por un conocimiento es el que responda a un propósito del sujeto. Coll (2000), propone que para sentir interés hay que saber qué se pretende y sentir que ello cubre alguna necesidad (de saber, de realizar, de informar, de profundizar); desde luego, si el alumno no conoce el propósito de una tarea y no puede relacionar dicho propósito con la comprensión de lo que la tarea implica y sus propias necesidades, muy difícilmente va a poder llevar a cabo lo que supone el estudio en profundidad.

Siguiendo con el ejemplo del automóvil, el propósito es saber conducir y con ello se cubre una necesidad de transporte más rápido y con mayor comodidad. Desgraciadamente esto a veces no se da en los contenidos escolares, en ocasiones en los programas se proponen teorías que aparecen completamente alejadas de alguna utilidad práctica para el estudiante, formándose la idea que las matemáticas son útiles sólo para un grupo reducido de personas y que en ellos esta materia no cumple ningún propósito, ocasionando que los conceptos matemáticos sean aprendidos tal cual se encuentran en los libros de texto (más que una interpretación personal de ellos, más acorde con un enfoque profundo), en donde el profesor sólo crea en los alumnos una ansiedad por recordar conceptos y fórmulas en lugar de mostrarse preocupado por la forma en que sus alumnos tienen que recordar la información y cómo les permite esta información cumplir con los requisitos de la tarea. Coll, (2000). A este respecto, nosotros asumimos que la educación pierde sentido al convertir los temas del currículo en un fin en sí mismo, más que un medio para un fin.

Cuando los contenidos que se manejan en las instituciones escolares no se reflejan de alguna manera en la representación de la realidad de los educandos, o

no propician una reconstrucción individual de sus conocimientos previos a lo culturalmente establecido, no se puede decir que los educandos estén aprendiendo; al menos esto puede afirmarse desde la concepción constructivista que asume que en la escuela los alumnos aprenden y se desarrollan en la medida en que puedan construir significados adecuados en torno a los contenidos que configuran el currículo escolar (Coll, 2000).

El constructivismo propone actividades que requieren que el individuo enfrente un problema, donde tiene que aplicar parte de su estructura de conocimientos previos; una vez resuelto el problema, modifica esa estructura e incorpora de manera significativa el nuevo aprendizaje. En este proceso el profesor actúa como guía y mediador entre el niño y la cultura establecida como válida por el currículo. Según Coll (2000), este esquema de cómo se da el aprendizaje permite formular preguntas nucleares para la educación, nos permite contestarlas desde un marco explicativo articulado y coherente y nos ofrece criterios para abundar en las respuestas que requieren información más específica.

La calculadora como una herramienta en el aula

El hombre se ha servido de herramientas para satisfacer ciertas necesidades y hacer más fácil su trabajo, por ejemplo, para contar, seguramente sintió la necesidad de elaborar un sistema que le permitiese utilizar números relativamente grandes, utilizando como herramienta en un primer momento los dedos de las manos y los dedos de los pies. Después el hombre se sirvió de otras herramientas que le permitieran asociar un grupo de signos a una colección de objetos observados, permitiendo que estas herramientas organizaran mejor una relación biunívoca de ciertas cantidades.

La historia da fe de la forma en que durante la evolución de las matemáticas se crearon herramientas cada vez más poderosas que ayudan a realizar cálculos más complejos y a que éstos representaran más fielmente la realidad dada,

excepto de aquéllas que caracterizan directamente la cantidad y la forma, como en las relaciones biunívocas (Ribnikov, 1987).

La primera máquina para calcular de que se tiene noticia es el ábaco, introducido de tierras orientales hace 5000 años aproximadamente. Esta máquina permite organizar en grupos ciertas cantidades para el análisis en diferentes órdenes de agrupación. Lamentablemente el uso de esta máquina no prosperó y dejó de utilizarse debido a que su uso no fomentaba la noción posicional de los números procedente de los hindúes, los cuales permitían que un gran número de personas pudieran utilizar algoritmos parecidos a los que utilizamos actualmente (Urdina, F. 1997).

Con el avance de la tecnología se fueron creando máquinas más poderosas, hasta llegar a nuestros días, en donde el uso de la tecnología electrónica en el salón de clases es hoy una herramienta que puede potenciar el aprendizaje de los educandos, pues favorece la reorganización de las ideas amplificando las habilidades anteriores. A este respecto, Moreno (2004, *pp. 107*) propone que “la forma de emplear la tecnología pasa, al inicio, por un proceso de amplificación y, después, por un proceso más complejo, de reorganización. La amplificación puede definirse como “hacer lo de antes, pero mejor”. En tanto que la reorganización como “hacer nuevas cosas y reorganizar las anteriores en función de las nuevas oportunidades”.

Lo anterior nos sugiere que la tecnología aplicada en la educación crea por una parte un ambiente virtual que requiere entender una serie de reglas que permiten la manipulación de esta herramienta, en el caso de matemáticas, esta herramienta genera en los alumnos la necesidad de apropiarse del lenguaje matemático para establecer una manipulación de ese ambiente, y esto nos sitúa en la posición de desencadenar una exploración sistemática construyendo argumentos en favor de una presuposición.

En este caso podemos decir que las tecnologías son una herramienta que propicia la superación de las limitaciones que la naturaleza impone a las personas, por ejemplo, el uso de la calculadora permite la creación de un microcosmos en donde los códigos de la aritmética, del álgebra y la geometría son indispensables para que el alumno manipule satisfactoriamente esta herramienta, de esta manera la calculadora simula este microcosmos, en donde se da una realidad que en el contexto inmediato del alumno no se presenta de manera natural. Cedillo (2004, p. 90) señala que “empleada de manera adecuada, la calculadora puede simular un microcosmos donde “se habla” el lenguaje de las matemáticas; concretamente, los códigos de la aritmética, el álgebra, y la geometría. Una vez que se activa la tecla que enciende la calculadora, cualquier otra cosa que se quiera hacer después con ella es a través del código matemático”.

Una cuestión muy importante en el uso de la tecnología como herramienta para el aprendizaje es cómo debe verse su aplicación. Entre otros autores, Moreno (2004, p.95) recomienda que la tecnología se emplee como un medio para un fin, más no como un fin en sí mismo: “cuando se usa la tecnología en la escuela, hay que reconocer que no es en sí misma el objeto central de nuestro interés, sino el pensamiento matemático que puedan desarrollar los estudiantes bajo la mediación de dicha tecnología”.

Esto resulta de vital importancia, pues desde que las herramientas se han incorporado en el trabajo en las aulas éste ha sido el principal propósito de trabajo. Al respecto, Comenius (1592-1676) [citado en Szendrei (1996)] estableció que el principal objetivo de usar objetos especiales en el salón de clases era que los pupilos debían aprender a usar la realidad de los sentidos y no únicamente palabras. En este caso Comenius plantea que los objetos especiales (herramientas en la enseñanza) eran básicamente un medio para que sus pupilos desarrollaran la realidad de sus sentidos, asignando a los objetos especiales un carácter de mediador en el aprendizaje.

A través de la historia se han utilizado básicamente dos tipos de herramientas en la enseñanza dentro de un salón de clases, la diferencia entre éstas radica en que unas fueron creadas como herramientas para la vida cotidiana y posteriormente se incorporaron en las escuelas y las otras fueran creadas especialmente para una realidad escolar. En el caso de las calculadoras su creación obedece más al de una herramienta para el uso de la vida cotidiana, pero su incorporación al ambiente escolar encaja perfectamente con la definición de aparato didáctico que dio Montessori para materiales educativos; ella definió como aparato didáctico al que proporciona medios para alcanzar el desarrollo sensorial, motor e intelectual, a través de la libre ejecución del interés de los niños, logrando con esto que los alumnos estimulen y desarrollen ciertas habilidades que en la vida cotidiana difícilmente podrían alcanzar (Szendrei, 1996).

Es importante señalar que el uso de las calculadoras dentro de un salón de clases no garantiza por sí mismo que los alumnos potencien su aprendizaje, sino que esto depende en el manejo que el profesor establezca como óptimo para una clase en un determinado tema, el cual debe responder a ciertas necesidades de la comunidad estudiantil.

El uso de la calculadora en el salón de clases

Existen reportes de investigación que muestran resultados en donde se encuentra que la calculadora funcionó como una herramienta capaz de incrementar el aprendizaje de las matemáticas significadamente dentro del salón de clases (Cedillo, 1997; Wenzelburger, 1993; Pantoja, 2002; Udina, 1997). Con base en los resultados de investigación obtenidos, estos autores mantienen la postura de que el uso de la calculadora ofrece nuevas oportunidades para el desarrollo del trabajo en clase y brinda una alternativa para dar respuesta a algunas necesidades y dificultades de aprendizaje que los alumnos manifiestan, enfatizando que el uso de la calculadora no sustituye las destrezas de hacer cálculos mentales o con el lápiz y el papel, sino que esta herramienta es un importante complemento para los recursos disponibles en el aula. Cockcroft (1982:378) [citado en Udina (1997)]

reporta que la calculadora no reduce de ninguna manera la necesidad de comprensión matemática por parte de la persona que la está utilizando.

Uno de los argumentos más fuertes de los trabajos antes citados radica en el potencial que tiene la calculadora para desarrollar en los alumnos la habilidad de la exploración; según Johnson (1978) [citado en Wenzelburger (1993)] el área más fructífera y rica para actividades con calculadoras está en la exploración. Mediante la exploración los alumnos encuentran nuevas estrategias para resolver problemas, ya que éstos se concentran en el proceso más que en las operaciones, permitiendo que el alumno logre acceder con mayor facilidad a conceptos matemáticos que van más allá de simples cálculos aritméticos (Pantoja, 2002).

Estos autores afirman que el tiempo que se invierte en la enseñanza de los algoritmos es superior a su utilización en los problemas, y que esto se debe a que se ha creído durante mucho tiempo que el objetivo era el aprendizaje de los algoritmos como elementos centrales en la resolución de problemas. Es decir, se suponía que si un alumno aprendía a multiplicar correctamente, entonces podría resolver un buen número de problemas (Udina, 1997). La ventaja que ofrece la calculadora en la resolución de problemas va más allá de enseñar unos conceptos o técnicas, un uso adecuado de esta máquina permite que los alumnos experimenten y descubran por ellos mismos un abanico más amplio de posibilidades que les puede permitir llegar a la solución y no perder el tiempo en cálculos, pues en la resolución de problemas es más relevante desarrollar la capacidad de analizar, representar gráficamente y optimizar los algoritmos.

FielKer (1986:14), citado en Udina (1997, p. 168), resalta la importancia de “que los niños sean capaces de desarrollar sus propios métodos con la calculadora (...). Quizá debamos hacer uso de la novedad de la calculadora para promover esta idea, antes de que el proceso algorítmico caiga en el mismo estado en el que cayeron los algoritmos de lápiz y papel, es decir en un estado en el que

invariablemente es algo que los profesores enseñan a los niños, y raramente es inventado por los propios niños”.

Los reportes de investigación antes citados sugieren que la incorporación de la calculadora en el aprendizaje de las matemáticas favorece una serie de cambios en las actitudes de los estudiantes que propician el logro de aprendizajes más significativos. Pantoja (2002), propone el rol que desempeñan los involucrados en el proceso de enseñanza aprendizaje cuando se hace un uso adecuado de la calculadora:

Alumno: un sujeto propositivo e innovador

Maestro: interesado en el aprendizaje matemático de sus estudiantes y conocedor en el uso y funcionamiento de la calculadora.

Calculadora: como material didáctico con las siguientes características:

- Para crear situaciones atractivas de aprendizaje
- Facilitar al estudiante la apreciación del significado de sus propias acciones.
- Apoyar al estudiante para que prepare el camino para comprender nociones matemáticas relevantes.
- Contexto: todos los involucrados en este proceso, padres de familia, autoridades, maestros y alumnos participan en este proceso de enseñanza.

La calculadora en un ambiente de aprendizaje cooperativo

Otro de los cambios que propicia el uso de esta herramienta en la clase de matemática es que favorece una mayor interacción, tanto entre los alumnos como de éstos con el profesor, creándose un ambiente de cooperación en el aula. En un ambiente de aprendizaje cooperativo la calculadora puede ser utilizada crear procesos de retroalimentación entre la tecnología y el estudiante, entre los estudiantes y entre los estudiantes y el profesor.

Estos reportes de investigación nos permitieron afinar la idea que teníamos en un primer momento acerca del papel que jugaría la calculadora en esta tesis, ya que el objetivo central es conocer en qué medida el trabajo cooperativo influye en la

creación de un mejor ambiente de aprendizaje entre los alumnos, por lo que era importante incorporar recursos didácticos que nos permitieran propiciar de manera efectiva una interacción productiva entre los estudiantes.

Esta idea de utilizar la calculadora como un medio para potenciar la interacción se reforzó por los resultados reportados por Hennessy, (2001); Mercer, (1995); Hirschhorn y Thompson (1996); Chiu (2001); y Yerushalmy (2001). Entre otras conclusiones, estos autores reportan que el uso de la calculadora algebraica en la solución de problemas matemáticos estimula el trabajo en equipo de manera eficaz, debido a las facilidades que ofrece para la visualización de tablas y gráficas y el establecimiento de relaciones entre estas dos formas de representación de una función. Asimismo, la agilidad con que la maquina permite a los alumnos representar y poner a prueba sus conjeturas, propicia que dispongan de más tiempo para la discusión y elaboración de argumentos con base en los resultados que se van encontrando al emplear esta herramienta.

Por lo anterior, decidimos incluir el uso de la calculadora algebraica en el desarrollo del estudio de campo con la expectativa de generar condiciones que estimularan a los estudiantes a participar de manera genuina en un ambiente de aprendizaje cooperativo.

CAPÍTULO III

EL MÉTODO DE INVESTIGACIÓN

Introducción

En este capítulo se aborda el problema de investigación atendiendo a la pregunta ¿qué es lo que se va a investigar?; a continuación se presenta el método de investigación, en donde abordamos la metodología que se empleó en esta investigación; posteriormente hacemos una descripción del proceso de selección de los alumnos para formar parte del estudio principal en el apartado “selección de sujetos”; sigue a esta sección la descripción de los instrumentos que empleamos para recabar información que nos permitiera dar respuesta a las preguntas de investigación y concluimos este apartado con la descripción del estudio exploratorio que realizamos con la finalidad de poner a prueba los instrumentos de toma de datos; sigue a este apartado la planeación del estudio de campo mediante una descripción de los pasos que se siguieron para la puesta en marcha de esta investigación; concluimos este capítulo con una descripción de las condiciones en que desarrollaron su trabajo los alumnos de los grupos experimental y control.

El problema de investigación

Como se mencionó en el Capítulo I, el presente estudio se centra en estudiar las diferencias que se puedan dar en los estudiantes en cuanto a actitudes y conocimientos, cuando las actividades de enseñanza se desarrollan en el marco de dos ambientes de trabajo diferentes: de manera cooperativa y de manera individual. Asimismo, se pretende obtener evidencia empírica acerca del uso de la calculadora algebraica como un factor en los logros de los alumnos cuando abordan el tema de funciones lineales.

Una vez definido el problema de investigación el siguiente paso fue precisar qué es lo que podríamos comprometer como contribuciones de este modesto trabajo al campo de la investigación en el ámbito del problema de nuestro interés. Para este efecto formulamos cuatro preguntas de investigación que se

derivaron de la revisión de la literatura que se reporta en el Capítulo II, en esta tarea influyó de manera determinante la inquietud de nuestra parte por conocer con mayor profundidad las posibilidades que brindan las técnicas y conceptos asociados al trabajo cooperativo. Dado que el trabajo cooperativo exige que las tareas y recursos didácticos que se empleen justifiquen de manera clara acudir a esa forma de trabajo, decidimos incluir actividades novedosas para abordar el estudio de las funciones lineales a partir del comportamiento de su representación gráfica e incluir una herramienta que fuera atractiva para los estudiantes que además les apoyara a superar los retos cognitivos involucrados en un primer acercamiento a este tema. Por lo anterior también incluimos en nuestros propósitos estudiar qué efectos tiene la inclusión de la calculadora algebraica en el proceso de enseñanza/aprendizaje que pondríamos en marcha durante el trabajo de campo.

Preguntas de investigación

Estas preguntas se presentaron en el Capítulo I, sin embargo, consideramos pertinente incluirlas en este apartado para proporcionar un referente más inmediato al lector.

1. ¿Difieren las repuestas de los alumnos que trabajan en un ambiente de aprendizaje cooperativo de las que formulan los alumnos que trabajan individualmente?
2. ¿Se observan diferencias en las actitudes hacia las matemáticas por parte de los alumnos que trabajan en un ambiente de aprendizaje cooperativo y los que trabajan de forma individual?
3. ¿Existen diferencias entre las conjeturas que formulan los alumnos que trabajan en un ambiente de aprendizaje cooperativo y los que trabajan de manera individual?
4. ¿Se observan diferencias entre los alumnos que trabajan en un ambiente cooperativo y los que lo hacen en forma individual con relación a las formas en que transitan del conocimiento no convencional al conocimiento formal?

Asumimos que los rasgos del desempeño de los estudiantes que se abordan en estas preguntas de investigación permitirán analizar las diferencias en los aprendizajes de los estudiantes que puedan asociarse a las formas de enseñanza que en esta tesis se exploran, y cómo esas diferencias podrían influir en la actitud que los alumnos tienen hacia la materia y en la adquisición de los nuevos conocimientos.

El método de investigación

Debido al tipo de situación que se quiere estudiar, elegimos el método experimental para hacer esta investigación, ya que dicho método atiende a la condición de establecer ambientes de trabajo de manera controlada (ambiente de trabajo cooperativo y ambiente de trabajo individual) y a la observación de cómo estas condiciones controladas afectan la conducta de los sujetos.

Best (1982, pp. 113) señala que “la investigación experimental provee de un método lógico y sistemático para responder a la siguiente pregunta: ¿Qué sucederá, bajo condiciones cuidadosamente controladas, si esto (este hecho) es dado? El experimentador manipula ciertos estímulos, tratamientos y condiciones ambientales, y observa cómo resulta afectada la condición, o la conducta del sujeto”.

En esta investigación empleamos el modelo que se basa en los conceptos de grupo experimental y grupo de control, en donde ambos grupos deben de ser tan semejantes como sea posible. El grupo experimental está expuesto a la variable a considerar y el grupo control no (Best, 1982). El grupo experimental se expone a ciertas condiciones de trabajo en donde se comparan sus desempeños con los del grupo control. Con el fin de medir la efectividad entre el grupo expuesto al tratamiento con el no expuesto se hacen observaciones determinando las diferencias que se dan.

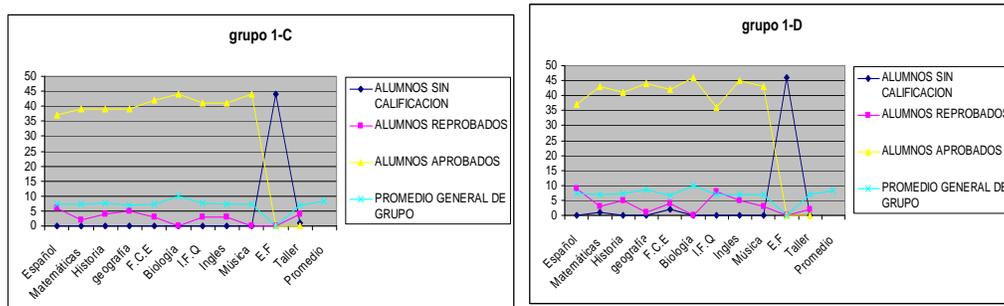
Por lo anterior consideramos que la metodología idónea para responder a las preguntas de investigación que se formulan en este estudio está

centrada en la indagación experimental con la aplicación de la técnica basada en el análisis comparativo de grupos experimentales y de control.

Siguiendo los principios del método basado en los conceptos de grupo experimental y de control, el primer punto a considerar es la obtención de grupos gemelos, que funjan como el grupo experimental y el grupo de control. En este punto es donde encontramos un problema, ya que nos resultó imposible formar grupos de trabajo cuyas respectivas características fueran muy semejantes, ya que esto implicaba tomar alumnos de diferentes grupos cuyas características concordaran tanto en el grupo experimental como en el grupo control, para esto sería necesario desmembrar los grupos ya establecidos, trayendo como consecuencia el descontrol en la vida de la escuela y, por ende, la desaprobación por parte de los directivos en la realización de este proyecto.

Por lo anterior se obtuvieron datos de los grupos escolares, se analizó la conformación de los seis grupos de primer grado* para encontrar a los dos grupos más homogéneos en cuanto a desempeño escolar, tomando en cuenta el número de alumnos, el número de alumnos reprobados, el número de alumnos aprobados y el promedio general del grupo, estos aspectos fueron considerados en todas las materias.

Después de hacer un análisis comparativo de los datos de cada uno de los seis grupos de primer grado, encontramos semejanzas en los grupos 1o “C” y 1o “D”, como se puede muestra en las siguientes gráficas.



* ver anexo V

En estas gráficas podemos observar dos grupos muy similares, casi idénticos en los puntos que se señalan, pero además de esta clara similitud hay otro factor que hace de estos dos grupos los idóneos para establecer el grupo control y el grupo experimental respectivamente, y es el hecho de que en ambos la plantilla de profesores que imparten las diferentes materias son los mismos, a diferencia de los otros grupos en donde los profesores de las mismas materias son diferentes, o en determinados casos los profesores son los mismos, pero la materia que imparten difiere de un grupo a otro. Por ejemplo, el profesor de Biología imparte también Introducción a la Física, el profesor de Formación Cívica y Ética imparte también Historia. En fin, un complejo ambiente de trabajo en donde las coincidencias son escasas.

Afortunadamente para nosotros, en los grupos 1C y 1D sólo un profesor no coincidía en ambos grupos como titular de la asignatura y la materia que imparte no creemos que influya mucho para marcar una gran diferencia en el ambiente de trabajo entre ambos grupos, ya que es Educación Física. Lo que sí pudiera causar un problema sería si el profesor fuera de Matemáticas, ya que los grupos presentarían muy probablemente mayores diferencias en las condiciones de trabajo, limitando con esto la validez del estudio, afortunadamente éste no es el caso. Además, creemos que el hecho de que en ambos grupos estuvieran los mismos profesores (excepto el de Educación Física) pudiera ser un factor determinante en la semejanza que hay en desempeño escolar de estos dos grupos y, por ende, las condiciones adecuadas para el estudio experimental.

Selección de los sujetos

Una vez definidos el grupo experimental y el grupo control, el siguiente paso fue determinar qué individuos de ambos grupos serían los más idóneos para la investigación. Una de las preguntas que pudiera surgir de este hecho es: ¿por qué si ambos grupos son tan semejantes no se escogieron los individuos al azar?

Una respuesta plausible a esta pregunta es la siguiente: en la investigación experimental existen dos tipos de variables; la variable independiente, la cual puede ser controlada por el experimentador para observar las posibles diferencias entre ambos grupos, en este caso la variable es la forma de trabajo. El grupo control establece un ambiente de trabajo de manera individual y en el grupo experimental se propone a los alumnos un ambiente de trabajo cooperativo. Por otro lado existe la variable dependiente, la cual depende directamente de la variable independiente; es decir, son aquellas situaciones en donde el experimentador no puede controlar de forma directa ciertas acciones ya que esta variable surge como resultado de otra.

“Las variables son condiciones o características que manipula, controla y observa el experimentador. Las variables independientes son las condiciones o características que manipula el experimentador en su intento para verificar su relación a los fenómenos observados. La variable dependiente son las condiciones o características que aparecen, desaparecen, o cambian, según el experimentador introduce, quita o cambia variables independientes” (Best, 1982, pp. 116).

Existen también las variables organísmicas, las cuales no pueden ser manipuladas por el experimentador, son variables dependientes como la edad, sexo o raza, las cuales son inalterables por el experimentador puesto que ya están determinadas (Best, 1982). En el caso de los alumnos existen las variables dependientes como las organísmicas (edad, sexo o raza), las cuales ya están determinadas y no pueden ser alteradas de forma directa, pero sí de forma indirecta, ya que estas variables dependen de las variables independientes. Por este motivo no seleccionamos las parejas de estudiantes gemelos al azar y decidimos modificar la variable independiente escogiendo tanto en el grupo control como en el grupo experimental los individuos con variables organísmicas similares.

El procedimiento fue el siguiente: se determinó cuáles serían las variables organísmicas que debieran compartir los alumnos, aquéllas que en un

momento dado podrían influir en el resultado de la investigación experimental.

Los puntos que consideramos importantes para la elección de los alumnos para el estudio fueron la edad, el sexo y su promedio general, en donde los dos primeros puntos se determinaron por la importancia que Best les confiere como factores relevantes en el estudio de grupos experimentales, con lo que nosotros coincidimos ampliamente. Asimismo, decidimos que la calificación asignada a cada alumno podría aportar un parámetro para ubicar a los alumnos en un determinado nivel en su desempeño escolar. Si bien es cierto que en muchas ocasiones las calificaciones no reflejan objetividad sino subjetividad, creemos que en este caso la validez de las calificaciones radica en que, tanto lo objetivo como lo subjetivo que pudiera haber en los promedios depende directamente de una persona en cada materia (con excepción del profesor de educación física), en donde, es casi seguro que valoran el desempeño de cada estudiante con el mismo rigor en ambos grupos, tanto objetivo como subjetivo, ya que esta valoración numérica se basa en un bagaje cultural único, el del profesor titular de cada materia, y por este motivo creemos que las calificaciones que se le asignan a cada alumno como reflejo de su desempeño escolar nos ayudan a establecer un indicador para el establecimiento de casos gemelos.

El siguiente paso fue establecer los promedios que deberían presentar los sujetos involucrados en este estudio; se decidió que el número de alumnos fuera 20, diez por cada grupo, distribuidos de la siguiente manera.

Grupo control No. de alumnos	Grupo experimental No. de alumnos	Calificación
2	2	Abajo del promedio (5 a 5.9)
2	2	Baja (6 a 6.9)
2	2	Regular (7 a 7.9)
2	2	Buena (8 a 8.9)
2	2	Excelente (9 a 10)

Al momento de buscar a los 20 candidatos más adecuados para el estudio nos encontramos con las siguientes dificultades; la primera fue que no se pudo encontrar a los dos sujetos que cumplieran con la misma edad, sexo y promedio en el criterio “calificación por debajo del promedio”, sólo se logró establecer una pareja gemela, así que, se decidió formar tres grupos en el criterio “calificación baja” ya que en este nivel se encontraba una mayor población de individuos de los cuales se tenían mayores oportunidades para establecer un mayor número de grupos gemelos, además debido a la cercanía que este criterio presentaba con respecto al otro en cuanto a representación numérica, resultaba esta opción la más viable y la que menos desajustes causaría a lo inicialmente planteado.

El segundo problema que encontramos fue elegir parejas de gemelos en el rango “calificación excelente” (9 a 10). En este caso se decidió no ser tan estrictos en la exactitud de los promedios, dándole a este criterio un margen de tres décimas en la relación de cada sujeto con su respectivo gemelo. Por ejemplo, si un alumno del grupo control presentaba un promedio de 9.0, éste puede vincularse con otro alumno del grupo experimental que cuente con un promedio entre 9.1 y 9.3, de esta manera dimos solución a estos dos problemas encontrados en el establecimiento de los 20 alumnos que fueron parte del estudio experimental.

En el siguiente cuadro mostramos cómo quedaron integrados los 20 alumnos, así como los rasgos considerados para la formación de los alumnos gemelos.

Relación de alumnos con su respectivo gemelo							
Grupo control (1C)				Grupo experimental (1D)			
Nombre	Edad.	Prom.	Sexo.	Nombre	Edad.	Prom.	Sexo.
Osorio Cruz Luis Ángel	13	5.9	Masculino	Martínez Segura Luis	13	5.9	Masculino
Ortiz Martínez Marco	13	6.3	Masculino	Trinidad Cruz David	13	6.3	Masculino
Avila Ovando Beatriz	13	6.7	Femenino	Ávila Ovando Leticia	13	6.7	Femenino
Mosqueda Estevez Saúl	12	6.7	Masculino	De la Cruz Ayala Rafael	12	6.7	Masculino
Velez Esquivel Karla	13	7.3	Femenino	Narciso Solano Liliana	13	7.3	Femenino
Rosales García María	13	7.8	Femenino	Flores Sanches Mayra	13	7.8	Femenino
Mendoza Reyes Patricia	12	8.5	Femenino	Pasalagua Flores Paola	12	8.5	Femenino
Hernández Garcia Rosa	13	8.6	Femenino	Jimenez Chávez Janet	13	8.6	Femenino
Sosa de la Cruz Nohemi	13	9.3	Femenino	Chávez Juárez Ana L.	13	9	Femenino
Cortina Cortina María	13	9.4	Femenino	Sosa Hernández Marisol	13	9.2	Femenino

Con lo anterior, dimos por satisfecha la etapa de definición de los individuos que serían observados durante el estudio experimental. Lo siguiente fue establecer los instrumentos que emplearíamos en el estudio para realizar un registro sistemático de los posibles cambios en los alumnos, tanto de actitud como de conocimientos, en el contexto de la enseñanza y aprendizaje del tema de funciones lineales.

Instrumentos

Para el desarrollo de este trabajo fue necesario establecer los instrumentos que nos ayudarían a determinar el estado de conocimiento en el que se encontraban los alumnos en el tema de funciones, las actitudes que manifestaban éstos hacia la materia de matemáticas y las actividades que se desarrollarían durante el estudio de campo. Para tal efecto se decidió que los instrumento que nos ayudaría a alcanzar dichos objetivos serían:

- ❖ Un cuestionario de actitudes.
- ❖ Un cuestionario de conocimientos en el tema de funciones lineales.

❖ Hojas de trabajo para los alumnos.

Cuestionarios

Antes de iniciar el estudio experimental se aplicaron dos cuestionarios; en uno de ellos se abordan las actitudes¹ que los alumnos tienen hacia la materia y la forma de trabajo de la misma, el otro se centra el nivel de conocimientos² que los alumnos tienen en el tema de funciones lineales.

Estos cuestionarios fueron de gran ayuda como herramienta para establecer una comparación de las actitudes de los alumnos antes del estudio y después de éste, así como el nivel de conocimientos que los alumnos manejan antes del estudio y con el que cuentan después del mismo, dándonos elementos para establecer argumentos que den sustento a explicaciones plausibles sobre los cambios que se pudieran producir al concluir el proceso de experimentación. Nuestras observaciones se orientaron a la búsqueda de respuestas a las preguntas de investigación anteriormente planteadas.

Los cuestionarios fueron aplicados a todos los alumnos de los dos grupos que formaran parte de la investigación, pero nuestra atención se centró en los 20 alumnos seleccionados en la tabla anterior.

Actividades de aprendizaje

Las actividades que fueron utilizadas en el estudio de campo se eligieron de manera que cumplieran con cuatro requerimientos básicos:

- Que la información previa que se necesite para la solución del problema sea adecuada al contexto del alumno.
- Que propicien la elaboración de un plan de resolución por parte del alumno.
- Que los enunciados sean claros y comprensibles para los alumnos.

¹ ver anexo II

² ver anexo III

- Que la resolución del problema estimule la creatividad del alumno, asumiendo que esto es más probable que ocurra cuando las estrategias de resolución no se ajustan a algún patrón previamente determinado (Polya, 1945).

Además, se consideró que se ha obtenido evidencia empírica que sugiere que la combinación de texto con imágenes produce resultados alentadores, si se consideran los siguientes aspectos (Perales, 2000):

- Que las imágenes sean simples
- Que las imágenes estén acompañadas de etiquetas verbales explicativas.
- Que en el caso de referirse a un fenómeno con distintos estados, las imágenes sean representativas de cada estado.

Tomando en cuenta lo anterior se tomó la decisión de utilizar las actividades propuestas por Cedillo (2004). Esas actividades se adoptaron en nuestro estudio de campo debido a que se enmarcan en un modelo didáctico acorde a los principios en que se basa el enfoque “aprender haciendo” y esto concuerda con lo que se ha considerado como un uso pertinente cuando se incorpora la calculadora como herramienta cognitiva en las actividades del aula (Cedillo, 2001)

Las consideraciones didácticas aquí expuestas tienen por objeto propiciar la creación de un ambiente de enseñanza (el autor se refiere al ambiente “aprender haciendo por medio de la calculadora”), en el que los estudiantes participen de manera activa, un ambiente de trabajo que capte su interés y estimule su creatividad intelectual, a la vez que favorezca el desarrollo de habilidades matemáticas (Cedillo, 2004; pp.90).

En estas actividades verificamos que se emplea un lenguaje claro en el planteamiento de los problemas, los conocimientos previos que los alumnos necesitan para la resolución son adecuados, la solución al problema planteado no es única y el uso de la calculadora en el trabajo de

los alumnos incrementa de alguna manera las expectativas de éxito; a este respecto hay reportes de investigación sobre el uso de la calculadora como herramienta cognitiva que sugieren que ésta incrementa de manera significativa el aprendizaje de los alumnos en cuestiones matemáticas, favoreciendo los aspectos que se mencionan a continuación (Pantoja, 2002; Udina, 1997; Hirsch y Coxford, 1995; Streun, 2000; Borba, 1996; Hennessy, 2001, Shternberg, 2001, Zbiek, 1998; Dyke, 1996; Cedillo, 1997).

- ❖ Favorece la interacción entre el estudiante y la tecnología, entre el estudiante y el profesor y entre los estudiantes mismos. .
- ❖ Permite que los alumnos experimenten y descubran por ellos mismos un abanico mayor de posibilidades para la resolución de los problemas.
- ❖ Incrementa en los alumnos la habilidad de la exploración.
- ❖ Es una memoria electrónica que nos libera de cálculos tediosos.
- ❖ Favorece el análisis de la información por medio de la representación visual de gráficas creadas de manera inmediata.

Los puntos anteriores concuerdan con lo propuesto por Polya (1945) en el ámbito de la resolución de problemas matemáticos y con Perales (2000) respecto a la incorporación de imágenes, ya que el uso de la calculadora en el tema de funciones lineales permite que los alumnos exploren el comportamiento de las funciones por medio de la manipulación de éstas empleando diferentes representaciones.

Estudio exploratorio

Antes de emplear estas actividades de manera definitiva en el estudio de campo se observó una clase de matemáticas conducida por un experimentado profesor que utiliza de manera regular la calculadora TI-92 en sus clases de matemáticas. Los resultados de esta observación fueron alentadores, los alumnos manifestaron interés hacia los problemas, propusieron varias estrategias para dar respuesta a una misma actividad,

se observó un ambiente dinámico de interacción entre los alumnos y de ellos con el profesor. Además, esta actividad nos permitió afinar las estrategias para manejar al grupo en este ambiente de trabajo.

Realizamos un ensayo en una clase de matemáticas utilizando la calculadora TI-92. La clase se llevó a cabo con 5 alumnos de segundo año de secundaria escogidos al azar de un grupo de 42 alumnos. Se utilizó la actividad denominada “Puntos en el plano” (Cedillo, 2004, ver anexo).

Esta sesión de trabajo tuvo como objetivos:

- ✓ Observar si la actividad propiciaba que los alumnos interactuaran entre ellos.
- ✓ Practicar el uso de la calculadora TI-92 en una clase.
- ✓ Identificar problemas que pueden surgir en cuanto al manejo de la clase para anticipar posibles soluciones.

La clase se llevó a cabo en las instalaciones de una escuela secundaria pública en una zona semirural.

En el turno vespertino de esa escuela el laboratorio de matemáticas es de poco uso por los profesores de la materia, no cuenta con materiales didácticos. Se eligió este espacio en la escuela porque está equipado con mesas trapezoidales que facilitan que los alumnos puedan formar equipos para trabajar en la clase. Sin embargo, debido a la falta de uso de este salón, se encontraron los siguientes problemas que consideramos muy importantes, ya que es en este mismo espacio en donde se ubicaría al grupo experimental para el estudio principal:

1. Ningún trabajador manual portaba las llaves del laboratorio y se tenían que pedir en la subdirección (5 minutos perdidos aproximadamente).
2. Al entrar en el laboratorio se observó que el contacto para suministro de corriente eléctrica se encontraba muy lejos del pizarrón blanco en donde se proyectarían las imágenes de las gráficas elaboradas por los

alumnos; además, sólo contaba con una entrada y para el desarrollo de la clase se necesitaban dos (tiempo aproximado para conseguir la extensión y el multicontacto 10 minutos).

3. Hubo una demora importante debido a la inexperiencia en el uso del equipo, como enfocar el proyector de acetatos, las conexiones de viewScreen y establecer la ubicación correcta del equipo (aproximadamente 10 minutos)

Hasta este momento se registró un tiempo perdido de 25 minutos aproximadamente. Además se observaron los siguientes factores que deberían ser corregidos para el desarrollo del estudio principal:

- ❖ El tiempo de traslado de los alumnos del salón al laboratorio de matemáticas (tiempo aproximado 5 minutos).
- ❖ Los alumnos tienen que salir por lo menos 5 minutos antes del laboratorio, para estar a tiempo para la siguiente clase.
- ❖ La clase estaba planeada de las 18:30 horas a 19:20, pero debido al tiempo perdido (35 minutos aproximadamente) se decidió ocupar la siguiente hora de las 19:20 horas a 20:10.
- ❖ Algunas calculadoras estaban configuradas en el idioma español y otras en inglés y la habilidad del profesor para manejar la calculadora era limitada.

La experiencia obtenida con esta sesión fue de gran utilidad para la planeación de las sesiones de trabajo durante el trabajo de campo en el estudio principal. Se previó a quién dirigirnos para conseguir los materiales necesarios, se practicó para lograr un mejor manejo del equipo y un mejor aprovechamiento del tiempo real de la clase.

Ventajas observadas durante la clase

1. Se observó un ambiente de trabajo cooperativo, los alumnos mostraban interés en cómo algún compañero había resuelto la actividad y la comparaban con la suya comentando sus diferentes procedimientos.

2. El uso de la calculadora los motivó a tal grado que perdieron la noción del tiempo, ya que por lo general en la última hora de clase los alumnos se mantienen expectantes al toque de salida; en este caso su interés se centraba en la solución de la actividad negándose a guardar sus cosas para prepararse a salir del laboratorio de matemáticas.
3. La información que captaban mediante visualización de las gráficas que elaboraban les permitía llegar a conclusiones en donde el profesor tenía escasa participación en su elaboración.

Con lo expuesto anteriormente respecto a las características que debe tener un buen problema, las ventajas que ofrece la incorporación de la calculadora en la clase de matemáticas, las observaciones y experiencias adquiridas en el manejo de actividades utilizando la calculadora como herramienta didáctica, se decidió incorporar las actividades del libro “Las gráficas de funciones y la resolución de problemas” en el tema de funciones lineales como las adecuadas para la realización el estudio de campo de nuestro proyecto de investigación (Cedillo, 2003).

Planeación del estudio de campo

Una vez definido el problema de estudio, los sujetos que participarían y las herramientas que nos ayudarían a recabar los datos necesarios (cuestionarios y hojas de trabajo) se decidió planificar el desarrollo del estudio principal.

El primer paso fue la aplicación de los cuestionarios a la totalidad de los alumnos de los grupos control y experimental, considerando para su análisis en el caso del cuestionario de conocimientos sólo a los veinte alumnos involucrados en nuestro estudio principal, en el caso del cuestionario de actitudes se decidió tomar a la totalidad de los alumnos de ambos grupos teniendo una muestra de noventa sujetos los cuales creemos que describirían mejor un posible cambio en sus actitudes.

Lo segundo fue establecer algunas actividades a manera de introducción para que los alumnos se fueran adaptando al funcionamiento de la calculadora en sus respectivos ambientes de trabajo (cooperativo e individual), este primer contacto de los alumnos con la calculadora tendría una duración de cinco sesiones de treinta minutos aproximadamente cada una.

El tercer paso fue establecer la duración del estudio principal considerando básicamente las dificultades observadas en el estudio exploratorio, con una duración de 18 sesiones de 50 minutos aproximadamente cada una.

El cuarto paso fue establecer las instrucciones que tendrían que seguir los alumnos al momento de resolver sus actividades durante el estudio principal tanto en el grupo control como en el grupo experimental, la manera en que serían distribuidos dentro del salón de clases y la actitud del profesor que estaría frente estos dos grupos. En el siguiente apartado se hace una descripción de manera detallada de estos aspectos.

El quinto paso fue determinar las estrategias para recabar información adicional a los cuestionarios y hojas de trabajo, por ejemplo, utilizar una libreta para apuntar lo más relevante al final de cada sesión de trabajo, pedir el argumento verbal del alumno cuando se observara una situación relevante y recoger las hojas de la libreta en donde los alumnos hicieran algunas anotaciones.

De esta manera hemos descrito los puntos más importantes que fueron considerados para la puesta en marcha del trabajo de campo, en el siguiente apartado recapitularemos lo acontecido durante la puesta en marcha de la investigación.

El trabajo de campo

En este apartado abordaremos cómo se dio la organización de ambos grupos para trabajar con ellos una vez iniciado el estudio de campo, las instrucciones que debían seguir los alumnos durante las actividades y el papel que

desempeñaría el profesor en ambos grupos (control y experimental) durante las sesiones.

Trabajo con el grupo control

En este grupo se conservaron los lugares asignados por su profesor titular, las bancas estaban alineadas con vista hacia el pizarrón, formando seis filas con ocho bancas cada una, los lugares de enfrente estaban ocupados por los alumnos de los promedios más bajos y según su profesor, también eran los más latosos de la clase, tal vez él había dispuesto esta ubicación para mantener una mayor vigilancia sobre estos alumnos. En esta situación se encontraban dos alumnos que formaron parte de nuestro estudio, la fila que se encontraba cerca de la puerta del salón estaba conformada por tres de nuestros alumnos a observar, otros tres alumnos se encontraban en la fila que se localiza junto a las ventanas del inmueble del lado contrario a la puerta y por último los dos alumnos restantes se encontraban sentados en la parte central, es decir, la ubicación en el aula de los diez alumnos en que nuestra atención se centraría en las próximas diez sesiones era muy dispersa.

Antes de iniciar la sesión de clase con las hojas de trabajo nos asegurábamos que estuvieran presentes todos los involucrados en este estudio. Una vez que se corroboraba la asistencia de los diez alumnos que se eligieron para observar su trabajo en este estudio, se procedía a repartir las calculadoras y la actividad a desarrollar con ayuda de los primeros alumnos de cada fila, los cuales también eran encargados de recoger el material cinco minutos antes de que concluyera cada sesión bajo las indicaciones del profesor.

Después que todos los alumnos ya contaban con su material de trabajo (calculadora y actividad impresa) en su mesa de trabajo, se procedía a dar las instrucciones, éstas consistían en:

- 1) Pedir a los alumnos que leyera cuidadosamente la actividad en turno.
- 2) Hacer énfasis en que harían su trabajo de manera individual
- 3) Indicar que el profesor solamente atendería dudas.

- 4) Informar que cuando un alumno terminara la actividad levantara la mano para que el profesor fuera a su lugar para recogerla y le proporcionara la siguiente actividad.
- 5) Cuando algún alumno quisiera enseñar su trabajo a sus compañeros podía pasar al frente y hacer uso del viewScreen.*

Una vez aclarados los términos en que se llevaría a cabo la sesión, el profesor observaba el trabajo de los alumnos paseándose por las filas y atendía sus dudas, las que en las primeras sesiones eran muchas y causaban el descontrol del grupo, pues debido a lo establecido los alumnos se limitarían a trabajar en su actividad, sin acudir a la ayuda de algún compañero, recayendo esta responsabilidad en el profesor, mismo que en ocasiones era sobrepasado notablemente por la cantidad de alumnos que requerían su apoyo, causando además del descontrol por momentos en el grupo un avance muy dispar en el número de actividades, debido a que mientras unos alumnos estaban por terminar la primera actividad otros esperaban su turno para que el profesor les aclarara sus dudas. Esta situación solamente se observó en las primeras dos sesiones de trabajo, pues mientras se avanzaba en el proceso de adaptación con el uso de la calculadora los alumnos se hacían más independientes en el uso de esta y las intervenciones del profesor se volvían mínimas.

Trabajo con el grupo experimental

Las sesiones de trabajo con el grupo experimental se realizaron en el laboratorio de matemáticas ubicado aproximadamente a veinte metros de su salón, lo cual nos representaba un incremento mayor en el consumo de tiempo en el traslado, por lo que decidimos informar a los alumnos que las siguientes clases de matemáticas se desarrollarían en el laboratorio y que al momento del toque debían salir del salón con su libreta y lápiz en mano con dirección al laboratorio de matemáticas dándoles una tolerancia de cinco minutos, además se pidió apoyo al prefecto encargado del piso para que agilizará el traslado, mientras el profesor preparaba la disposición del mobiliario y equipo (mesas trapezoidales, sillas, viewScreen y proyector de acetatos) para que conforme

* Pantalla de cristal líquido en donde se conecta la calculadora y con ayuda de un proyector de acetatos refleja en una superficie blanca la pantalla de la calculadora.

fueran llegando los alumnos se fueron incorporando a sus respectivas mesas, optimizando el tiempo efectivo de trabajo, además, durante el acceso al laboratorio el profesor podía hacer un pase de lista visual de los actores importantes del estudio, lo cual era muy importante ya que si alguno de estos alumnos llegaba a faltar la actividad programada en el tema de funciones se suspendía y se aplicaban las actividades emergentes. Cabe señalar que la integración de grupos de trabajo quedó conformada en la primera sesión durante el proceso de adaptación con el uso de la calculadora teniendo los siguientes criterios para la conformación de los equipos:

- a) Las mesas de trabajo estarían integradas por seis alumnos como máximo y cinco como mínimo y serían heterogéneas en cuanto a promedio de calificaciones y sexo.
- b) Ninguna mesa estaría integrada en su totalidad por alumnos cuya conducta fuera considerada como conflictiva.
- c) Si se llegaba a detectar en algún alumno; apatía, incomodidad, aislamiento o agresión dentro de su mesa de trabajo signado este sería removido del equipo e incorporado a otro.

Al momento de integrar los equipos en las nueve mesas de trabajo no se observó ningún caso como los contemplados en el último inciso, teniendo solamente algunas reclamaciones de inconformidad por la asignación de su equipo, pero terminaron aceptándolo y las actividades se desarrollaron sin ningún problema. Cabe señalar que al igual que en el grupo control, se trató de ubicar a los diez alumnos que formarían parte de nuestro estudio en diferentes zonas del laboratorio.

De igual manera que el grupo control, en este grupo se indicaron algunas reglas con las cuales se desarrollaría el trabajo en el laboratorio de matemáticas, las cuales fueron:

- 1) Exhortar a los alumnos a la lectura de la actividad en turno.
- 2) Hacer énfasis en que durante el desarrollo de las actividades podrían comentar sus ideas y discutir las posibles soluciones en equipo.

- 3) Recalcar que el profesor solamente atendería dudas que estuvieran relacionadas con el funcionamiento de la calculadora.
- 4) Informar que cuando algún equipo terminara la actividad levantara la mano para que el profesor fuera a hasta su lugar para recogerla y se les proporcionara la siguiente actividad.
- 5) Cuando algún alumno quisiera enseñar su trabajo a sus compañeros podía pasar al frente y hacer uso del ViewScreen.

A grandes rasgos el papel del profesor una vez que iniciaban los alumnos sus actividades era el de un simple espectador, ya que había sesiones en donde las consultas que le hacían eran mínimas con respecto al uso de la calculadora, y esto se debió a la cooperación que los alumnos mostraban hacia sus compañeros cuando alguno manifestaba alguna duda ya fuera con respecto a la actividad o al uso de la calculadora, la complicación que tuvo el profesor fue controlar este afán que mostraban los alumnos más adelantados con el uso de la calculadora para ayudar a sus compañeros menos adelantados; se observó que una vez que los alumnos de alguna mesa de trabajo lograban resolver algún apartado de su actividad, designaban a uno de sus intriganes para que mostraran al resto del grupo su trabajo en el ViewScreen (en este grupo el uso de este aparato fue muy frecuente), en algunas ocasiones esto originaba que las demás mesas de trabajo quisieran saber cuál había sido el procedimiento que los llevó a ese resultado, pidiendo la presencia del alumno expositor en las diferentes mesas. Fue en esas situaciones donde la intervención del profesor entraba en juego para mantener el orden dentro del laboratorio, propiciando que el expositor explicara paso a paso su procedimiento con ayuda del ViewScreen. Cuando el alumno explicaba el procedimiento que siguieron sus compañeros de mesa para llegar a su resultado, los demás equipos se mantenían atentos a sus explicaciones haciendo preguntas mientras seguían en su lugar con su propia calculadora el procedimiento señalado. Se esperaba que los alumnos que pasaban a explicar con mayor regularidad su procedimiento fueran los clasificados como los promedios más altos, pero los alumnos que más interés presentaron por mostrar y explicar sus resultados fueron los alumnos clasificados como de

promedios regulares y bajos, manteniendo una mayor participación en la totalidad de las sesiones.

Otra de las manifestaciones observadas dentro del grupo experimental fue la confrontación de manera argumentada de los procesos de solución entre los integrantes de las diferentes mesas de trabajo, concluyendo en la mayoría de los casos en una generalización de resultados, y cuando éste no era el caso recurrían al profesor para tratar de obtener la validación de algunas de sus propuestas, en este caso el profesor simplemente se limitaba a recordarles que su intervención era solamente sobre el funcionamiento de la calculadora y que al final del curso (así se les manejo a los alumnos el estudio de campo) se resolverían todas las dudas que pudieran tener, invitándolos finalmente a que pasaran con su equipo a seguir trabajando en sus respectivas actividades

En resumen, en el grupo experimental se observó un ambiente de trabajo dinámico en donde el silencio no fue una sus cualidades, la comunicación se deba entre los alumnos de manera escrita, hablada, mímica e interactiva con el uso de la calculadora, las dificultades del profesor para que todos los alumnos entendieran qué es lo que se iba a hacer y cómo lo iban hacer se redujeron significativamente, en los equipos se observó que los alumnos más adelantados en el uso de la calculadora asumían un mayor compromiso para la solución de las actividades y este compromiso lo transmitían en un primer momento hacia los integrantes de su equipo y después al resto del grupo. Este mismo fenómeno se observó cuando los alumnos más adelantados abordaban las actividades involucrando a los integrantes de su equipo y desencadenado una lluvia de ideas que los llevaba a establecer un solo resultado, mostrándolo de manera argumentada al resto de la clase.

En el grupo control, el trabajo de los alumnos fue en silencio, interrumpido en ocasiones por murmullos de conversaciones entrecortadas, con pocas participaciones de mostrar su trabajo frente al grupo, algunos intervalos de indisciplina ocasionados por los alumnos que presentaban dudas y éstas no eran atendidas de inmediato por el profesor debido a la carga de trabajo que tenía en ese momento.

CAPÍTULO IV

DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS

INTRODUCCION

En este capítulo se presenta el análisis de los datos obtenidos mediante las tres herramientas aplicadas en este trabajo: cuestionario de actitudes, cuestionario de conocimientos y hojas de trabajo utilizadas durante el trabajo de campo. Estos datos conforman el cuerpo de evidencia empírica que nos permitirá documentar los logros que de los alumnos involucrados en el estudio.

En el primer apartado, “Actitudes de los alumnos”, se realiza una comparación de las actitudes hacia las matemáticas que presentaron los estudiantes antes de iniciar y al concluir el estudio de campo. Este análisis se llevó a cabo con base en las respuestas proporcionadas en los cuestionarios de actitudes, cuya finalidad fue obtener evidencia que nos permita estudiar la disposición de los alumnos hacia el aprendizaje de las matemáticas en dos ambientes de aprendizaje distintos: individual y cooperativo. Al final de este apartado se presentan algunas conclusiones obtenidas de un análisis comparativo de ambos grupos.

En el cuestionario se emplean las siguientes vertientes:

1. Cuándo siento que aprendo más, cuando trabajo de manera individual o de manera cooperativa.
2. En qué ambiente me gusta trabajar más, en el individual o en el cooperativo.
3. En qué ambiente me siento más cómodo para abordar aspectos matemáticos, en el ambiente individual o en el cooperativo.

En el segundo apartado, “Conocimientos de los alumnos”, se presenta un análisis de las respuestas de los alumnos a los cuestionarios de conocimientos aplicados al grupo experimental y al grupo control antes de iniciar el estudio de campo. Estos cuestionarios se emplearon con el objetivo de conocer el bagaje conceptual de los alumnos en el tema de funciones lineales antes de iniciar el

estudio de campo, y contar así con un marco de referencia respecto a los conocimientos alcanzados una vez terminado el proceso de enseñanza aprendizaje en el estudio de campo. Este apartado de la tesis también tiene el propósito de identificar las posibles diferencias que pudiera haber en los conocimientos y creencias de un alumno del grupo control con su gemelo del grupo experimental respecto al tema de funciones. Al final de este apartado discutimos los problemas más frecuentes que presentaron los alumnos en el tema de funciones.

En el tercer apartado, “Trabajo de campo”, se hace una reseña de lo acontecido durante la puesta en marcha del trabajo de campo, los problemas a los que nos enfrentamos y cómo se solucionaron. También en este apartado analizamos algunas respuestas de los alumnos en sus hojas de trabajo que fueron seleccionadas para documentar las siguientes cuestiones:

1. Las diferencias que se observan en las respuestas de los alumnos que trabajaron en un ambiente cooperativo respecto a las respuestas de los alumnos que trabajaron individualmente
2. Las diferencias que hay en las conjeturas que formulan los alumnos que trabajan en un ambiente cooperativo respecto a los que trabajan de manera individual.
3. Cómo transitan los alumnos del conocimiento no convencional al conocimiento formal dependiendo del ambiente de aprendizaje en que trabajaron (individual o cooperativo).

Al final de este apartado se formulan algunas conclusiones basadas en la comparación de las respuestas dadas por los alumnos del grupo control con las de su gemelo del grupo experimental basadas en los puntos anteriores, los cuales corresponden a las preguntas de investigación planteadas con anterioridad.

Actitudes

Se aplicó un cuestionario¹ a los grupos experimental y control antes de pedirles que abordaran las actividades preparadas para el estudio de campo, esto se aprovechó para estudiar los cambios que pudieran presentar en cuanto a sus actitudes hacia el trabajo cooperativo y hacia la asignatura de matemáticas. Una vez terminado el estudio se les aplicó nuevamente el mismo cuestionario (aproximadamente un mes y medio después). Siete de las nueve preguntas en este cuestionario se abocan a la exploración de la actitud que tienen los alumnos hacia el trabajo en equipo bajo las siguientes vertientes:

- (i) Cuándo aprendo más, cuando trabajo de manera individual o cuando trabajo de manera cooperativa.
- (ii) Cómo me gusta más trabajar, de manera individual o de manera cooperativa.
- (iii) Cómo me gusta más estudiar, de manera individual o de manera cooperativa.

Las otras dos preguntas tienen como objetivo explorar el gusto o el desagrado que los alumnos tengan por las matemáticas.

Los alumnos dieron respuesta al cuestionario eligiendo de las siguientes opciones la que se adaptaba mejor a su forma de pensar.

1. En total desacuerdo.
2. Discrepo en algo.
3. Conuerdo en algo.
4. Totalmente de acuerdo.

A continuación presentamos los datos obtenidos de los dos cuestionarios en ambos grupos.

¹ Ver anexo número 2

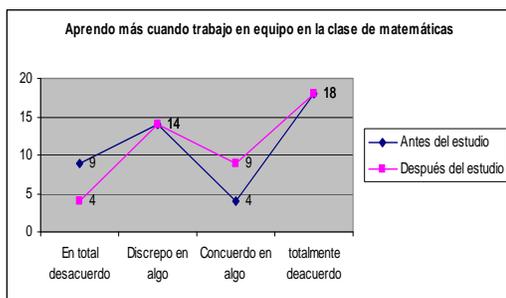
Primer reactivo: "Aprendo más cuando trabajo en equipo en la clase de matemáticas"

Este reactivo tiene como propósito saber cuál es la actitud que los alumnos tienen hacia el aprendizaje cooperativo en la clase de matemáticas. Se obtuvieron los siguientes resultados.

Grupo control

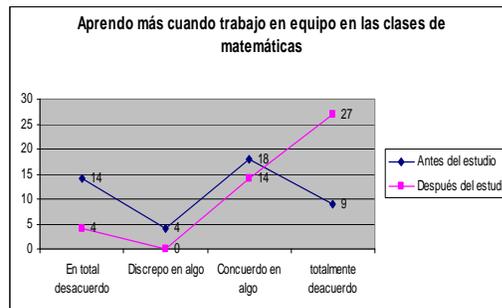
En la *gráfica 1* mostramos cuántos alumnos eligieron cada opción antes y después del estudio, se observa que los cambios en la actitud de los alumnos no son muy significativos, hasta cierto punto esto es lo que se esperaba, ya que los alumnos del grupo control no tuvieron la oportunidad de experimentar el ambiente de trabajo cooperativo, por tal motivo no tuvieron un punto de comparación que pudiera influir en un cambio de actitud. Sin embargo, en la gráfica podemos observar un sensible incremento en el número de alumnos que creen que el trabajo en equipo puede ser un factor para tener un mejor aprendizaje. Esto puede deberse a lo siguiente, a pesar de las condiciones del ambiente individual al que eran expuestos durante el desarrollo de las actividades de campo se observó que algunos alumnos se las arreglaban para intercambiar comentarios sobre su trabajo de manera eventual. Al parecer estas interacciones entre alumnos les brindaron la oportunidad de desarrollar sus actividades de mejor manera y de esto pudiera desprenderse el cambio en la actitud de algunos alumnos del grupo control hacia el trabajo en equipo, manifestando su interés por trabajar de manera cooperativa. Este fenómeno se aborda de manera más amplia en el tercer apartado de este capítulo.

Gráfica 1



Grupo control

Gráfica 2



Grupo experimental

Grupo experimental

En la *gráfica 2* mostramos los resultados obtenidos en el grupo experimental, resalta el grado de convencimiento hacia el trabajo cooperativo que los alumnos manifestaron una vez concluido el estudio, 27 alumnos se manifestaron convencidos que trabajando de manera cooperativa podían incrementar significativamente su aprendizaje y 14 alumnos, aunque no muy convencidos, se manifestaron a favor de esta forma de trabajo. Es decir, 41 alumnos de los 45 de nuestro grupo experimental señalaron que el trabajo en equipo resulta ser más provechoso, los 4 alumnos que rechazaron esta forma de trabajo tienen calificaciones con promedios clasificados como buenos y excelentes (dos alumnos en cada caso).

Podemos observar en las gráficas 1 y 2 que al finalizar el estudio de campo, en el grupo control se nota un pequeño incremento en el número de alumnos que manifiestan concordar en algo con la afirmación “aprendo más cuando trabajo en equipo en las clases de matemáticas”, a diferencia del cambio más notorio que se observa en la gráfica del grupo experimental. Encontramos en este cambio de actitud por parte de los alumnos una correlación positiva con su postura y su desempeño durante el trabajo de campo, los datos obtenidos de sus hojas de trabajo muestran que la mayoría de estos alumnos concluyó de manera satisfactoria sus actividades. Esto se aborda de manera más amplia en el apartado “trabajo de campo”, en donde se comparan algunas respuestas entre alumnos gemelos.

Segundo reactivo: *“Me gustan las matemáticas”*

El objetivo de este reactivo fue conocer el impacto que tuvo el trabajo en equipo en las actividades en que se usó la calculadora, (en el caso del grupo experimental) y en el gusto por las matemáticas en ambos grupos. Se obtuvieron los siguientes resultados.

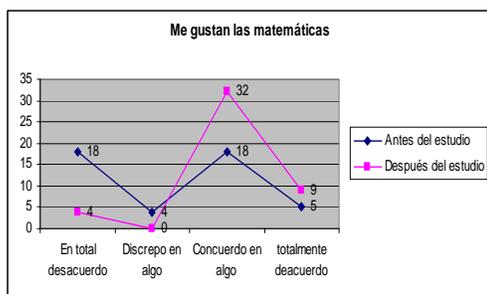
Grupo control

Los resultados de este segundo reactivo son ilustrativos, la *gráfica 3* muestra que aumentó significativamente el gusto de los alumnos por las matemáticas.

Consideramos que el factor principal de este cambio de actitud de los alumnos recae básicamente en la incorporación de la calculadora en el trabajo de aula, se encontró que esta herramienta cumplió eficazmente la función de brindar a los alumnos un andamiaje en sus procesos de aprendizaje. Es importante observar que el cambio favorable de actitud se dio en los alumnos que tenían los promedios más bajos, los que creemos que tenían mayores deficiencias en su estructura de conocimientos y los más carentes de herramientas conceptuales. También debemos considerar que es difícil gustar de algo que no se entiende. Los datos recabados sugieren que la incorporación de la calculadora a la vida escolar de estos alumnos les dio una alternativa para reforzar sus estructuras conceptuales permitiéndoles involucrarse activamente en la exploración de nuevos conceptos.

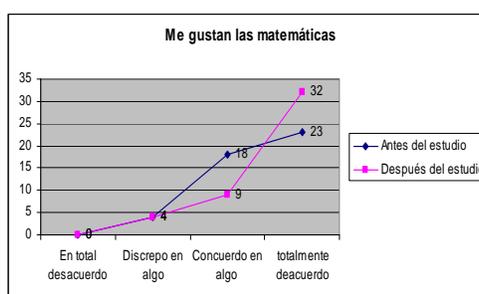
Sin embargo, esta aceptación no se dio de una manera rotunda, pues el mayor incremento se observó en la elección de la afirmación *concuerdo en algo* y no en la afirmación *totalmente de acuerdo*, lo cual mostraría un mayor convencimiento de los alumnos hacia el gusto por el aprendizaje de contenidos matemáticos, lo que nos hace pensar que si la experiencia obtenida a través de la incorporación de la calculadora se hubiese prolongado más tiempo, tal vez la aceptación de los alumnos hacia las matemáticas fuera más firme. No obstante, el cambio observado en los alumnos es positivo, ya que se redujo la mala predisposición que los alumnos presentaban hacia la materia y se incrementó su interés, manifestándose esto en una mayor disposición hacia el aprendizaje.

Gráfica 3



Grupo control

Gráfica 4



Grupo experimental

Grupo experimental

Lo obtenido en este apartado presenta diferencias importantes respecto a lo obtenido en el grupo control, como podemos observar en la *gráfica 4* el número de alumnos que manifestó agrado hacia las matemáticas de manera más contundente fue mayor que la registrada en el grupo control. Consideramos que el factor que pudo haber influido de manera más determinante en los alumnos en este cambio de actitud fue el ambiente de trabajo cooperativo. Como se mencionó anteriormente, se trató de conservar las mismas condiciones de trabajo en ambos grupos, excepto en los ambientes de trabajo; en uno se desarrollaría de manera individual y en el otro de manera cooperativa, siendo este último en donde se detectaron mayores cambios en cuanto al gusto por las matemáticas.

Podemos concluir que la influencia que tuvo el uso de la calculadora en ambos grupos fue positiva, como se muestra en la *gráfica 3*, hubo un incremento después del estudio en el grupo control respecto al número de alumnos que manifestaron su gusto por las matemáticas, aunque no de manera tan contundente como en el grupo experimental. Esto nos hace pensar que esta herramienta tiene mayor impacto cuando es utilizada en un ambiente de aprendizaje cooperativo; esto posiblemente se deba a la rapidez con la que se pueden producir gráficas y que esto facilita que presenten su trabajo a sus compañeros de equipo con mayor agilidad.

Tercer reactivo: “Me gusta trabajar de manera individual en las clases de matemáticas”

Este reactivo tiene como objetivo identificar el grado de aceptación que tienen los alumnos hacia el trabajo individual, antes y después del estudio. Se obtuvieron los siguientes resultados.

Grupo control

La *gráfica 5* muestra que al concluir el trabajo de campo disminuyó el número de alumnos que prefieren trabajar de manera individual. Según lo observado en las sesiones de trabajo con los alumnos de este grupo, este cambio de

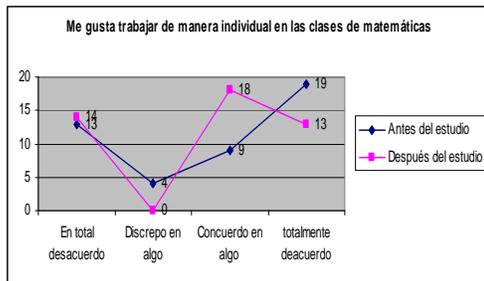
actitud puede deberse a que la calculadora les ofrece un microcosmos en donde se establece una interacción que se caracteriza en un primer momento por el aislamiento de los alumnos con su máquina, particularmente los que dominan mejor el funcionamiento de la calculadora. Esta actitud de los alumnos que los lleva a trabajar de manera aislada es reforzada por la disposición del mobiliario (bancas individuales) y a la forma de trabajo que impone el profesor durante la sesión (trabajo individual). Es importante mencionar que los alumnos que manifestaban dudas en el funcionamiento de la calculadora solicitaban ayuda a los alumnos más adelantados, pero debido a las dos condiciones de trabajo antes mencionadas se limitaba esta ayuda, conformándose con el apoyo que el profesor les podía proporcionar en ese momento, ya que a veces muchos alumnos manifestaban dudas y la atención inmediata para cada uno de ellos se tornaba difícil, produciendo descontrol en el grupo, pues mientras unos alumnos esperaban más instrucciones para continuar con la actividad, otros no tenían claro la instrucción anterior, retrasando con esto el trabajo de todo el grupo.

Otro aspecto que consideramos importante resaltar es el siguiente; algunos reportes de investigación señalan que la calculadora es una herramienta que además de potenciar el aprendizaje de los alumnos también fomenta el trabajo cooperativo. En nuestro estudio se observó que las condiciones de trabajo individual a las que fueron expuestos estos alumnos no impidieron que algunos trataran de establecer comunicación entre ellos, se pasaban las calculadoras de un compañero a otro como una forma de establecer un reto entre ellos tratando de igualar o incluso mejorar el trabajo del compañero que mostró su trabajo en la calculadora.

Otro de los casos observados fue el de algunos alumnos que se levantaban de su lugar con cualquier pretexto (tirar basura, sacar punta al lápiz, pedir permiso para ir al baño) y aprovechaban la oportunidad para pasar junto a algún compañero y ver su trabajo, si el profesor se los permitía entablaban una corta conversación, siendo la calculadora el punto de atención de ambos estudiantes.

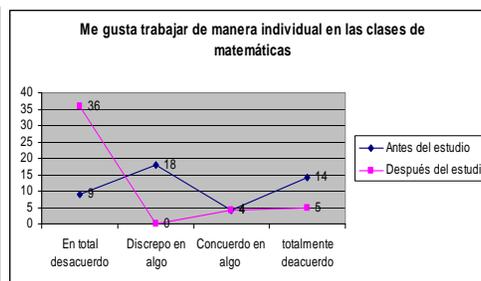
Lamentablemente esta situación sólo se observó en pocos alumnos, como hemos mencionado con anterioridad las condiciones de organización en el aula (bancas individuales acomodadas en filas con el frente hacia el pizarrón) y la forma de trabajo individual impuesta por el profesor frente a grupo, limitaron la comunicación entre los alumnos y el trabajo en equipo. Sin embargo, resulta interesante señalar que con base en lo observado, tanto la comunicación como el trabajo en equipo surge de manera natural en los alumnos y hasta cierto punto como una necesidad para comunicar sus ideas y sus dudas, por lo que pareciera que no importan las condiciones o las restricciones que puedan tener los alumnos para comunicarse, siempre encuentran estrategias para hacerlo.

Gráfica 5



Grupo control

Gráfica 6



Grupo experimental

Grupo experimental

En la *gráfica 6* podemos observar un importante cambio en la actitud de los alumnos en cuanto al trabajo individual, ya que antes del trabajo de campo solamente nueve de ellos manifestaron estar en desacuerdo con el trabajo individual y al finalizar la cantidad de alumnos aumentó a 36. Es interesante observar que los alumnos que manifestaron rechazo al trabajo individual al terminar el estudio son los que tienen promedios más bajos (de 5 a 8) y los que se manifestaron a favor a esta forma de trabajo fueron los alumnos con promedios altos (8.1 a 10), lo que nos hace suponer que estos alumnos, al contar con las herramientas conceptuales necesarias, prefieren trabajar de manera individual.

Cuarto reactivo: *“Me gusta estudiar de manera individual para las clases de matemáticas”*

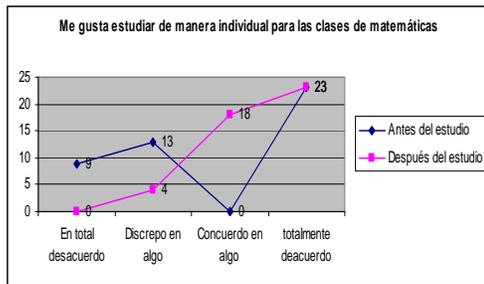
Este reactivo tiene la finalidad de conocer la preferencia que tienen los alumnos en cuanto estudiar en equipo o individualmente temas de la clase de matemáticas.

Grupo control

En los resultados de la gráfica 7 se muestra cómo cambió la actitud de los alumnos, marcaron claramente su preferencia a estudiar de manera individual para las clases de matemáticas. El cambio más significativo se dio en la opción *conuerdo en algo*, antes del estudio esta opción no había sido considerada por ningún alumno y al concluir el estudio 18 alumnos cambiaron su postura hacia el estudio individual. Como hemos mencionado antes, este resultado puede deberse a la influencia del trabajo con la calculadora, esta herramienta brinda al alumno la oportunidad de subsanar algunas carencias conceptuales, consideramos que esto favorece un aislamiento entre los alumnos y si las condiciones de trabajo no permiten una interacción entre ellos este aislamiento se puede mantener con mayor facilidad en los alumnos que presentan un mejor manejo de la máquina.

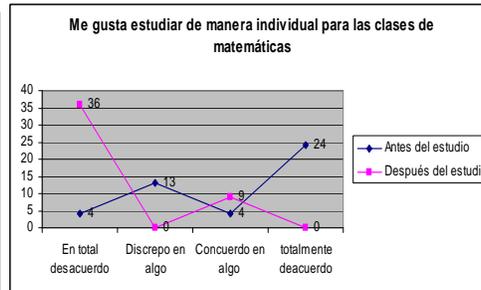
Los datos recabados durante las sesiones de trabajo sugieren que los alumnos encontraron en la calculadora un medio que les atrae y que les permite abordar más fácilmente las actividades de la clase de matemáticas. Además, como esta experiencia se desarrolló en un ambiente de trabajo individual, suponemos que éste fue un factor que también influyó de manera determinante en un mejor logro escolar de los alumnos. Por estas razones consideramos que al terminar el trabajo de campo los alumnos se mostraron más convencidos de que el trabajo individual les ofrece ventajas y esto podría explicar sus respuestas a esta pregunta.

Gráfica 7



Grupo control

Gráfica 8



Grupo experimental

Grupo experimental

Los resultados obtenidos en el grupo experimental al final del trabajo de campo reflejan un rechazo de la mayoría de los alumnos hacia el trabajo individual (gráfica 8). Creemos que estos resultados son el reflejo del agrado que los alumnos experimentaron al trabajar de manera cooperativa a diferencia de los resultados obtenidos en esta misma pregunta en el grupo control, en donde los alumnos manifestaron al concluir el estudio un mayor gusto por el estudio individual. Estos cambios no fueron tan contundentes como los encontrados en el grupo experimental, lo cual nos lleva a suponer que la combinación de un ambiente de trabajo cooperativo apoyado con la incorporación de la calculadora logra despertar en los alumnos un mayor interés y propiciar con esto un ambiente de trabajo más agradable. Consideramos que a esa combinación de recursos se deben los resultados obtenidos en esta pregunta.

En el apartado “actitudes de los alumnos gemelos” se hace una comparación entre las actitudes observadas después del estudio de campo con respecto a su desempeño académico, esto nos permite comparar las respuestas de los alumnos que afirmaron tener una mayor preferencia por el trabajo cooperativo en sus hojas de trabajo y estudiar si este cambio de actitud los llevó a acceder mejor a la construcción de sus conocimientos, lo cual calificaríamos como correlación positiva; por el contrario, si a pesar de manifestar su gusto por esta forma de trabajo sus aprendizajes fueran deficientes estaríamos hablando de una correlación negativa.

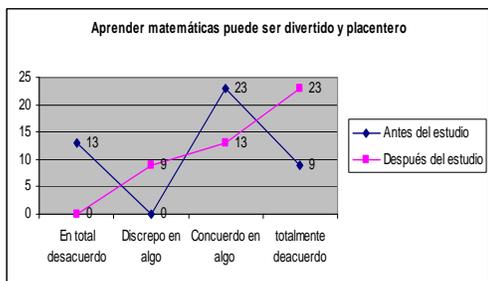
Quinto reactivo: “Aprender matemáticas puede ser divertido y placentero”

Este reactivo tiene como objetivo conocer los cambios que los alumnos experimentaron en cuanto a su gusto por las matemáticas al concluir el trabajo de campo. Los resultados obtenidos se muestran a continuación.

Grupo control

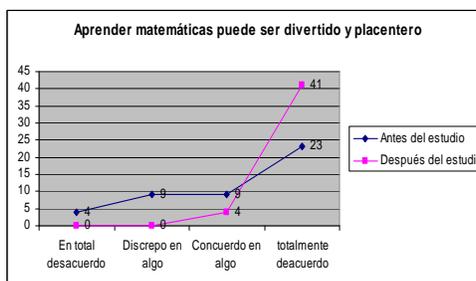
Como podemos observar en la *gráfica 9*, al concluir el estudio de campo los alumnos manifestaron un mayor agrado hacia las matemáticas, especialmente este cambio de actitud se dio en los alumnos con promedios más bajos, atribuimos principalmente este cambio a la incorporación de la calculadora en el trabajo, ya que además de servir como un andamiaje conceptual útil en los alumnos con promedios más bajos, la incorporación de esta herramienta fue una diferencia significativa que tuvieron estos educandos para su trabajo en el aula respecto a la forma en que venían trabajando antes del estudio.

Gráfica 9



Grupo control

Gráfica 10



Grupo experimental

Grupo experimental

Los resultados obtenidos en el grupo experimental son claros (*gráfica 10*), al terminar nuestro estudio 41 de los 45 alumnos afirmaron enfáticamente que el aprendizaje de las matemáticas puede resultar divertido y placentero.

Atribuimos estos resultados principalmente a la adopción del trabajo cooperativo que fue el elemento que no estuvo presente en el grupo control, en el cual no se dieron resultados tan significativos como los encontrados en el grupo experimental, esto sugiere que cuando se logra conjuntar de manera

adecuada un ambiente de trabajo cooperativo con el uso de la calculadora en actividades interesantes, se pueden lograr cambios significativos en la disposición de los alumnos para el aprendizaje de las matemáticas.

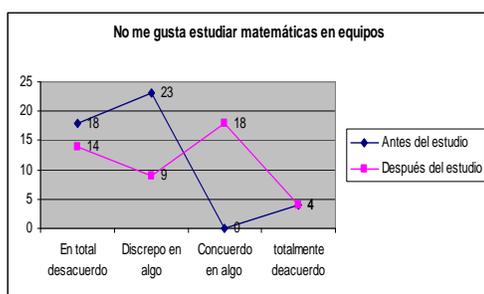
Sexto reactivo: “No me gusta estudiar matemáticas en equipos”

Este reactivo tiene la finalidad de obtener información sobre la actitud de rechazo o aceptación a las formas de trabajo a que fueron expuestos. Los resultados obtenidos se exponen a continuación.

Grupo control

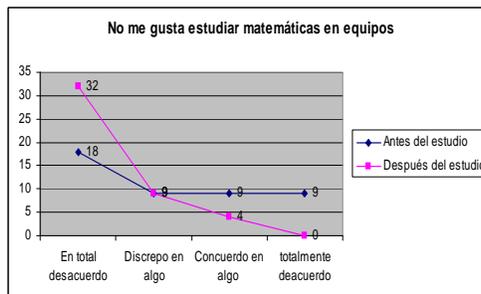
Como podemos observar en la *gráfica 11*, antes del estudio los alumnos manifestaron cierto nivel de gusto por el trabajo en equipo en las clases de matemáticas, solamente 4 de los 45 alumnos involucrados en el estudio manifestaron su rechazo al trabajo en equipo, la situación cambió considerablemente al concluir el estudio, pues 18 alumnos manifestaron concordar en algo en el rechazo a trabajar en equipo. Esto probablemente se debe, como ya lo hemos mencionado con anterioridad, a la incorporación de la calculadora, ya que se pudo observar que si a los alumnos no se les brindan facilidades para compartir sus ideas o conocimientos, los que alcanzan un mejor manejo de la calculadora se aíslan y los que no desarrollan esta habilidad dependen de la ayuda del profesor, y cuando esta ayuda no es suficiente el alumno simplemente deja la actividad dedicándose a la exploración de otras funciones de la calculadora de manera individual.

Gráfica 11



Grupo control

Gráfica 12



Grupo experimental

Grupo experimental

Las respuestas a esta pregunta muestran de manera clara el agrado de los alumnos hacia el trabajo cooperativo. De acuerdo con lo observado durante las sesiones en el aula esta situación surgió a partir de la necesidad de compartir con los demás sus logros o sus dudas, encontrando en la mayoría de los casos el apoyo de su igual para la solución de los problemas o para establecer un reto entre ellos y de esta manera incrementar el interés por el tema. Creemos que a esto se debe el rechazo que manifestaron los alumnos a la afirmación “*no me gusta estudiar matemáticas en equipos*” al concluir el estudio de campo (ver *gráfica 12*).

Séptimo reactivo: “*Me siento más cómodo preguntándole a un compañero de mi equipo que al profesor*”

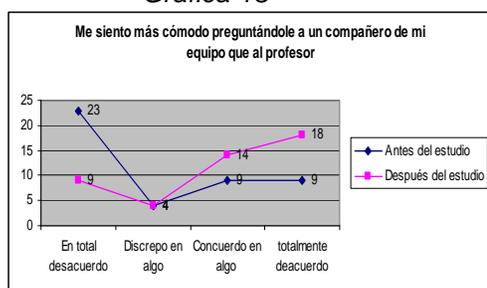
Este reactivo fue usado para indagar si los alumnos se sienten más cómodos al momento de preguntar a un compañero o cuando lo hacen al profesor, y en qué medida esta actitud puede variar una vez terminado el estudio. Además consideramos importante indagar si algunos alumnos a pesar de estar expuestos a condiciones de trabajo diferentes pudieran presentar situaciones contrarias a lo esperado. Se esperaba al final del estudio que los alumnos que trabajaron en un ambiente individual eligieran la opción *en total desacuerdo* en este reactivo y si no fuera este el caso entonces estarían mostrando cierto rechazo a su forma de trabajo. En el caso del grupo experimental se esperaba que los resultados encontrados al final del estudio apuntaran a favor de esta afirmación, en caso contrario interpretaríamos esto como cierto rechazo por parte de los participantes del estudio hacia la forma de trabajo en la que fueron conducidos. A continuación se describen los resultados obtenidos.

Grupo control

Como podemos observar en la *gráfica 13*, a pesar de que este grupo se condujo siempre en un ambiente de trabajo individual, al concluir el estudio aumentó el número de alumnos que cree que es mejor preguntarle a un compañero antes que al profesor, lo cual parece ser una evidencia de que la comunicación entre iguales es más apropiada que entre profesor y alumno.

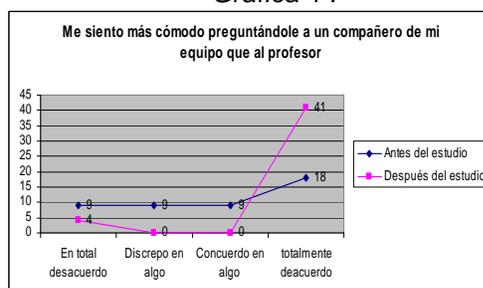
Cabe mencionar también que el número de alumnos que se manifestó en contra de esta afirmación aumentó significativamente al final del estudio, polarizándose las tendencias dentro del grupo. Creemos que esto se debe a la imagen que ellos tienen del profesor cuando se trabaja en un ambiente de trabajo individual, de acuerdo con las observaciones realizadas durante el trabajo de campo se pudo apreciar cómo en este grupo la responsabilidad del aprendizaje recaía básicamente en el profesor, siendo el personaje central y el único capacitado para dar información correcta acerca del tema.

Gráfica 13



Grupo control

Gráfica 14



Grupo experimental

Grupo experimental

Los resultados expuestos en la *gráfica 14* muestran la importancia que otorgan los alumnos a la comunicación entre iguales. Nueve de cada diez alumnos del grupo experimental eligieron la opción “*me siento más cómodo preguntándole a un compañero de mi equipo que al profesor*”. Según nuestras observaciones durante el desarrollo de las actividades esta respuesta podría deberse a los siguientes factores:

- a) *Igualdad en el lenguaje y en el manejo de los conceptos*; se observó que cuando el profesor explicaba la actividad algunos alumnos se mantenían como espectadores hasta que algún compañero de su mesa de trabajo lograba obtener los resultados deseados por el profesor, en este momento se convertían en parte activa del trabajo haciendo preguntas al compañero que había logrado obtener respuestas correctas. Al preguntar a estos alumnos por qué preferían preguntarle a un compañero ofrecieron explicaciones como las siguientes:

1. *Él sí me explica cómo lo hizo.*
 2. *Porque él es más inteligente y le agarra más rápido la onda que yo (sic).*
 3. *Porque hay algunas cosas que no entiendo y él me las explica.*
- b) *Una atención más individualizada;* algunos alumnos explicaron que preferían preguntarle a un compañero porque:
1. *Me explica más despacio que el profesor.*
 2. *Siempre está cerca cuando tengo alguna duda.*
- c) *Llamar menos la atención;* otros alumnos argumentaron que en algunas ocasiones preferían preguntarle a su compañero porque:
1. *No me gusta que la mayoría del salón se entere de mis dudas porque son muy burlones.*
 2. *Es mejor tratar de resolver primero las actividades entre nosotros para que no digan los demás que nos ayudaron mucho.*

Los resultados que se muestran a continuación nos informan cómo el trabajo en equipo logra crear en los alumnos un mejor ambiente de aprendizaje (ver gráfica 14).

Octavo reactivo: “Aprendo menos cuando trabajo en equipo en las clases de matemáticas”

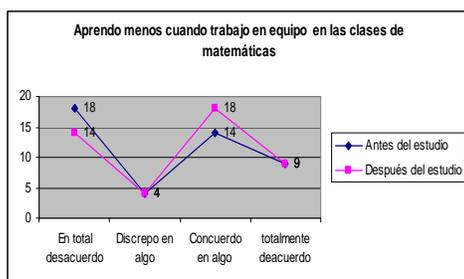
Este reactivo tiene como objetivo indagar cómo perciben los alumnos el trabajo en equipo, si de alguna manera ellos sienten que los limita en su aprendizaje, o si esta forma de trabajo les da mejores condiciones para aprender.

Grupo control

Como podemos observar en la *gráfica 15*, los resultados obtenidos antes y después del estudio son muy similares, es decir, no se observa un cambio significativo en la actitud de los alumnos del grupo control hacia una forma de trabajo, lo que hasta cierto punto era lo esperado, ya que estos alumnos no experimentaron el ambiente de trabajo cooperativo. Sin embargo, resulta

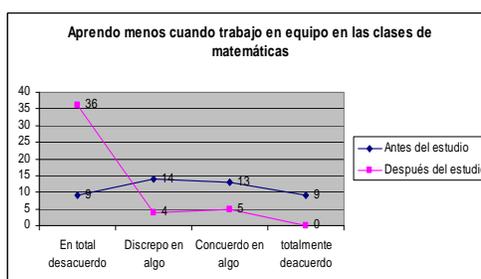
interesante rescatar en este apartado que los alumnos que están de acuerdo con la idea de que el trabajo cooperativo limita el aprendizaje son los que tienen promedios más altos, mientras que los alumnos con promedios más bajos manifiestan su rechazo a esta idea. Esto nos hace pensar que los alumnos con una “estructura conceptual más sólida” adquieren mayor independencia y se les hace innecesario el trabajo en equipo, mientras que los alumnos con una “estructura conceptual menos sólida” se sienten de alguna manera más seguros al ser apoyados por sus compañeros, consideramos que por este motivo manifiestan su rechazo a la afirmación *aprendo menos cuando trabajo en equipo en las clases de matemáticas*.

Gráfica 15



Grupo control

Gráfica 16



Grupo experimental

Grupo experimental

Los resultados que se muestran en la *gráfica 16* manifiestan el agrado de los alumnos por el trabajo cooperativo, al concluir el trabajo de campo 36 alumnos rechazaron la idea de aprender menos cuando trabajan de manera cooperativa, 5 de los alumnos que manifestaron concordar en algo con esta idea son los que tienen un promedio de calificaciones considerado como excelente, lo cual nos lleva a reafirmar la idea de que hay una clara relación entre este resultado y el nivel de independencia que muestran estos alumnos, lo cual está también relacionado con el nivel y amplitud de los conocimientos que poseen, es decir, nuestros datos sugieren que entre más sólidos son los conocimientos tenga un alumno más proclividad tendrá para adaptarse a un ambiente de trabajo individual. Éste puede ser uno de los factores que intervienen para que un alumno no tenga una disposición positiva hacia el trabajo cooperativo. De

acuerdo con nuestros registros durante las sesiones de trabajo, otros factores que podrían influir en la reafirmación de esta actitud son el no sentirse a gusto en el grupo de trabajo, no estar acostumbrado a debatir sus ideas y sentir que los demás no avanzan a su ritmo.

Creemos que el factor más importante es el acervo de conocimientos que ya maneja el alumno, pues esto hace que no sienta la necesidad de pedir apoyo a algún compañero. También es necesario considerar que esto probablemente se deba al condicionamiento que tiene al trabajo habitual en el salón de clase, en donde no está permitido pedir ayuda y por lo tanto se espera que él debe contar con las herramientas necesarias para subsistir en esta forma de interacción.

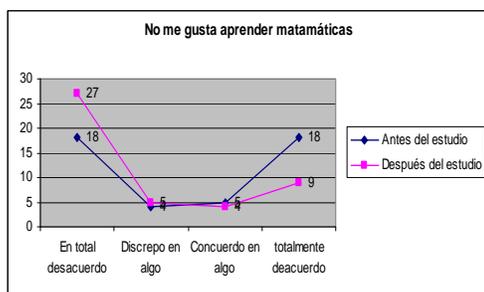
Noveno reactivo: “No me gusta aprender matemáticas”

Mediante este reactivo pretendemos indagar cuál fue el cambio de actitud que los alumnos tuvieron con respecto al gusto hacia el aprendizaje de las matemáticas.

Grupo control

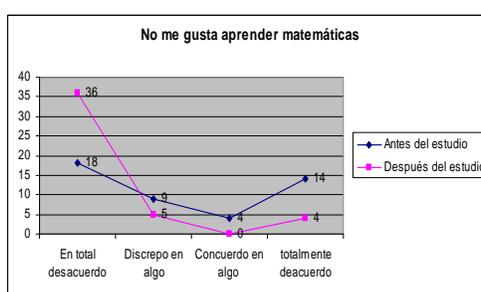
La *gráfica 17 muestra que* el número de alumnos que tenían un cierto rechazo hacia las matemáticas antes del estudio era igual al número de alumnos que manifestaban agrado por éstas. Al concluir el estudio el número de alumnos que manifestó gusto por las matemáticas fue mayor. Con base en lo observado atribuimos este cambio a dos factores: la incorporación de la calculadora en la vida escolar y el tipo de actividades que confrontaron, estas actividades despertaron en los alumnos interés y les motivaron.

Gráfica 17



Grupo control

Gráfica 18



Grupo experimental

Grupo experimental.

Como podemos observar en la *gráfica 16*, antes del estudio los alumnos de este grupo presentaban respuestas similares hacia el agrado por el aprendizaje de las matemáticas que los alumnos del grupo control; sin embargo, al concluir el estudio los alumnos del grupo experimental manifestaron mayor aceptación por la materia que los alumnos del grupo control. Considerando que la diferencia más significativa en el desarrollo de las actividades entre un grupo y otro fue la incorporación del ambiente de trabajo cooperativo en el grupo experimental, esto sugiere que esta forma de trabajo crea un ambiente en donde los alumnos se sienten mejor, lo cual se manifiesta en un incremento significativo en su gusto por la clase de matemáticas.

Resumen del apartado

Una vez concluido el estudio los resultados obtenidos en el rubro de actitudes reafirman lo que se ha reportado en otras investigaciones (Moreno, 2004; Coll, 2000; Ferreiro, 2000; Johnson y Johnson, 1989; Walmsley y Muñoz, 2003). En estos reportes se atribuye al trabajo cooperativo las siguientes ventajas en cuanto al desempeño de los alumnos:

- Adquieren mayor confianza en sí mismos.
- Hay mayor disposición para asumir eventualmente el liderazgo.
- Favorece una mayor participación en la toma de decisiones para la solución de conflictos.
- Propicia el desarrollo de una mayor responsabilidad en su aprendizaje y el de sus compañeros.
- Hay evidencia de un incremento en su auto estima.
- Se establecen vínculos afectivos entre los miembros del equipo desencadenando un equilibrio interpersonal que motiva la necesidad de aprender.

A continuación resumimos los resultados del cuestionario sobre actitudes haciendo referencia a cada una de las vertientes de este instrumento.

¿Cuándo aprendo más, cuando trabajo de manera individual o cuando trabajo de manera cooperativa?

Las respuestas del grupo control en que eligen la opción “aprendo más cuando trabajo en equipo en las clases de matemáticas” no reportan un cambio significativo, antes del estudio el 40% de los alumnos manifestaron estar de acuerdo con esa afirmación y al concluir el estudio este porcentaje no presentó un cambio observable.

En contraste con lo anterior, en la opción “aprendo menos cuando trabajo en equipo en las clases de matemáticas” se observó una sensible preferencia hacia el trabajo individual, antes del estudio el 30% de los alumnos manifestaron “*concordar en algo*” con esa afirmación; al concluir el estudio el 40% de los alumnos manifestaron estar de acuerdo con ella, es decir hubo un incremento de 10% en el número de alumnos que piensan que el trabajo en equipo puede reducir su aprendizaje.

Los resultados obtenidos en el grupo experimental presentaron resultados que contrastan con los del grupo control. En cuanto al reactivo “*aprendo más cuando trabajo en equipo en las clases de matemáticas*”, el 20% de los alumnos manifestó estar totalmente de acuerdo con esta afirmación antes de iniciar el trabajo de campo y al concluir éste el porcentaje aumentó a un 60% de alumnos que manifestaron estar totalmente de acuerdo con el trabajo en equipo como promotor de más aprendizaje.

Esta postura de los alumnos hacia el gusto por el trabajo en equipo se confirma con los resultados del reactivo “*aprendo menos cuando trabajo en equipo en las clases de matemáticas*”. Antes de iniciar el estudio el 20% de los alumnos manifestó su rechazo a esta idea y al concluir el estudio el 80% de los alumnos manifestó estar en total desacuerdo, es decir, hubo un cambio del 60% en los alumnos que no están de acuerdo con la idea de que el trabajo en equipo reduce su capacidad de aprender.

En el reactivo “no me gusta estudiar matemáticas en equipos”, se observó un cambio significativo en el grupo control. Al concluir el estudio, el 40% de los

alumnos contestó “estar de acuerdo en algo” en esta afirmación, siendo que al inicio del estudio ninguno de los alumnos eligió esta opción. Debemos considerar que también en el grupo control se emplearon recursos didácticos que los alumnos antes no tenían, especialmente el trabajo con la calculadora y las actividades de aprendizaje que fueron especialmente preparadas para el desarrollo de esta investigación.

Los datos recabados en el presente estudio muestran que el trabajo con la calculadora permitió que los alumnos experimentaran de manera individual un mayor número de oportunidades de aprendizaje, el uso de esta herramienta facilitó el tratamiento de nuevos conceptos y las reacciones de los estudiantes muestran que les atrajo trabajar con la máquina. Esto, aunado a que el trabajo con la calculadora se dio en un ambiente de trabajo individual, parece haber propiciado que los alumnos percibieran que estas condiciones favorecieron su aprendizaje, de ahí que obtuviéramos una actitud favorable hacia el trabajo individual al terminar el estudio de campo.

Los resultados obtenidos en el grupo experimental en este mismo reactivo muestran la aceptación que los alumnos tienen por el trabajo cooperativo, el 70% de los encuestados eligieron estar en total desacuerdo con la afirmación “no me gusta estudiar matemáticas en equipos” y un 20% afirmaron discrepar en algo, teniendo tan sólo un 10% de alumnos que manifestaron concordar en algo con la afirmación. Es decir, que el gusto por el estudio de las matemáticas aumentó en un 90% en el ambiente de aprendizaje cooperativo.

El reactivo *“me siento más cómodo preguntándole a un compañero de mi equipo que al profesor”* permitió observar que en el grupo control se reforzó la idea que los alumnos tienen sobre el papel que desempeña el profesor en su aprendizaje como el único con capacidad para resolverles sus dudas y respaldar su aprendizaje. Antes de iniciar el trabajo de campo el 40% de los alumnos de este grupo manifestaron estar totalmente de acuerdo con esta afirmación y al concluir el estudio el 80% de los alumnos expresaron que el profesor es el único responsable de su aprendizaje

Los resultados obtenidos en el grupo experimental nos dan una clara idea de la confianza que desarrollaron los alumnos en sí mismos y en el apoyo de sus compañeros de equipo al trabajar en un ambiente cooperativo. Al concluir el estudio el 90% de los estudiantes manifestó estar de acuerdo con la afirmación *“me siento más cómodo preguntándole a un compañero de mi equipo que al profesor”*, lo cual proporciona evidencia de un compromiso mayor por parte de estos alumnos hacia su aprendizaje.

¿Cómo me gusta más trabajar, de manera individual o de manera cooperativa?

En la opción *“me gusta trabajar de manera individual en las clases de matemáticas”*, el grupo control muestra una tendencia a favor del trabajo individual. Sin embargo, en el grupo experimental se observó un cambio claro hacia el trabajo cooperativo, el 80% de alumnos aseguró estar en total desacuerdo con el trabajo individual.

En el reactivo *“me gusta estudiar de manera individual para las clases de matemáticas”* el grupo control mostró un leve incremento en su gusto por el estudio individual fuera del ámbito escolar; sin embargo, en el grupo experimental el 80% de los alumnos manifestó estar en total desacuerdo con el estudio individual en las clases de matemáticas, aún cuando esta actividad se realice fuera del ámbito escolar. Esto sugiere que los alumnos, después de haber tenido la experiencia del trabajo cooperativo dentro de un salón de clases, sienten la necesidad de acudir a esta forma de trabajo dentro y fuera de la escuela, tal vez esto se deba a los vínculos afectivos que desarrollaron con los integrantes de su equipo.

Agrado o desagrado hacia las matemáticas. Los alumnos expresaron sus juicios respecto a las siguientes afirmaciones:

- Me gustan las matemáticas.
- Aprender matemáticas puede ser divertido y placentero.
- No me gusta aprender matemáticas

Aunque hubo un cambio favorable en el gusto de los alumnos hacia las matemáticas en el grupo control y el grupo experimental, podemos observar en la siguiente tabla que los resultados en este último fueron más contundentes en estos tres reactivos.

Actitudes de los alumnos hacia el gusto por las matemáticas				
Reactivo	Grupo control		Grupo experimental	
	Antes del estudio	Después del estudio	Antes del estudio	Después del estudio
2. Me gustan las matemáticas	10% de los alumnos están totalmente de acuerdo con esta afirmación	20% de los alumnos manifiestan están totalmente de acuerdo con esta afirmación	50% de los alumnos están de acuerdo con esta afirmación	70% de los alumnos están de acuerdo con esta afirmación
5. Aprender matemáticas puede ser divertido y placentero	20% de los alumnos están totalmente de acuerdo con esta afirmación	50% de los alumnos están totalmente de acuerdo con esta afirmación	70% de los alumnos están totalmente de acuerdo con esta afirmación	90% de los alumnos están totalmente de acuerdo con esta afirmación
9. No me gusta aprender matemáticas	40% de los alumnos están en total desacuerdo con esta afirmación	60% de los alumnos están en total desacuerdo con esta afirmación	40% de los alumnos están en total desacuerdo con esta afirmación	80% de los alumnos están en total desacuerdo con esta afirmación

Los datos que recabamos muestran que los alumnos que modificaron de manera más clara su gusto por las matemáticas fueron aquéllos cuyo promedio de calificaciones no es el más alto en sus grupos: regular (7 a 7.9), bajo (6 a 6.9) y por debajo del promedio (5 a 5.9). Esto nos conduce a pensar que el papel de la calculadora en estos alumnos fue brindarles un andamiaje didáctico, lo cual les ayudó a entender conceptos no triviales aún teniendo carencias en sus aprendizajes previos. Es decir, en estos casos el uso de la calculadora coadyuvó a subsanar los huecos existentes en las estructurales conceptuales y algorítmicas de los alumnos, dándoles la oportunidad de acceder a niveles superiores e incrementando con esto su interés por las matemáticas.

Conocimientos previos

En este apartado presentaremos los resultados obtenidos en los cuestionarios que fueron aplicados a los 10 alumnos del grupo control y los 10 alumnos del grupo experimental antes de iniciar el trabajo de campo. Uno de los objetivos que pretendemos alcanzar con el análisis de estos cuestionarios es identificar las diferencias que pudiera haber entre los conocimientos y creencias de un alumno del grupo control y su gemelo del grupo experimental en el tema de gráficas. Para esto asignaremos una clave a cada alumno según el promedio y grupo como se muestra en el siguiente cuadro.

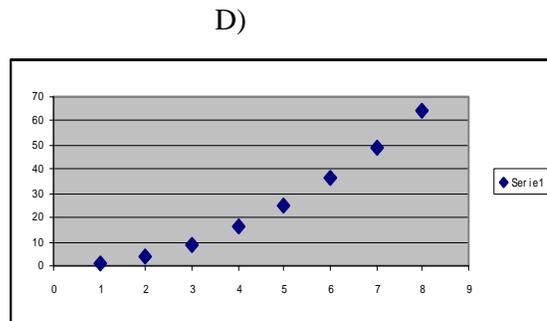
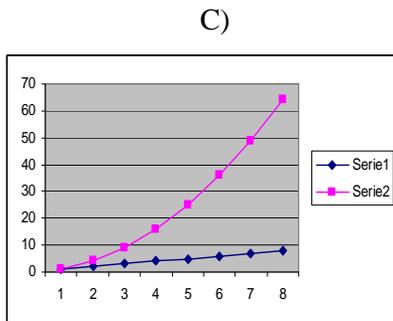
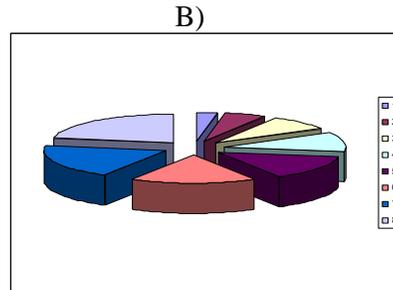
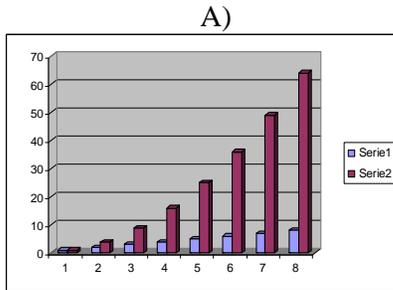
Grupo control			Grupo experimental		
Nombre	PROMEDIO	CLAVE	Nombre	PROMEDIO	CLAVE
Osorio Cruz Luis Ángel	5.9	10C	Martínez Segura Luis	5.9	10E
Ortiz Martínez Marco A.	6.3	9C	Trinidad Cruz David	6.3	9E
Ávila Ovando Beatriz	6.7	8C	Ávila Ovando Leticia	6.7	8E
Mosqueda Estévez Saúl	6.7	7C	De la Cruz Ayala Rafael	6.7	7E
Vélez Esquivel Karla	7.3	6C	Narciso Solano Liliana	7.3	6E
Rosales García María L	7.8	5C	Flores Sánchez Mayra	7.8	5E
Mendoza Reyes Patricia	8.5	4C	Pasalagua Flores Paola	8.5	4E
Hernández García Rosa	8.6	3C	Jiménez Chávez Janet	8.6	3E
Sosa de la Cruz Noemí	9.3	2C	Chávez Juárez Ana Laura	9.0	2E
Cortina Cortina María	9.4	1C	Sosa Hernández Marisol	9.2	1E

Uso de las gráficas.

Nuestro objetivo fue conocer el grado de familiaridad que los estudiantes tenían con los tipos gráficas más usuales. Utilizamos cuatro tipos de gráficas: gráficas de barras, gráficas circulares, gráficas de líneas y gráficas de puntos. En el libro para el maestro se menciona la utilidad de estas gráficas: *“a lo largo de las actividades en la clases, los alumnos deberán tener oportunidad de conocer y familiarizarse con las gráficas de uso común en las revistas, los periódicos y otros medios de comunicación. Éstos son entre otros; Grafica de barras, grafica de sectores o circulares y gráfica de datos que varían con el tiempo SEP (2001, pág.285)*

Actividad 1. Identificación de gráficas

¿Has encontrado gráficas como las siguientes en tu vida cotidiana?



Grupo control

Solamente un alumno de los diez involucrados en el estudio no supo identificar ninguna de las cuatro gráficas que se usaron en el cuestionario, el 90% de los alumnos de la muestra reconocen por lo menos una gráfica, el 80% reconoce dos graficas, el 70% reconoce tres de las graficas y el 50% reconoce las cuatro gráficas. La gráfica que reconocen más alumnos es la de barras (8 de 10), quedando en segundo término las gráficas de líneas.

Grupo experimental

Los diez alumnos elegidos para el estudio reconocen por lo menos una de las cuatro gráficas expuestas en esta primera pregunta. El 90% reconoce dos gráficas de las cuatro, el 80% reconoce tres y el 60% reconoce todas. La gráfica que es más familiar para los alumnos es la de barras (9 de 10).

Lo anterior indica que las gráficas están presentes en la vida de los alumnos, 19 de los 20 alumnos que respondieron al cuestionario (grupo control y grupo experimental) reconocen por lo menos una de las cuatro gráficas y la mitad de los alumnos aproximadamente reconocen todas. Aunque el tipo de pregunta

que planteamos no nos permite saber si saben cuál es la utilidad de cada una, las respuestas a esta pregunta nos dan un parámetro para conocer el nivel de familiaridad que tienen los alumnos con los distintos tipos de gráficas que se abordan en el currículo escolar.

Actividad 2. Utilidad de las gráficas

¿Para qué crees que sirven las gráficas?

Grupo Control

Cuatro de los diez alumnos no respondieron esta pregunta, los seis alumnos que respondieron acudieron a tres contextos distintos. Tres alumnos contestaron que la utilidad de las gráficas está en la representación de cantidades; dos alumnos señalaron que la utilidad de las gráficas se centra en la representación de porcentajes; un alumno señaló que la utilidad de las gráficas se da en la representación de grandes cambios en sucesos.

A continuación presentamos textualmente algunas de las respuestas que dieron los alumnos del grupo control a esta pregunta y que ejemplifican los tres contextos que anteriormente señalamos.

Contexto	Respuestas
1. Representar cantidades	2C: <i>“Para representar una cantidad en bajas y en altas numeraciones”</i>
2. Representar porcentajes	4C: <i>“Saber el porcentaje de algo”</i>
3. Representar cambios en sucesos de la vida cotidiana	9C: <i>“Para verificar los cambios grandes y pequeños en una semana”</i>

Grupo experimental

Los alumnos de la muestra del grupo experimental se refirieron a los mismos contextos que se mencionaron por los alumnos del grupo control. Esto se muestra a continuación.

	¿Para qué crees que sirven las gráficas?
5E	<i>“Para verificar en todo el país cuántos somos”</i>
1E	<i>“Llevar la cuenta de algo”</i>

7E	<i>"Para representar de otra forma números"</i>
----	---

Las respuestas de seis alumnos se refieren a la utilidad de las gráficas para la representación de porcentajes; Por ejemplo:

	¿Para qué crees que sirven las gráficas?
2E	<i>"Para saber el porcentaje o el por ciento"</i>
3E	<i>"Tener un porcentaje"</i>
9E	<i>"Para ver el porcentaje"</i>

Solamente dos alumnos dieron respuestas relacionadas con la utilidad de las gráficas para representar cambios en sucesos de la vida cotidiana, por ejemplo:

	¿Para qué crees que sirven las gráficas?
2E	<i>"Para saber cuánto aumenta algún trabajo o venta"</i>
3E	<i>"Para medir la proporcionalidad de diferentes tipos de repartición de algo o la distancia o la altura"</i>

Solamente las respuestas de dos alumnos no se ajustaron a ninguno de las tres contextos antes mencionados (en ambos grupos experimental y de control:

	¿Para qué crees que sirven las gráficas?
4E	<i>"Saber más del tema "</i>
6E	<i>"Depende para lo qué lo uses "</i>

Catorce de los veinte alumnos se refirieron a alguna utilidad a estas representaciones. Estos datos confirman la idea que teníamos (con base a la primera pregunta del cuestionario) respecto a la utilidad que tienen las gráficas en la vida de los alumnos. Estos datos indican que los alumnos poseen un escaso conocimiento en el tema de funciones lineales, ningún alumno se refirió a las gráficas como una forma de representación de dichas funciones, aunque algunos alumnos se aproximaron a la noción de *"las funciones como una relación entre dos cantidades, o como la expresión de una cantidad en términos de otra"* (SEP, 2000, pág. 150), cuando mencionaron la utilidad de las

gráficas en la representación de cantidades. Sin embargo, no llegaron a mostrar con mayor claridad que tuvieran un conocimiento previo en el tema de funciones lineales. Éste era un resultado esperado pero fue necesario corroborarlo porque es una parte importante que debíamos conocer para diseñar las actividades de aprendizaje debido al método de investigación adoptado en este estudio. Podíamos anticipar que los alumnos seguramente sabrían poco o nada sobre el tema de funciones lineales debido a que éste se empieza a manejar hasta el segundo grado de educación secundaria y estos alumnos se encontraban cursando el primer grado en el momento en que se llevó a cabo el estudio. Esto nos proporcionó un referente comparativo de gran utilidad, porque nos permitió constatar que los alumnos en ambos grupos estaban condiciones semejantes respecto al tema que nos ocupa.

Actividad 3. Gusto por aprender a hacer gráficas

¿Te gustaría aprender a hacer gráficas? ¿Por qué?

Grupo control

El 50% de los alumnos de la muestra en el grupo control respondió que le gustaría aprender a hacer gráficas, en particular los alumnos con promedios más altos, sus respuestas fueron como las siguientes:

1C: *“Sí, porque así puedo relacionar resultados por medio de las gráficas”.*

2C: *“Sí, porque son divertidas”.*

3C: *“Sí, porque aprendería más de las gráficas”.*

4C: *“Sí, porque algún día cuando trabaje voy hacer gráficas y no voy a saber cómo se hacen”.*

Solamente uno de los alumnos no contestó por qué le gustaría aprender a hacer gráficas. El 50% restante contestó que no le interesaría aprender a hacer gráficas (los promedios más bajos). La mayoría argumentó que ya sabía hacerlas y otros simplemente no se interesaban en la construcción de gráficas, enseguida mostramos algunos ejemplos de las repuestas obtenidas.

6C *“Ya no porque ya sé”.*

8C *“No, porque sería mucha flojera”.*

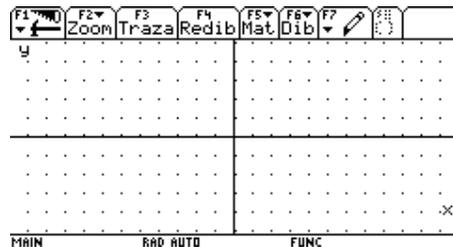
9C *“No, porque ya sé hacerlas”.*

Grupo experimental

En esta pregunta se encontró una de las pocas diferencias entre las posturas del grupo experimental y el grupo control, el 100% de los encuestados manifestaron una disposición positiva hacia aprender a construir gráficas.

Actividad 4. Finalidad de los ejes cartesianos

En la siguiente figura puedes observar una línea vertical y una línea horizontal que se cruzan. ¿Sabes para qué sirven estas líneas?



Grupo control

Ocho de los diez alumnos no supieron contestar nada acerca de las líneas que se cruzan en la figura (ejes cartesianos), los dos que respondieron expresaron que eran líneas que servían para dividir y para ubicarse; aunque estas respuestas no sean muy adecuadas para caracterizar a los ejes cartesianos, sí reflejan un cierto grado de comprensión por parte de estos dos alumnos. Sus respuestas fueron como las siguientes:

10C: "Para ubicarse".

2C: "Para dividir o hacer otras cosas".

Grupo experimental

El grupo experimental dio respuestas muy similares a las del grupo control. Siete de los diez alumnos de nuestra muestra dejaron la pregunta en blanco, de los tres alumnos que respondieron, uno afirmó conocer la utilidad de los ejes cartesianos, sin embargo no lo supo explicar. Los otros dos alumnos contestaron lo siguiente:

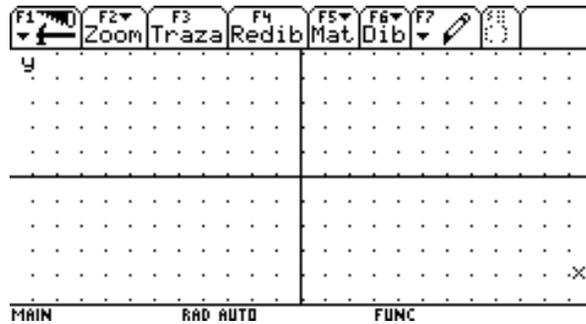
2E: "Sí, para hacer una gráfica".

5E: "Sí, para partir en cuatro al cuadrado".

Estas repuestas muestran las ideas vagas que los alumnos tienen acerca de los ejes cartesianos e informan sobre el estado del conocimiento que tienen ambos grupos en este tema. Estos datos se retomarán posteriormente.

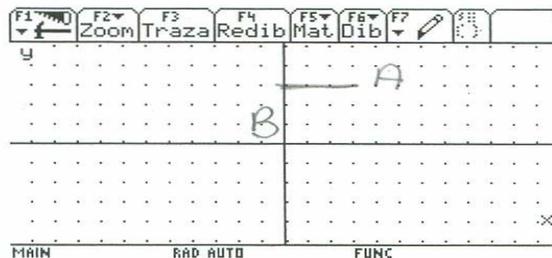
Actividad 5. Localización de puntos en el plano cartesiano

En la siguiente figura marca el punto A cuyas coordenadas son (3,4) y el punto B cuyas coordenadas son (5,2)

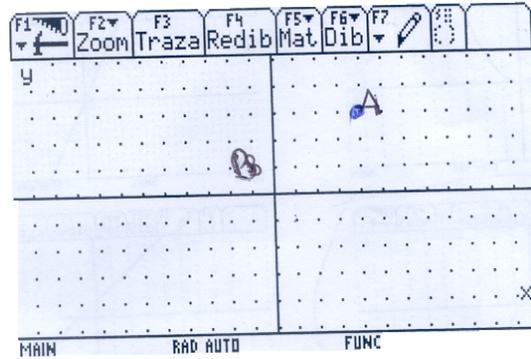


Grupo control

Siete alumnos no contestaron esta pregunta, los tres restantes ubicaron puntos en el plano tratando de localizar el punto A y el punto B sin tener éxito. Al parecer estos alumnos no tienen claro que el primer número de la pareja de coordenadas representa a la abscisa y el segundo a la ordenada, estos alumnos utilizan los valores de la pareja ordenada indistintamente; otro de los errores encontrados es el de empezar el conteo de las marcas considerando el punto asociado al origen. Por ejemplo, el alumno 10C en su intento por ubicar el punto A(3,4) encontró correctamente la primera coordenada y cometió un error en segunda, pues inició considerando en su conteo el origen. Respecto al punto B(5, 2), al parecer inicia su conteo desde la perpendicular al eje Y trazada a partir del punto A como se muestra en la imagen escaneada de su hoja de trabajo:



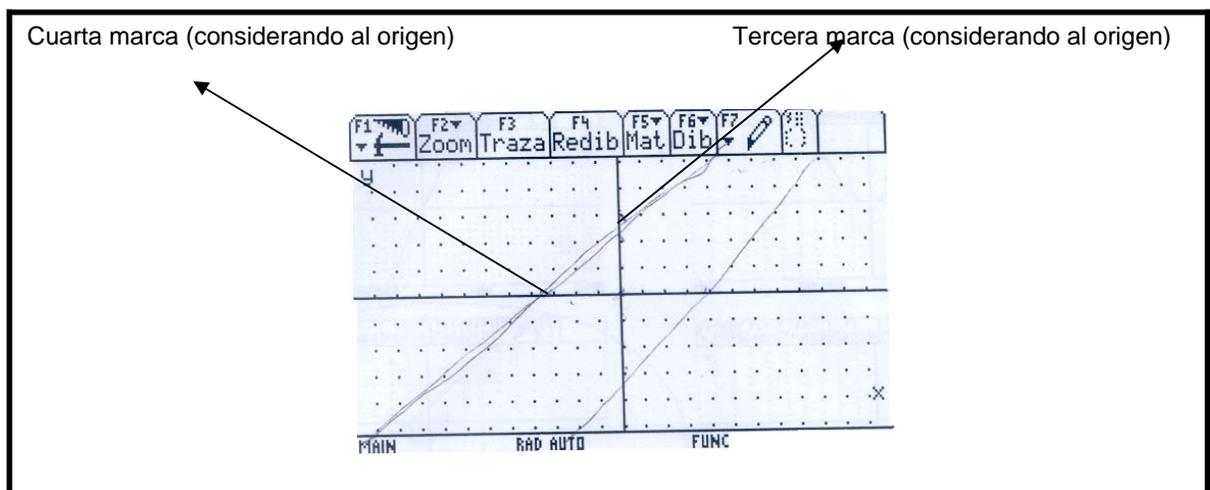
Al localizar el punto A(3,4), el alumno 2C cometió el error de invertir el orden de las coordenadas como se observa en la siguiente figura (imagen escaneada de su hoja de trabajo).



Grupo experimental

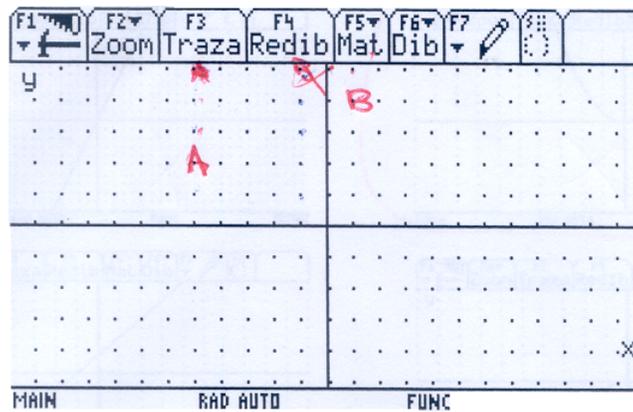
Siete alumnos no contestaron la pregunta, sin embargo, hubo tres respuestas que no siendo correctas creemos que vale la pena comentarlas para formarnos una idea del razonamiento que usaron estos alumnos.

Para ubicar el punto A(3,4), el alumno 5E interpretó la coordenada 3 como una indicación de subir tres marcas sobre el eje Y, y el 4 como el número de marcas que se deben avanzar sobre el eje X, del origen hacia la izquierda, considerando para el conteo en ambos casos al punto (0,0) como la primera marca; por último, unió los puntos que localizó con una línea recta, como se muestra en la imagen escaneada de su hoja de trabajo.



Este alumno tiene claro que los ejes cartesianos sirven para localizar un punto por medio de la graduación que presentan, aunque lo hace de manera invertida y considerando en su conteo al origen. Además, este alumno tiene la creencia de que al trabajar con coordenadas el resultado tiene que ser una línea recta. Esto probablemente se deba a información previa que el alumno maneja, ya que en materias como Física y Química los alumnos elaboran tablas y gráficas a partir del registro de temperaturas, tallas, edades, pulso, etcétera. Varios de estos eventos se representan mediante gráficas lineales y tal vez ésta sea la razón por la que el alumno relaciona la localización de puntos en un plano con el trazo de una línea recta.

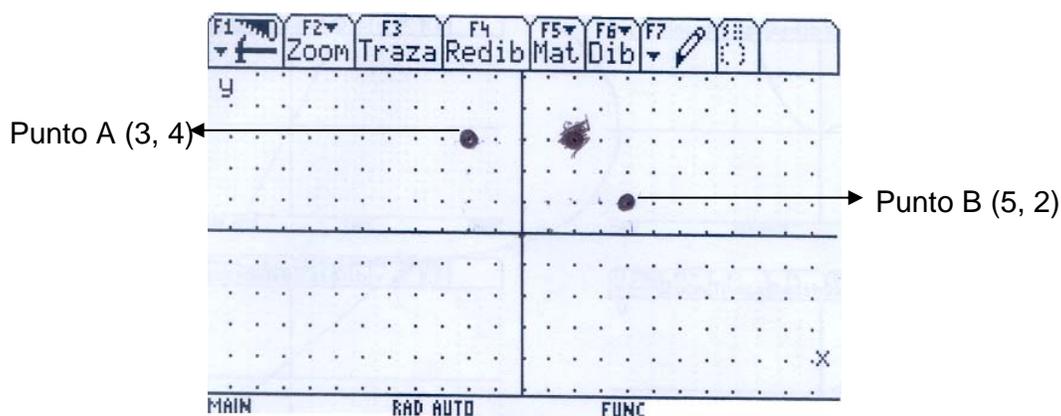
El alumno 6E relacionó las coordenadas del punto A con datos externos que aparecen en la figura, relacionando el 3 de las coordenadas (3,4) con el rótulo F3 de la barra de herramientas, y en las coordenadas del punto B(5,2) relaciona el 5 con el rótulo F5 de la barra de herramientas de la ventana de la calculadora



Parece que este alumno, al no conocer el significado de las coordenadas, se guía por los números que aparecen en la pantalla de la calculadora relacionándolos con la gráfica.

El alumno 3E tiene claro el orden en que se deben manejar las coordenadas para la localización de puntos en el plano, pero utiliza indistintamente los

cuadrantes del plano y considerando al origen como punto de partida para iniciar su conteo.



En resumen, los datos recabados mediante este cuestionario muestran que el estado de conocimiento de los ambos grupos sobre la localización de puntos en el plano es muy similar, el número de alumnos que no supieron contestar a esta pregunta fue igual en el grupo control y en el grupo experimental, encontrándose dificultades parecidas en los alumnos que respondieron a esta pregunta. Algunos de los problemas detectados en ambos grupos respecto a la localización de puntos en el plano cartesiano se resumen a continuación:

1. Invertir el orden en la localización de las coordenadas.
2. Considerar al origen para el conteo.
3. Relacionar las coordenadas con factores externos a la gráfica.
4. Utilizar erróneamente conocimientos previos. .
5. Identificar erróneamente los cuadrantes del plano cartesiano.

Actividades 6 y 7. Identificar la gráfica respecto a su ecuación

6. ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a la ecuación $y = x + 2$?
7. ¿En qué te guiaste para contestar esta pregunta?

Grupo control

Dos alumnos señalaron correctamente la gráfica (los promedios más altos), aunque solamente uno de ellos pudo explicar su elección. El alumno 1C argumentó lo siguiente: “En el +2 y también más o menos por la indicación”. El otro alumno que eligió la grafica correcta (2C) se limitó a decir “en la ecuación

se nos indica". Ninguno de los dos explicó a qué parte de la de la ecuación se refería. Los ocho alumnos restantes no señalaron correctamente cuál de las cuatro gráficas era la que representaba la ecuación $y = x+2$. A continuación se muestran algunos ejemplos de las respuestas que expusieron.

10C: *"Por los coordenadas"*

4C: *"Ni una"*

9C: *"Por la línea de en medio"*

Grupo experimental

Nueve alumnos de este grupo no contestaron correctamente la pregunta 6, consideramos que el único alumno que contestó acertadamente no supo argumentar su elección en la pregunta número siete. Otros alumnos que respondieron incorrectamente intentaron validar su elección mediante argumentos poco inteligibles, por ejemplo:

8E: *"En las líneas que tiene cada ellas" (sic.).*

3E: *"En las líneas verticales y horizontales".*

5E: *"En qué dirección está la Y y hacia dónde se dirige".*

En esta pregunta no observamos diferencias significativas en los conocimientos que tienen los alumnos del grupo control con los alumnos del grupo experimental.

En las siguientes preguntas del cuestionario encontramos deficiencias semejantes en ambos grupos que corroboraron la idea que teníamos acerca de su nulo conocimiento acerca de la producción de gráficas de funciones lineales y en la localización de puntos en el plano cartesiano.

Debido a los resultados obtenidos en las preguntas 6 y 7, las más sencillas de este cuestionario, era claro que las demás preguntas no nos arrojarían datos adicionales en cuanto al propósito al que respondía este cuestionario.

Resumen del apartado

Con base en lo anterior podemos decir que ambos grupos se encuentran en condiciones muy similares, los conocimientos que manejan los dos grupos son prácticamente los mismos, así como también sus limitaciones y creencias. A continuación presentamos una tabla en que se muestran las diferencias existentes entre los grupos.

Grupo control		Grupo experimental		
Clave del alumno	Reactivos correctos	Clave del alumno	Reactivos correctos	Diferencia
1C	5	1E	3	2
2C	5	2E	3	2
3C	3	3E	3	0
4C	3	4E	3	0
5C	2	5E	4	2
6C	2	6E	2	0
7C	1	7E	3	-2
8C	0	8E	3	-3
9C	4	9E	3	1
10C	2	10E	3	-1
Total	27		30	-3

Podemos observar que las diferencias entre los gemelos son pocas, teniendo un resultado total de menos tres, esto indica que el grupo experimental respondió acertadamente tres actividades más que el grupo control. Se consideraron como respuestas correctas las que cumplieran con los siguientes criterios:

En la pregunta número uno se consideró como una respuesta correcta si el alumno señaló por lo menos una gráfica de las cuatro expuestas. En la pregunta número dos, se tomó como respuesta correcta si el alumno argumentaba mencionando por lo menos una forma en que pueden ser útiles las gráficas. En la pregunta número tres, se consideró como respuesta correcta si el alumno manifestó de manera escrita un interés por aprender a hacer gráficas. En la pregunta número cuatro se consideró como una respuesta correcta si el alumno argumentó alguna utilidad de los ejes cartesianos. En la pregunta número cinco se consideró como una respuesta correcta si el alumno localizó de manera correcta las coordenadas de los puntos A y B. De la pregunta seis a la once, se consideraron como respuestas correctas si el alumno señaló la gráfica de la ecuación correspondiente y argumentó su respuesta.

El estudio de campo

Los resultados del estudio de campo se presentarán en el marco de las preguntas de investigación, para este fin analizaremos algunas respuestas a las preguntas planteadas en las hojas de trabajo que consideramos idóneas para comparar el trabajo de los alumnos del grupo control con sus respectivos gemelos en el grupo experimental.

Al analizar las respuestas de los alumnos encontramos un aspecto que puede causar confusión al lector, ya que el número de respuestas correctas que obtuvieron los alumnos del grupo experimental sugieren que el ambiente de aprendizaje cooperativo, además de propiciar condiciones más agradables, también incrementa de manera significativa los logros de los alumnos. Pero también se podría inferir que los resultados encontrados en el grupo experimental no son un indicador confiable del aprendizaje de cada estudiante, pues una condición del trabajo cooperativo es compartir la información y, por ende, obtener en la mayoría de estos alumnos respuestas muy parecidas.

Por lo anterior creemos necesario precisar que anticipamos que los resultados por sí solos no son una garantía que muestre un mayor o menor aprendizaje, por tal motivo, además de mostrar en este apartado el número de respuestas correctas que obtuvo un grupo con respecto al otro, se hará una breve descripción de lo acontecido durante la aplicación de la pregunta, así como el análisis de casos particulares de los procesos que llevaron a los alumnos a establecer sus resultados, haciendo al final una comparación global en el desempeño de los alumnos en cada pregunta, sus procesos y sus actitudes.

Pregunta de investigación 1

¿Difieren las respuestas de los alumnos que trabajan en un ambiente de aprendizaje cooperativo de las que formulan los alumnos que trabajan individualmente?

Para formular una respuesta para esta pregunta de investigación analizaremos el trabajo realizado por los alumnos de ambos grupos en las preguntas siete y

nueve de la hoja de trabajo 26², consideramos estas actividades como las idóneas para abordar esta pregunta de investigación, dado que en ellas se requiere que el alumno reestructure un conocimiento previo mediante la exploración con el uso de la calculadora (ecuaciones de la forma $y=mx$) para la elaboración de otro nuevo (ecuaciones de la forma $y=mx+b$), contando así con una oportunidad para evidenciar el tipo de respuestas que ofrecen los alumnos en dos ambientes de trabajo diferentes.

Preguntas

7. Modifica la ecuación de $y=3x$ para que su gráfica corte al eje Y en el punto $(x= 0, y= 4.5)$. ¿Cuál es la ecuación que construiste?

9. Un alumno de otra escuela dice que la gráfica de la ecuación $y=x-4$ corta al eje Y en el punto $x= 0, y= 5$. ¿Es correcto lo que dice ese alumno? Justifica tu respuesta.

Para que los alumnos puedan dar una respuesta correcta a estas interrogantes consideramos que es necesario que pongan en juego conocimientos como los siguientes:

Conocimientos	Grado escolar donde están presentes
1. Nombres de los ejes de un plano cartesiano.	1. Primer grado de secundaria
2. Ubicación de coordenadas en un plano cartesiano.	2. Primer grado de secundaria
3. Identificación de la variable b en una ecuación del tipo $y= mx + b$	3. Tercer grado de secundaria
4. La interpretación de una función lineal cuya gráfica no pasa por el origen	4. Segundo grado de secundaria

2. Ver anexo 4

De acuerdo con lo anterior, los conocimientos necesarios para desempeñarse de manera satisfactoria en estas preguntas no se ubican en un solo grado escolar, son temas que se imparten en diferentes momentos de la escuela secundaria, teniendo entonces que los alumnos que lograran responder correctamente a estas interrogantes no sólo estarían accediendo a conocimientos propios del grado escolar que están cursando, sino también a conocimientos de mayor complejidad.

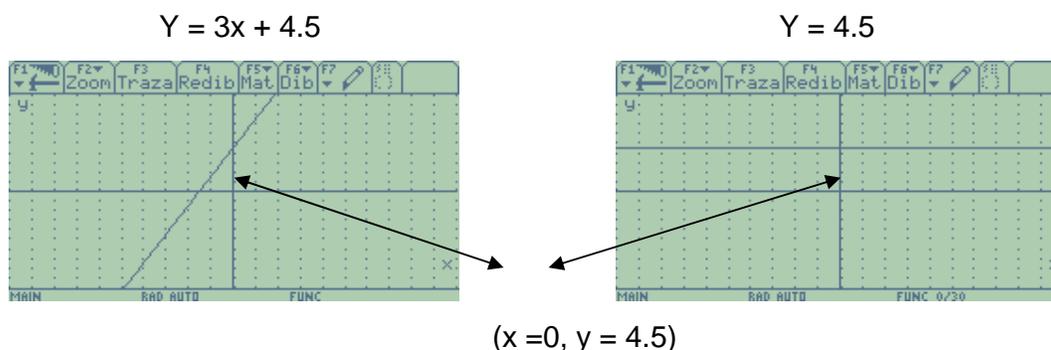
Pregunta 7 de la hoja de trabajo 26

Los resultados que se obtuvieron son claros en cuanto al número de respuestas correctas del grupo experimental sobre el grupo control, el 100% de los alumnos del grupo experimental estableció la ecuación $y=3x+4.5$ como la indicada para que su gráfica corte al eje Y en el punto de coordenadas $x=0$, $y=4.5$, lo cual contrasta con el 40% de los alumno del grupo control que llegaron a plantear la misma ecuación.

Estos resultados podrían conducir a desestimar el trabajo en equipo, como mencionamos al iniciar este apartado, pues se podría suponer que solamente los alumnos más adelantados trabajaron en la actividad y que los demás copiaron las respuestas, lo cual reflejaría una situación como la que describimos. Éste no fue el caso, se observó que en los integrantes de los equipos del grupo experimental había una dinámica de cooperación, en donde los resultados a los que llegaban eran el fruto de una discusión donde las ideas de los alumnos eran confrontadas con los resultados que arrojaba la calculadora, dando oportunidad a que los alumnos argumentaran, quedando satisfechos del resultado hasta que ellos lo verificaban en su propia calculadora. Después de esto es que los integrantes de cada equipo aceptaban un resultado como válido y posteriormente lo refrendaban o refutaban con la totalidad del grupo mediante la exposición de su trabajo con el apoyo del proyector (ViewScreen).

Hubo alumnos que no quedaban totalmente convencidos de las conclusiones a las que llegaban sus compañeros, tal es el caso del alumno 1E, pues en la respuesta que da a la pregunta 7 de la hoja de trabajo 26 no determina sólo

una respuesta como correcto, sino que propone otra a pesar de que la mayoría había aceptado que la única respuesta correcta es la ecuación $y=3x+4.5$. Este alumno propuso además la ecuación $y=4.5$, pues estas dos ecuaciones cumplen con la condición planteada en la pregunta (que la gráfica corte al eje Y en el punto $x=0, y=4.5$). Este alumno corroboró que al graficar ambas funciones ocurre lo siguiente:



A pesar de las opiniones de sus compañeros él decidió que las dos funciones podían figurar como correctas. Es interesante preguntarse por qué ningún otro alumno de la muestra retomó en su respuesta la segunda función como válida. El argumento más fuerte que plantearon fue que la función que se pedía modificar era $y=3x$, y la que proponía el alumno *1E* carecía del término $3x$. Los alumnos notaron que en ambas gráficas el punto de intersección en el eje Y es la misma debido a que en ambas funciones aparece el término 4.5 , siendo la única diferencia el término $3x$, que al graficar la función con los dos términos ($y=3x+4.5$) la recta aparece “inclinada” y cuando se grafica la función con sólo un término ($y=4.5$), la recta aparece paralela al eje x . A partir de esto les fue fácil intuir que el término $3x$ tiene que ver con la inclinación de la recta en la gráfica.

Otra característica observada en las respuestas de los alumnos en la pregunta anterior es que diecinueve de las veinte funciones que propusieron son ejecutables para la calculadora. Aunque no todas son correctas respecto a la pregunta formulada, sugieren un avance por parte de los alumnos en cuanto al lenguaje que se debe utilizar en el trabajo con funciones. Según lo observado en el aula, esto se debió a la exigencia sintáctica que genera la calculadora para la ejecución de gráficas por medio de símbolos matemáticos, si las

instrucciones que los alumnos le daban no eran precisas la función que construían no producía la gráfica que esperaban, lo cual propició que emplearan estrategias de ensayo y error hasta llegar a formular una respuesta viable.

El único alumno que no verificó su respuesta en la calculadora fue uno de los promedios más altos del grupo control (3C), su respuesta 3×4.5 no es una expresión que la calculadora pueda “entender”. Creemos que este alumno habría notado la omisión del símbolo + en la expresión 3×4.5 si hubiera estado trabajando en un ambiente cooperativo. Se pudo observar en el grupo experimental que cuando un alumno presentaba a sus compañeros su respuesta, ésta era confrontada con otras y eran verificadas empleando la calculadora. Otro aspecto interesante que nos arroja esta pregunta es cómo influyó el uso de la calculadora para nivelar la posible desigualdad que existía en el bagaje conceptual de los alumnos, las respuestas del grupo control presentaron más errores en los alumnos de los promedios más altos que en los más bajos.

Pregunta 9 de la hoja de trabajo 26

En la tabla 1 se muestran las respuestas de los alumnos a la pregunta “*Un alumno de otra escuela dice que la gráfica de la ecuación $y=5x-4$ corta al eje Y en el punto $x = 0, y = 5$. ¿Es correcto lo que dice ese alumno? Justifica tu respuesta*”.

Tabla 1

Alumno	Respuestas	Correctas	Incorrectas
1C 1E	No, porque lo está multiplicando No, porque la Y debe ser -4	*	*
2 C 2 E	No, porque te está pidiendo y -4 No, porque es y -4	*	*
3 C 3 E	No porque corta en el 6.5 No, porque Y es 5 y no -4	*	*
4 C 4E	No es correcto No		*
5C 5E	No, es correcto No, es correcto porque cortaría a y en -4	*	*
6C 6E	No, porque queda en el 6.5 No por el -4 de la ecuación	*	*
7C 7E	Sí, porque corta No, porque es menos -4	*	*

8C 8E	<i>No, porque no debe estar multiplicado</i> No es correcto porque corta en y en -4	*	*
9C 9E	<i>Sí, porque</i> No por el -4	*	*
10C 10E	<i>Sí, porque corta</i> No, porque y no es igual a -4	*	*

Resumen de la tabla 1

	Número de respuestas correctas	Número de respuestas incorrectas
Grupo control	1	9
Grupo experimental	9	1
Total	10	10

Se consideraron como respuestas correctas las que cumplieran con las siguientes condiciones:

- Si la respuesta incluía una negativa a lo propuesto en la actividad 9.
- Si en la justificación de la respuesta aparecía involucrado el término -4 de la función o la coordenada $y=5$.

Los resultados obtenidos en esta pregunta son similares a los encontrados en la pregunta 7, el grupo experimental obtuvo notablemente más respuestas correctas. Creemos importante hacer notar que la mayoría de los alumnos de ambos grupos no utilizaron la calculadora para dar su respuesta, caso contrario a lo sucedido en la pregunta 7, en donde la mayoría de los alumnos usaron la máquina para elaborar sus respuestas y argumentar su resultado.

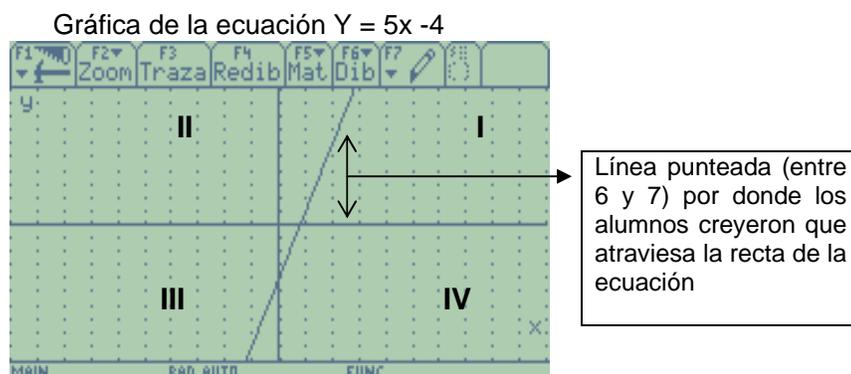
En el grupo experimental la respuesta a esta pregunta fue casi inmediata, sin recurrir a la calculadora observaron rápidamente que el término independiente de la función $y=5x-4$ no coincidía con la ordenada en el origen ($y=5$), y notaron que la gráfica de la función $y=5x-4$ cortaría al eje Y en el punto $(0,-4)$ y no en el punto $(0,5)$. Los alumnos del grupo experimental anticiparon la trayectoria que tendría la gráfica de la función y lo comprobaron en sus calculadoras por instrucciones del profesor.

En el grupo control no se observó una respuesta tan inmediata a esta pregunta, la actitud de los alumnos fue de desconcierto y esto se refleja en sus

respuestas (ver *tabla 2*), sólo uno de los diez involucrados en el estudio respondió correctamente (2C), las demás respuestas no se sustentaban en un análisis adecuado. Por ejemplo, hubo tres respuestas que afirmaban que la proposición era correcta (7C, 9C y 10C), argumentando “porque cortaba”, lo que nos hace pensar que estos alumnos no consideraron la pregunta como tal sino como una afirmación como la siguiente: *Un alumno de otra escuela dice que la gráfica de la ecuación $y = 5x - 4$ corta al eje Y en el punto $x = 0, y = 5$. Es correcto lo que dice ese alumno*. Parece que entendieron que la respuesta estaba plasmada en el enunciado “*Es correcto lo que dice ese alumno*”.

Seis alumnos negaron que esta proposición fuera verdadera, lo cual es correcto, el problema que se presentó en sus argumentos, dos alumnos (4C y 5C) se limitaron a negar la proposición, otros dos (1C y 8C) justificaron sus respuestas sustituyendo los valores de la variable por la de las coordenadas, creyeron que la ordenada ($y=5$) ya estaba representada en la ecuación ($y=5x-4$) en el término $5x$, y tomaron $x=0$, obteniendo así que $y=-4$.

En las respuestas dadas por los alumnos (3C y 6C) encontramos que ellos fueron de los pocos que se ayudaron de la calculadora para argumentar su respuesta. Aunque sus respuestas no son correctas, podemos observar un proceso de análisis interesante, ellos respondieron *no estar de acuerdo porque corta en 6.5*. ¿Qué significa el valor 6.5? Al graficar la ecuación $y=5x-4$ en la calculadora centraron su atención en el primer cuadrante del plano, observando que existía una línea punteada paralela al eje Y que cortaba a la gráfica de la ecuación, donde los puntos contados desde el eje X eran entre el 6 y el punto 7, como se muestra en la siguiente figura:



Cuando se le pidió a este alumno que explicara cómo obtuvo su respuesta contesto lo siguiente: *“Si observamos la gráfica podemos ver como la línea (gráfica de la ecuación) cruza la línea de puntos entre el 6 y el 7, más o menos a la mitad”*.

Observamos que los alumnos tienen claro cómo elaborar una gráfica en la calculadora y que leen de alguna manera la información que les proporciona el par de coordenadas, sin embargo muestran deficiencias en la asignación del eje Y. Creemos que esto se debe a que aún centran su atención en el primer cuadrante probablemente debido a experiencias previas en sus clases de matemáticas y otras asignaturas afines. Creemos que cometieron el error que se muestra en la figura porque al no encontrar en el primer cuadrante una intersección entre la gráfica de la ecuación y el eje Y, decidieron tomar a éste como la línea punteada de la retícula de la pantalla de la calculadora porque esa línea corta a la recta de la gráfica en el primer cuadrante. Creemos que estos errores se podrían haber evitado si estos alumnos hubieran trabajado en un ambiente cooperativo, pues podrían haber recibido retroalimentación por parte de sus compañeros; en el grupo experimental el 90% de los alumnos contestó acertadamente esta pregunta.

Resumen del apartado

En este apartado se reportan diferencias importantes en el desempeño de los alumnos que trabajaron de manera cooperativa respecto a los que trabajaron de manera individual, el grupo experimental obtuvo un mayor número de respuestas correctas, los alumnos de ese grupo emplearon argumentos más elaborados y mostraron una mayor disposición hacia el trabajo.

Los alumnos del grupo experimental discutían y argumentaban sus conclusiones, en un primer momento con los integrantes de su equipo y después con todo el grupo. Mediante esta forma de trabajo afinaban sus respuestas y llegaban a conclusiones que los conducían a proponer una respuesta colectiva aceptada con base en la solidez de los argumentos que presentaban. Los datos recabados durante las sesiones de trabajo indican que

los alumnos no se limitaban a copiar el resultado del compañero que proponía una solución, sino que ellos buscaban experimentar en su calculadora el razonamiento propuesto, determinando por experiencia personal si aceptaban o refutaban la respuesta que se proponía, llegando finalmente a una respuesta propia que en la mayor parte de las ocasiones era la aceptada por la mayoría en lo que parece ser un ambiente de trabajo que los compromete a validar sus aprendizajes.

Lo que se observó en el grupo control fue distinto, en este grupo los alumnos se mantenían concentrados en sus ideas, realizando las actividades en silencio, apoyados en sus capacidades individuales, obteniendo respuestas no correctas sin retroalimentación inmediata por parte de sus compañeros hasta que el profesor tenía oportunidad de revisar sus trabajos, cuestiones que producían en algunos alumnos desinterés y en ocasiones abandono de la actividad al no recibir una rápida atención del profesor.

A manera de conclusión podemos plantear que las respuestas de los alumnos que trabajaron en un ambiente cooperativo difieren mucho de las respuestas dadas por los alumnos que trabajaron de manera individual, el ambiente de aprendizaje cooperativo favoreció la producción de un mayor número de respuestas correctas y una relación de mayor compromiso por parte de los educandos hacia su aprendizaje.

Pregunta de investigación 2

¿Se observan diferencias en las actitudes hacia las matemáticas por parte de los alumnos que trabajan en un ambiente de aprendizaje cooperativo y los que trabajan de forma individual?

Es importante señalar que el rubro de actitudes de los alumnos ya se ha abordado en la primera parte de este capítulo de manera detallada, en donde se detectaron cambios favorables en la actitud de los alumnos hacia la forma de trabajo y su gusto por las matemáticas en ambos grupos, siendo el grupo experimental en el que observó un cambio más sensible. Podemos afirmar que en este estudio se observaron diferencias aunque no muy significativas en las

actitudes hacia las matemáticas por parte del grupo experimental con respecto a los alumnos del grupo control, como lo podemos observar en la tabla de la pagina 72.

Sin embargo, consideramos que lo más importante dentro del trabajo en el aula no es que los alumnos se sientan cómodos por la forma de trabajo o sientan agrado hacia su materia debido a las actividades que se manejan, sino por los aprendizajes que lleguen a adquirir durante este proceso, por tal motivo abordamos a continuación una comparación entre las actitudes detectadas con los alumnos gemelos y sus aprendizajes alcanzados.

Correlación actitudes/aprendizajes

Con el objetivo de estudiar con mayor profundidad el tipo de correlación (positiva o negativa) que se presentó al final de nuestro estudio respecto a los cambios de actitud que observaron los alumno en cuanto a su ambiente de trabajo y por la asignatura de matemáticas con la apropiación de nuevos conocimientos, llevamos a cabo un análisis comparativo entre los alumnos gemelos.

Como se informó en el Capítulo III asociamos a cada estudiante un gemelo a partir de considerar el promedio de sus clasificaciones, como se muestra a continuación.

Grupo control			Grupo experimental		
Nombre	PROMEDIO	CLAVE	Nombre	PROMEDIO	CLAVE
Osorio Cruz Luis Ángel	5.9	10C	Martínez Segura Luis	5.9	10E
Ortiz Martínez Marco A.	6.3	9C	Trinidad Cruz David	6.3	9E
Avila Ovando Beatriz	6.7	8C	Ávila Ovando Leticia	6.7	8E
Mosqueda Estevez Saúl	6.7	7C	De la Cruz Ayala Rafael	6.7	7E
Velez Esquivel Karla	7.3	6C	Narciso Solano Liliana	7.3	6E
Rosales García Maria L	7.8	5C	Flores Sanches Mayra	7.8	5E
Mendoza Reyes Patricia	8.5	4C	Pasalagua Flores Paola	8.5	4E
Hernández Garcia Rosa	8.6	3C	Jimenez Chávez Janet	8.6	3E
Sosa de la Cruz Noemí	9.3	2C	Chávez Juárez Ana Laura	9.0	2E
Cortina Cortina María	9.4	1C	Sosa Hernández Marisol	9.2	1E

A continuación mostramos la correlación entre sus actitudes hacia la forma de trabajo y a su gusto por las matemáticas respecto a su desempeño durante el

trabajo de campo obtenido en las respuestas que dieron en sus hojas de trabajo³, señalando si se presentó una evolución positiva o negativa.

En la columna de la izquierda se identifica a cada uno de los alumnos mediante el código que se le asignó, en la segunda columna se indica qué postura manifestó cada alumno hacia el agrado por las matemáticas según el cuestionario de actitudes. En la tercera columna se informa sobre la preferencia del alumno hacia la forma de trabajo con base en sus respuestas al cuestionario de actitudes, asignamos la valoración *positivo* cuando el alumno manifiesta gusto por el ambiente en el que trabajó durante el estudio de campo, y *negativo* cuando el alumno manifiesta su agrado por un ambiente diferente al que fue expuesto dentro del aula. En la cuarta columna reportamos las respuestas correctas que el alumno obtuvo en las actividades que se analizaron de las hojas de trabajo; en la última columna se muestra el tipo de correlación que asignamos: positiva, cuando hay congruencia con las actitudes y el número de respuestas correctas, y negativa cuando no se detecta congruencia. Si un alumno manifiesta agrado por las matemáticas o gusto por la forma de trabajo dentro del aula (individual o cooperativo) y un número aceptable de respuestas correctas (3 o 4 de las 4 analizadas en el apartado titulado “trabajo de campo”), consideramos que hay una correlación positiva, si el alumno manifiesta gusto por las matemáticas y/o agrado en la forma de trabajo dentro del aula pero sus respuestas correctas en sus hojas de trabajo son deficientes (0 a 2), consideramos que estamos ante una correlación negativa.

³ Para mayor información consultar las tablas 1, 2 y 3 del apartado titulado “Trabajo de campo”

Correlación entre las actitudes y la adquisición de nuevos aprendizajes al finalizar el estudio de campo									
Alumnos del grupo control					Alumnos del grupo experimental				
Alumno	Agrado hacia las matemáticas	¿Me siento a gusto con el ambiente de trabajo?	Reactivos correctos	Correlación	Alumno	Agrado hacia las matemáticas	¿Me siento a gusto con el ambiente de trabajo?	Reactivos correctos	Correlación
10C	positivo	Positivo (individual)	0	Negativa	10E	positivo	Negativo (individual)	4	Positiva
9C	positivo	Negativo (en equipo)	1	Negativa	9E	positivo	Positivo (en equipo)	4	Positiva
8C	Positiva	Positiva (individual)	1	Negativa	8E	positivo	Positivo (en equipo)	4	Positiva
7C	Positiva	Positiva (individual)	0	Negativa	7E	positivo	Positivo (en equipo)	4	Positiva
6C	Positiva	Positiva (Individual)	3	Positiva	6E	positivo	Positivo (en equipo)	4	Positiva
5C	Positiva	Positiva (individual)	1	Negativa	5E	positivo	Positivo (en equipo)	4	Positiva
4C	Positiva	Negativa (en equipo)	1	Negativa	4E	positivo	Positivo (en equipo)	2	Negativa
3C	Positiva	Negativa (en equipo)	2	Negativa	3E	positivo	Positivo (en equipo)	3	Positiva
2C	Positiva	Positiva (Individual)	2	Negativa	2E	negativo	Negativo (individual)	4	Negativa
1C	Positiva	Positiva (Individual)	0	Negativa	1E	positivo	Positivo (en equipo)	3	Positivo

Los resultados que se muestran en esta tabla indican que ocho de los alumnos del grupo experimental obtuvieron una correlación positiva, contrastando con un solo alumno del grupo control (6C), lo que muestra que el hecho de que los alumnos manifiesten su agrado por la materia o su gusto por el ambiente de trabajo no garantiza nuevos aprendizajes, tal es el caso de los alumnos 10C, 8C, 7C, 6C, 5C, 2C, 1C y 4E, los que, al manifestarse de manera positiva ante estas dos cuestiones se podría suponer que sus aprendizajes también serían positivos, como podemos observar en la tabla anterior esto no sucedió.

Llama la atención el número tan elevado de alumnos que tuvieron una actitud positiva hacia las matemáticas al finalizar el estudio de campo, lo cual, según lo observado durante este trabajo, parece resultar de la incorporación de la calculadora en las actividades de los alumnos. Sin embargo, esta condición rindió mejores resultados en el grupo experimental, en donde la calculadora fue utilizada como una herramienta que les permitía la exploración de conjeturas y esta exploración era retroalimentada por las ideas y contra argumentaciones de

sus compañeros y su profesor, dando pie a una reflexión más productiva al contar con la posibilidad de considerar un abanico de posibles respuestas, lo que no sucedió en el grupo control, ya que en éste el intercambio de ideas estuvo limitado debido al trabajo individual al que eran expuestos, lo que aparentemente no permitió el enriquecimiento de sus experiencias de aprendizaje.

Pregunta de investigación 3

¿Existen diferencias entre las conjeturas que formulan los alumnos que trabajan en un ambiente de aprendizaje cooperativo y los que trabajan de manera individual?

Para proponer una respuesta a esta pregunta analizaremos el trabajo que realizaron los alumnos de ambos grupos en la actividad 6 de la hoja de trabajo 26⁴ haciendo una comparación entre gemelos de ambos grupos. Para este efecto se transcribe a continuación esta actividad.

¿Cuáles son las coordenadas del punto donde la gráfica de la ecuación $y=3x$ corta al eje Y ? ¿A qué crees que se deba que la gráfica pase por ese punto?

Consideramos que para que los alumnos abordaran este reactivo es necesario que pongan en juego los siguientes conocimientos:

Conocimientos	Grado escolar
1. Ejes del plano cartesiano.	1. Primer grado de secundaria.
2. Ubicación de coordenadas en el plano cartesiano.	2. Primer grado de secundaria.
3. Identificación del parámetro b en la ecuación $mx+b$.	3. Tercer grado de secundaria.
4. Interpretación de una función lineal cuya gráfica pasa por el origen	4. Segundo grado de secundaria.

A continuación se muestran las respuestas de los alumnos gemelos de los grupos control (**C**) y experimental (**E**). Se asignó la etiqueta 1 a la respuesta que refiere a las coordenadas y la etiqueta 2 a la justificación de su respuesta.

3. Ver Anexo 4

Tabla 2

Alumno	Calificación Promedio	Respuesta (1)	Respuesta (2)	Correcta	Incorrecta
1C	Excelente	$3x - 4$	Porque los sumamos y pasan por la ecuación de la coordenada.		*
1E	Excelente	No	Porque no tiene el otro número		*
2C	Excelente	$3x - 4$	Por lo que te piden y las coordenadas de 3		*
2E	Excelente	Pasa por el cero	Porque no toca $x - y$	*	
3C	Bueno	$X = 0, Y = 0$	Porque no pusimos ni más ni menos	*	
3E	Bueno	No	Porque no tiene otro número		*
4C	Bueno	$3x 0$	Porque el punto es cero yo creo que sea el que corta en el punto Y	*	
4E	Bueno	No	Porque no tiene otro número		*
5C	Regular	$3x + 0$	Porque en el punto cero sería el que corta	*	
5E	Regular	Pasa por el cero	Porque no tiene el número que se le suma o resta	*	
6C	Regular	$X=0, Y=0$	Porque no aparece el más ni el menos	*	
6E	Regular	Pasa por cero	Porque pasa $x = 0, y = 0$	*	
7C	Bojo	(sin respuesta)	(sin respuesta)		*
7E	Bajo	Pasa por el cero	Porque no tiene signo de + , - que lo corte.	*	
8C	Bajo	(sin respuesta)	Porque en el punto se ve uno		*
8E	Bajo	Pasa por en medio	No tiene el número que lo reste o que lo sume	*	
9C	Bajo	(sin respuesta)	Porque nada más se puso $3x$		*
9E	Bajo	Pasa por el cero	Porque no tiene el número que lo resta	*	
10C	Por debajo del promedio	(sin respuesta)	(sin respuesta)		*
10E	Por debajo del promedio	Por cero	No tiene el otro número	*	

Resumen de la tabla

	Número de respuestas correctas	Número de respuestas incorrectas
Grupo control	4	6
Grupo experimental	7	3
Total	11	9

Se consideraron como respuestas correctas las que señalaban el cero como segunda coordenada cuando $x=0$, haciendo alguna referencia a la carencia del término independiente de la ecuación $y=3x$. Como podemos observar en la *tabla 3*, las diferencias entre ambos grupos no es tan grande como en los resultados anteriores; sin embargo, al analizar el tipo de respuestas que dan los alumnos con respecto a su gemelo, nos percatamos que el aprovechamiento en el grupo control es muy contrastante.

Por ejemplo, los alumnos clasificados con promedios altos en el grupo control se muestran confundidos y basan sus respuestas en actividades anteriores, tal es el caso del 1C y 2C, sus respuestas no ofrecen ningún argumento que

podamos calificar como aceptable (*"3x-4, porque los sumamos y pasan por la ecuación de la coordenada"*; *"3x-4, por lo que te piden y las coordenadas de 3"*). Estos alumnos toman como referencia datos de las actividades anteriores, concretamente de la 3 y la 4 de la misma hoja de trabajo, en estas dos preguntas encontramos la expresión a que hacen referencia los dos alumnos ($y=3x-4$).

Sus gemelos en el grupo experimental mostraron un mejor desempeño en esta misma pregunta. El alumno 1E, aunque no contestó que el valor para y es cero cuando la gráfica corta al eje Y, sí muestra en su segunda respuesta (*"porque no tiene el otro número"*) una clara idea de el efecto que tiene en la gráfica de una función el término independiente, concluyendo que al carecer la función dada del término independiente su gráfica pasaría por el origen al cortar al eje Y. El alumno 2E tiene una clara idea del punto por el que tendría que pasar la gráfica de la ecuación $y=3x$, en su primera respuesta señala *"pasa por el cero"*, guiándose por la gráfica que hizo en su calculadora.

Estos dos alumnos muestran en sus conjeturas un mayor desarrollo conceptual que sus gemelos en el grupo control, creemos que esto se debe a la confianza que empezaron a desarrollar al trabajar en el ambiente de aprendizaje cooperativo, pues se empezaba a hacer un hábito en ellos compartir sus ideas con sus compañeros antes de contestar por escrito en la hoja de actividades, discutiendo sus razonamientos en la búsqueda argumentada de una respuesta plausible, abriendo con esto una gama más amplia de posibilidades para su aprendizaje debido a la retroalimentación que recibían de sus compañeros y su profesor, desencadenando un mayor interés hacia los temas que estaban estudiando. Esto se aprecia claramente en la situaciones en donde los alumnos del grupo control, al no entender claramente lo que se pedía, copiaban la respuesta que habían dado a preguntas anteriores en las que encontraban alguna una similitud, respondiendo por cumplir, sin que su interés fuera más allá que el de entregar al profesor la hoja de trabajo contestada. Contrastantemente, el trabajo de los gemelos de estos alumnos en el grupo experimental muestra argumentos que denotan mayor comprensión y

elaboración en sus respuestas, lo que sugiere un mayor grado de interés y compromiso hacia su aprendizaje.

Es importante mencionar el buen desempeño que tuvieron los alumnos del grupo control clasificados con bueno y regular aprovechamiento (8 a 8.9 y 7 a 7.9 respectivamente). En la *tabla 2* podemos observar que hay una clara idea en la interpretación de la pregunta y la argumentación de ésta. Por ejemplo; los alumnos 4C y 5C se refieren a la carencia del término independiente de la función con la incorporación del cero en su primer respuesta ($3x 0$), determinando que debido a la ausencia del término independiente la gráfica de la función debería pasar por el origen. Los alumnos 3C y 6C dieron una respuesta más concreta, mencionando las coordenadas por donde, según su punto de vista, pasaría la gráfica de la función $y=3x$, argumentando que debido a la carencia del símbolo más o menos (interpretamos que se hace referencia al término independiente) las coordenadas serían $x = 0, y = 0$.

Como podemos observar en la *tabla 3*, estos dos alumnos, junto con el alumno 6E del grupo experimental, fueron los únicos que propusieron las coordenadas correctas, los demás sólo se refieren a esto mediante expresiones como; “*pasa por el cero*”, “*pasa por en medio*” o con un simple “*no*”. Esto contrasta con lo que se pudiera haber anticipado, ya que se esperaba que los alumnos con promedios altos pudieran haber respondido correctamente esta pregunta debido a su buen historial académico. Encontramos que éste no fue el caso, las respuestas correctas fueron presentadas por los alumnos clasificados con promedio bueno y regular, mostrando los alumnos con los promedios más altos incapacidad para responder e interpretar la pregunta. Los alumnos con promedios bajos (en el grupo control) se limitaron a observar a sus compañeros realizando actividades ajenas a las propuestas en las hojas de trabajo. Por ejemplo; exploraban otras aplicaciones de su calculadora, hacían dibujos en la parte trasera de la hoja aparentando que contestaban algo cuando el profesor pasaba junto o trataban de salir del salón bajo cualquier excusa. Perdían poco a poco el interés por la actividad y esto se ve reflejado en la ausencia de respuestas en su hoja de actividades como se muestra en la *tabla 2*.

La situación en el grupo experimental fue diferente, en este grupo además de observarse un ambiente más dinámico, en donde los alumnos intercambiaban ideas, comentaban sus logros con sus compañeros, ayudaban a los que manifestaban dudas, haciendo las veces de profesor en su mesa de trabajo. Se motivaban entre ellos para ver quién lograba proponer una respuesta de manera que los demás no encontraran ningún error. Además, se observó en las respuestas de los alumnos del grupo experimental una avance más uniforme en el manejo de conceptos, aunque hubo tres alumnos que no respondieron con claridad, mostraron en sus argumentos una idea más elaborada que su gemelo del grupo control, casos como; 1C con 1E, 7C con 7E, 8C con 8E, 9C con 9E y 10C con 10E.

Resumen del apartado

En este apartado presentamos evidencias de que existen diferencias entre las conjeturas que formulan los alumnos que trabajaron en un ambiente individual con los que lo hicieron en un ambiente de aprendizaje cooperativo. Los alumnos en el grupo experimental lograron acceder de manera más significativa a conocimientos nuevos, desarrollando con mayor consistencia habilidades como la exploración mediante el ensayo y error en la generación de gráficas en la calculadora, la habilidad para exponer diferentes propuestas de solución y la habilidad para argumentar con base en lo que observaban en la pantalla de la calculadora. Estos avances se reflejaron de manera más clara en los alumnos con los promedio más bajos, mientras en el grupo control este sector de alumnos iba perdiendo el interés por el tema, sus gemelos en el grupo experimental manifestaban un mayor compromiso por su aprendizaje tratando de mantenerse a la par de los promedios más altos.

Pregunta de investigación 4

¿Se observan diferencias entre los alumnos que trabajan en un ambiente cooperativo y los que lo hacen en forma individual con relación a las formas en que transitan del conocimiento no convencional al conocimiento formal?

En este apartado analizaremos las respuestas que dieron los alumnos del grupo control y los del grupo experimental a la *pregunta 5* de la hoja de trabajo

30. Nuestro propósito es obtener evidencias que nos permitan conocer los efectos de la organización del trabajo en el aula en las formas en que transitan los alumnos del conocimiento no convencional al conocimiento formal.

Actividad: *Completa la siguiente tabla usando la ecuación $y=5x$. ¿Qué relación hay entre los valores de x e y ? (pregunta 5 de la hoja de trabajo 30).*

X	-2.5	-2		-1.5	2	3	4.5
Y			-7.5				

Seleccionamos esta pregunta porque la consideramos adecuada para observar las similitudes y diferencias que pudiera haber entre las conjeturas que dan los alumnos al abordar el concepto de función. En esta pregunta se pide a los alumnos que establezcan una relación entre los datos que arroja una tabla de valores con la estructura de la ecuación que la generó.

Esta pregunta es una de las que culminan la hoja de trabajo 30 (*Rectas que “crecen”⁵*), en ella se propone a los alumnos que construyan las gráficas de ecuaciones sencillas como $y=x$, $y=2x$, $y=2x+1$, $y=2x-1$ y planteamos preguntas que induzcan el análisis del comportamiento de la gráfica a partir de los parámetros de la ecuación y la relación entre las coordenadas de algunos de los puntos de la gráfica con la estructura de la ecuación.

Abajo se muestran las respuestas que dieron los alumnos gemelos (ordenados de los promedios más altos a los más bajos) de los grupos control (**C**) y experimental (**E**) al reactivo antes mencionado. El encabezado “Respuesta 1” se refiere a la manera en que cada alumno formuló la pregunta referente a la tabla y “Respuesta 2” se refiere a la relación que encontró el alumno entre la ecuación y los valores de x e y en la tabla.

⁵ Ver anexo número 4

Tabla 3

Alumno	Respuesta 1	Respuesta 2	Correcta	Incorrecta
1C 1E	Completó la tabla satisfactoriamente	Pues que ambas cruzan en el cero En que se multiplica el valor de la x por 5	*	*
2C 2E	Completó la tabla satisfactoriamente	Que los dos pasan por el centro En que y es 5 veces más grande que x	*	*
3C 3E	Completó la tabla satisfactoriamente	(Sin respuesta) Que de la ecuación y de la gráfica sale lo mismo	*	*
4C 4E	(sin respuesta) Completó la tabla satisfactoriamente	(sin respuesta) Que los resultados de la ecuación y los de la gráfica son casi iguales	*	*
5C 5E	Completó la tabla a la mitad Completó la tabla satisfactoriamente	(sin respuesta) Cuando x avanza 2 en y sube 10	*	*
6C 6E	Completó la tabla satisfactoriamente	(Sin respuesta) Que cuando $x = 2$ $y = 10$	*	*
7C 7E	Sólo completo la tabla a la mitad Completó la tabla satisfactoriamente	(sin respuesta) Cuando x avanza y sube 5 veces más $x = 5$ $y = 10$	*	*
8C 8E	(sin respuesta) Completó la tabla satisfactoriamente	(sin respuesta) Que la y es 5 veces más grande	*	*
9C 9E	(sin respuesta) Tabla incompleta	(sin respuesta) x se multiplica por 5 y da el valor de y	*	*
10C 10E	(sin respuesta) Completó la tabla satisfactoriamente	(sin respuesta) Multiplicamos la x por 5 y encontramos el valor que nos piden en la tabla	*	*

Resumen de la tabla

	Número de respuestas correctas	Número de respuestas incorrectas
Grupo control	2	8
Grupo experimental	10	0
Total	12	8

Se consideraron como respuestas correctas las que cumplieran con alguno de los siguientes aspectos:

1. Cuando completó la totalidad de la tabla de manera correcta.
2. Cuando encontró una relación entre los resultados de la tabla y la ecuación que la generó.
3. Cuando identificó alguna relación de proporción entre las cantidades.

Como podemos observar en la tabla 3 el 100% de los alumnos del grupo experimental contestó de manera correcta el reactivo, contrastando con el porcentaje del grupo control, en donde sólo se obtuvo el 20% de respuestas correctas, lo que nos sugiere que las respuestas producidas por los alumnos del grupo experimental son las que mejor se ajustan a lo formalmente establecido en el currículo de educación secundaria: una función vista como la relación entre dos magnitudes, donde un cambio en una magnitud determina un cambio en la otra. Con base en esto consideramos que los resultados encontrados en la respuesta 2 de la tabla 3 sugiere que los alumnos que trabajan en un ambiente cooperativo pueden transitar mejor del conocimiento no convencional al conocimiento formal que los alumnos del grupo control.

Análisis de las estrategias de los alumnos

Para abundar en lo anterior decidimos indagar qué estrategias usaron los alumnos para completar la tabla y en qué medida la relación que proponen para x e y se aproxima más a lo definido formalmente. Con ese fin analizaremos a continuación las semejanzas en el tipo de respuestas expuestas en la tercera columna (*Respuesta 2*) y las contrastaremos con las observaciones hechas durante las sesiones de trabajo en ambos grupos.

Se observó que las estrategias de muchos los alumnos se basaban en el uso de la calculadora, en el uso que hicieron de la máquina se pueden distinguir dos hechos básicos que emplearon como estrategias para explorar las situaciones y a partir de esto generar sus respuestas a las actividades que se les propusieron.

La primera de ellas consiste en utilizar sus conocimientos sobre el producto de números enteros, se observó que acuden al hecho de que si el producto es negativo uno de los factores debe ser positivo y el otro negativo; la segunda estrategia que observamos consiste en combinar hechos básicos sobre el producto de números enteros con la interpolación de valores para encontrar factores no enteros. A continuación mostramos las respuestas que dieron los alumnos de acuerdo con la forma en que usaban la calculadora.

La calculadora como herramienta para ejecutar algoritmos.

Grupo control

En el grupo control se observó con mayor frecuencia que algunos alumnos utilizaron la calculadora como una herramienta para ejecutar algoritmos, por ejemplo, 3C, 6C, 5C y 7C y a partir de esta experiencia adquirirían nuevos conocimientos, por ejemplo, acerca de las leyes de los signos para multiplicar números enteros. Resulta importante destacar en las respuestas de estos alumnos el manejo de los signos, pues no cometieron errores de esta índole.

Por ejemplo, en las respuestas que dio el alumno 7C observamos la atención que presta al signo negativo para completar la tabla de valores que se muestra a continuación (los valores en “negritas” son respuestas del alumno).

x	-2.5	-2	?	-1.5	2	3	4.5
y	-12.5	- 10	-7.5	-7.5	10	15	22.5

Los alumnos 3C y 6C emplearon un acercamiento similar, ellos generaron una estrategia que probablemente con base en la experiencia que tuvieron en las actividades que empleamos para familiarizar a los alumnos con el uso de la calculadora. Se le preguntó al alumno 3C por el procedimiento que empleó para encontrar el número que faltaba en la fila de las **x**.

“Busqué un número que multiplicado por 5 me diera -7.5 como está en la ecuación... el único número que me daba el resultado es -1.5”

¿Y cómo le hiciste para identificar el signo del número?

“Por la calculadora, porque si multiplico el 5 por 1.5 obtengo 7.5 y no -7.5 así que el número 1.5 tenía que tener el menos”.

El alumno 6C, explica como se muestra abajo el procedimiento que siguió para encontrar los valores en el renglón de las **X**.

“Si multiplicamos 5 por 1 el resultado es 5 y si multiplicamos 5 por 2 el resultado es 10... Busqué un número que estuviera entre el uno y el dos para que el resultado fuera -7.5 como dice la tabla”.

¿Por qué le pusiste menos a tu respuesta?

“Porque si multiplico en la calculadora 5 por 1.5 el resultado es positivo y no negativo”

Dado que los alumnos aún no habían abordado el tema de números con signo durante su curso regular, consideramos que el conocimiento que mostraron sobre los números con signo es producto de las actividades de introducción en el uso de la calculadora⁶ expuesto semanas antes, en donde se introduce a los alumnos en el uso de la tecla (-) de su calculadora, en actividades que los conducen a observar qué ocurre cuando operan con números con signo y se les pide que expliquen qué puede estar haciendo la calculadora con esos números para obtener el resultado que observan.

Consideramos que los casos anteriores ejemplifican el tipo de estrategias que desarrollaron los alumnos a partir de usar la calculadora para ejecutar operaciones involucradas en los procesos de búsqueda de respuestas a las actividades que se les plantearon. En el grupo control se observó que los alumnos que se centraron en este uso de la calculadora sin contar con la posibilidad de discutir lo que hacían con el resto de sus compañeros les limitó, al grado de no intuir, o en su caso hacer preguntas a su profesor para enfrentar actividades que requerían más que solamente ejecutar operaciones aritméticas. Por ejemplo, para completar la tabla anterior a partir de la ecuación $y=5x$.

x	-2.5	-2		-1.5	2		
y	-12.5	- 10	-7.5	-7.5	10	15	22.5

Ilustramos con lo anterior con los siguientes episodios. Al preguntarle al alumno 5-C sobre su tabla inconclusa contestó lo siguiente:

⁶ Ver anexo 1

“Es fácil calcular el valor de la y cuando nos dan el valor de la x , nada más lo multiplicamos por 5, pero cuando es al revés no entiendo cómo se hace”

La respuesta del alumno 7-C fue muy similar:

“Es sencillo calcular el valor de la y cuando nos dan el otro valor, porque nada más multiplicamos los valores que nos dan para x , pero es difícil cuando nos dan el valor de la y , y nos piden que calculemos el valor de la X ” (se refiere a ecuaciones del tipo $y=ax+b$ con b distinto de cero).

Maestro; *¿Por qué no terminaron su tabla?*

Alumno 3C: *Porque la x es una letra que le podemos poner otros valores y la letra y no.*

Alumno 6C: *Porque la letra y no se le puede cambiar por un número.*

Estos alumnos aseguran en sus respuestas que la variable y no puede ser modificada, esto parece surgir de una experiencia mecánica en el uso de la calculadora en la creación de gráficas. En esas actividades los alumnos encontraron que al momento de insertar la ecuación que el editor de gráficas que el término “ $Y=$ ” ya estaba dado en la calculadora y no ofrece ninguna posibilidad de modificarlo, solamente permite insertar la regla de correspondencia de la función, siendo estos los únicos términos de la función que los alumnos podían manipular. Nuestros datos indican enfáticamente que esto, aunado a carencias conceptuales de los alumnos, ocasionó que generaran la idea de que la variable y no podía ser sustituida. Al final de la sesión de trabajo se les hizo ver a estos alumnos su error.

Grupo experimental

En este grupo encontramos resultados distintos a los observados en el grupo control. Los alumnos 1E, 2E, 8E, 9E y 10E, completaron satisfactoriamente la tabla y explicaron cómo produjeron sus respuestas con base en nociones de proporcionalidad. A continuación se muestran sus respuestas a la pregunta: *¿Qué relación hay entre los valores de x e y en la ecuación $y=5x$?*

- 1E *“Se multiplica el valor de la x por 5”*
2E *“Y es 5 veces más grande”*
8E *“Y es 5 veces más grande”*
9E *“X se multiplica por 5 y es el valor de y ”*
10E *“Multiplicamos la x por 5 y encontramos el valor que nos piden”*

Como mencionamos antes en este apartado, el acercamiento que esperamos al concepto de función no es a su definición formal. Sin pérdida de rigor, lo que nos planteamos es un acercamiento de los alumnos a una noción más intuitiva, como la planteada en el Libro para el Maestro (SEP, 2000), donde se hace referencia al concepto de función como la relación cuantitativa entre dos magnitudes o la expresión una magnitud en términos de otra:

Consideramos que lo propuesto por los alumnos del grupo experimental se acerca aceptablemente a lo propuesto en el libro para el maestro, como puede observarse, sus respuestas se basan en el establecimiento de una relación cuantitativa entre dos cantidades. Algunas de sus respuestas muestran esto de manera más clara, por ejemplo, “Y es 5 veces más grande que X”, donde identifican que y está en términos de x .

Resulta relevante observar que los alumnos que respondieron correctamente a esta actividad son tanto los que tienen los mejores promedios como los que tienen calificaciones por debajo del promedio. Una explicación plausible para esta situación la ofrecen los casos de los alumnos 2E y 10E, al terminar 10E su actividad se le preguntó:

¿Cómo encontraste los valores para Y?

“Multiplicando los valores de x por cinco como dice en la ecuación”

¿Tuviste algún problema?

“Nada más en la casilla en donde nos pedían que encontráramos el valor de la x ”

¿Y cómo lo resolviste?

“Como le hizo mi compañero (señalando al alumno 2E), busqué un número que multiplicado por cinco me diera menos siete punto cinco”

En tu respuesta pusiste -1.5 ¿Por qué el menos?

“Si multiplico en la calculadora 5 por 1.5 el resultado es 7.5 y no -7.5, por eso el 1.5 tiene que tener el menos. ”

Podemos observar que el alumno 10E acudió a su compañero 2E para completar la actividad (*“como le hizo mi compañero”*), en su respuesta también se destaca el relevante papel de la calculadora como un medio para la exploración, en la respuesta que dio a la pregunta ¿por qué el menos?, el alumno respondió *“si multiplico...”*. No podemos afirmar si el origen de este conocimiento sea por una experiencia personal o por el trabajo con su compañero, lo que resulta claro es que con base en esto el alumno, con ayuda de su calculadora, exploró varias situaciones para encontrar dar respuesta a lo que se le pedía: “el 5 multiplicado por 1.5 y el 5 multiplicado por -1.5”, le permitió encontrar que solamente con una de estas dos situaciones obtenía lo solicitado en la actividad, lo que comprobó más adelante cuando en el valor para de x tenía -1.5. Este alumno puso en juego durante este proceso dos habilidades: la exploración y el uso del lenguaje algebraico, ambas basadas en el uso que hacía de la calculadora; sin embargo, creemos que sin el apoyo de un ambiente cooperativo no tendría el mismo impacto el uso de la calculadora, como lo podemos constatar en los resultados del grupo control reportados en este apartado, sus respuestas fueron muy limitadas con respecto a las respuestas dadas por los alumnos del grupo experimental, lo cual sugiere que la calculadora en el salón de clases parece ser más eficiente cuando los alumnos trabajan en un ambiente cooperativo.

La calculadora como herramienta para hacer gráficas

Grupo control

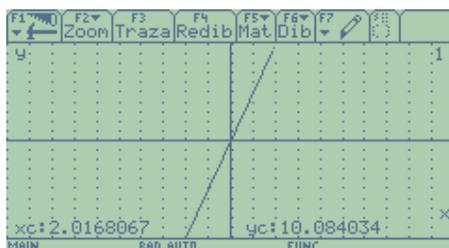
En el grupo control se observaron solamente dos casos (1C y 2C) en que las respuestas de los estudiantes al completar la tabla 5 de la hoja de trabajo 30 muestran que las obtienen al explorar la gráfica de la función por medio de la herramienta *“traza”* de la calculadora, al hacer esto

encontraron dificultades para encontrar los valores decimales finitos de las coordenadas que se pedían en dicha tabla. Creemos que esta dificultad se debe en que no tuvieron presente cuál era la función que generaba la gráfica, de haberlo tenido presente no hubieran acudido a recorrer la gráfica y se habrían dado cuenta de que la calculadora les daba valores aproximados y buscarían los valores exactos considerando que $y= 5x$.

En los dos casos anteriores los alumnos utilizaron la herramienta *traza* de la calculadora que ya habían utilizado en una actividad anterior⁷ y cuyo fin era la verificación de coordenadas. Los datos recabados indican que en sus respuestas no hay un análisis más profundo, utilizando los primeros resultados que les arrojaba la máquina, resultado que tal vez es producto de una visión limitada producida por un ambiente de aprendizaje en donde no se tiene la oportunidad de una interacción entre iguales que provee otras reflexiones y otros puntos de vista. Nuestros registros sugieren que los factores antes señalados fueron determinantes en el bajo desempeño del grupo control.

Grupo experimental

En la misma pregunta observamos lo siguiente. Los alumnos utilizaron la grafica de la ecuación $y=5x$ para encontrar los valores que la actividad les requería empleando la herramienta *traza*, de manera muy similar al proceso utilizado por los alumnos 1C y 2C del grupo control. Por ejemplo, para localizar la ordenada correspondiente a $x=2$ en la gráfica que se muestra abajo, donde claramente el valor de y no es un número entero.



⁷ Ver anexo 4

Podemos observar en la tabla que expresan los valores enteros incluyendo un cero para los décimos, hicieron esto para hacer más sencilla la comparación entre cantidades, esta forma de representar los números les facilitó observar la relación 5 a 1 entre ellos.

X	-2.5	-2		-1.5	2	3	4.5
Y		-10.0	-7.5		10.0	15.0	

Cuando se les preguntó acerca de esto ofrecieron respuestas como las siguientes donde destacamos el empleo de los alumnos de la palabra “avanza”, el cual claramente proviene de la acción de recorrer la gráfica que les permite la calculadora:

5E: *“Cuando x avanza 2, en y es 5 veces”*

7E: *“Cuando x avanza, Y sube 5 veces”*

Estos alumnos analizaron los datos que les daba la gráfica, al relacionarlos con los valores enteros de la tabla les permitió establecer una relación de cinco a uno, dato que les ayudo a completar la tabla. El siguiente episodio ilustra lo anterior:

Profesor: *“¿Cómo encontraron las demás coordenadas de la tabla?”*

5E: *“Sumando el cinco el número de veces que indicaba el valor de la x”*

Profesor: *“¿Por qué el número cinco?”*

5E: *“Porque cuando avanza 2 la x la y avanza 10 y cuando la x avanza 3 la y avanza 15... Entonces cuando la x avanza 4.5 la y avanza 22 .5”* [El alumno muestra la siguiente tabla para validar su respuesta]

2, 10

3, 15

4, 20

$\frac{1}{2}$, 2.5

“Y este resultado [continúa explicando] es muy parecido al que nos muestra la calculadora cuando x vale 4.5... Es igual al de mis compañeros”.

Profesor: *“¿Cómo le hiciste para encontrar los números negativos?”*

5E: *“Igual pero ahora hacia abajo [señalando la parte inferior de la gráfica de su calculadora] estas coordenadas son negativas”.*

Podemos apreciar que estos alumnos encontraron el factor de proporcionalidad observando las coordenadas enteras que les proporcionaba la calculadora, identificando así una relación entre las coordenadas. Esto no se observó con los dos alumnos del grupo control, ellos siguieron un método similar pero sin producir respuestas correctas, en sus respuestas observamos un análisis limitado, centrado en la de la figura de la gráfica más que en la estructura de la ecuación o en los valores de la tabla. Presentaron como respuestas lo que les arrojaba en primera estancia la calculadora sin tratar de encontrar por qué obtenían esos resultados, completando de manera errónea la tabla y dando argumentos incompletos.

Con base en los resultados obtenidos en ambos grupos creemos que el trabajo cooperativo aporta a los alumnos maneras diferentes para estudiar un evento, permitiéndoles reorganizar sus ideas y producir nuevas con el apoyo que les brinda la calculadora, incrementando de manera significativa sus posibilidades para formular conjeturas que se aproximan a las formas canónicas que se emplean en matemáticas.

Lo observado durante el trabajo de campo en el grupo control con los alumnos 5E y 7E ilustra el tipo de compromiso que se puede desarrollarse cuando se da el trabajo armónico entre pares. Al pedirles que explicaran cómo habían realizado su trabajo cada uno asumió la responsabilidad de discutir sus respuestas; 5E se encargaba del manejo de la calculadora y

7E del cuaderno en donde registraba los datos, lo que sugiere que estos alumnos experimentaron un compromiso no sólo por su aprendizaje, sino también por el de su compañero.

La calculadora en el trabajo numérico y la producción de gráficas.

Como se ha descrito en los apartados anteriores, la observación del trabajo de los estudiantes tomando como base las formas en que usaban los recursos que ofrece la calculadora nos permitió observar los logros de los estudiantes en aspectos conceptuales. Observar las ocasiones en que combinaban dos o más usos de la calculadora fue retribuyente en términos del tipo de datos que recabamos, particularmente porque el uso de combinado de dos o más recursos de la máquina está asociado con las distintas formas de representación de una función y por ende, cuando los estudiantes trabajan de esa manera están poniendo en juego una reorganización de sus conocimientos que los conduce a “descubrir” relaciones entre la representación analítica de una función (la relación entre dos variables mediante una regla de correspondencia), su representación tabular y su representación gráfica.

Como se mostró en el reporte de las respuestas de los estudiantes en los cuestionarios iniciales, éste es su primer acercamiento al estudio de las funciones, en particular al de las funciones lineales. La incorporación de la calculadora facilitó que en un periodo de trabajo muy corto se les introdujera secuencialmente a las distintas formas de representación de una función, esto induce aprendizajes parciales, lo cual se mostraba en las producciones de los estudiantes reflejando en sus respuestas que centraban ya sea en la ecuación (regla de correspondencia), o en los valores numéricos presentados mediante una tabla y finalmente en la gráfica de la función. Al tener que responder preguntas sobre el comportamiento de la gráfica a partir de analizar la regla de correspondencia de la función o de una colección de valores en una tabla, los estudiantes se fueron dando cuenta que son formas equivalentes para representar a una función. Nuestras expectativas a este respecto eran

más bien modestas, suponíamos que al trabajar con estudiantes de primero de secundaria con este tema lo que en general observaríamos serían aprendizajes parciales que no mostrarán indicios de un acercamiento a ver estas conexiones entre las distintas representaciones que estábamos manejando en las actividades propuestas para este estudio.

Como veremos en el siguiente apartado, los estudiantes fueron un poco más allá de nuestras expectativas, mostraron en sus respuestas evidencias que indican que empezaban a dar un siguiente paso en su conocimiento del comportamiento de funciones lineales sencillas.

Grupo control

En este grupo no encontramos ningún alumno que se haya servido de estas dos estrategias, notamos una apatía notable hacia las actividades por parte de los alumnos, particularmente los alumnos 4C, 8C, 9C y 10C, quienes al final de la sesión entregaban su hoja de trabajo en blanco. Los datos que recabamos sugieren que esto puede deberse al rezago que se había generado en sus aprendizajes, de acuerdo con lo planeado, al avanzar el estudio se iba aumentando el grado de dificultad de las actividades propuestas y con esto también la frustración de los estudiantes rezagados. Dado que estas actividades se desarrollaron de acuerdo a un calendario y secuencia preestablecidos, no contamos con la posibilidad de adoptar un ritmo más pausado para incluir actividades especiales que apoyaran a estos estudiantes, lo cual habríamos hecho en el caso de que este estudio fuera parte de su curso regular. El avance insatisfactorio de estos estudiantes sugiere que es necesario tomar un ritmo más lento o disminuir el alcance y dificultad de las actividades de aprendizaje si queremos evitar que haya alumnos rezagados cuando la clase se lleva a cabo con base en el aprendizaje individual.

Grupo experimental

En este grupo encontramos alumnos que utilizaron con una soltura aceptable la calculadora tanto para ejecutar algoritmos como para producir gráficas y que combinaban ambos recursos para enfrentar las actividades propuestas en este

estudio. A continuación ilustramos el trabajo realizado por estos estudiantes mediante el episodio que se reseña a continuación.

Los estudiantes mostraron desconcierto cuando encontraron discrepancias entre los valores que obtenían para las coordenadas de los puntos de la gráfica de una función dependiendo de la fuente a la que acudían para extraer esa información; algunos usaban la ecuación y otros acudían a construir la gráfica y recorrerla con las facilidades que da la calculadora. Cuando hacían esto último, la calculadora no siempre les permitía “pasar” por los puntos que les interesaban para completar una tabla de valores para las coordenadas de ciertos puntos de la gráfica. El siguiente episodio ilustra lo anterior.

2E: *“No es que esté mal la gráfica de la calculadora, sino que es muy difícil ubicar los puntos que nos piden”*

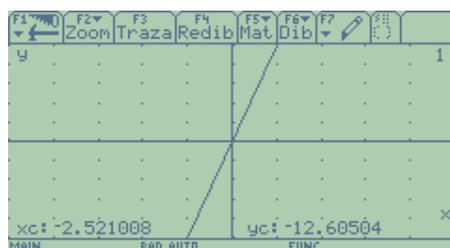
Profesor: *¿Crees que si se pudieran encontrar exactamente las coordenadas que nos dan tendríamos las dos tablas iguales?*

2E: *“Sí, porque cuando tenemos números enteros como el 2 el resultado es igual en las dos tablas”* [la completada usando la ecuación y la completada usando la gráfica].

10E: *“Creo que mis compañeros están mal* [haciendo referencia a los alumnos 3E, 4E y 6E]

Profesor: *¿Por qué?*

10E: *“En la gráfica no encuentro el valor $x=-2.5$, encuentro $x=-2.521$ para $y=-12.6$ ”* [El alumno muestra a sus compañeros la siguiente gráfica con ayuda del proyector señalando las coordenadas].



Profesor: *¿Qué opinan ustedes de lo que acaba de decir su compañero?*

4E: *“Tienen razón, pero es que no se puede localizar la coordenada exacta”*

10E: “Entonces el valor de y no es para $x=-2.5$, sino para $X= -2.521$, la segunda tabla está mal, ¿o no?”

Profesor: ¿Qué opinan ustedes?

4E: “Ya vi qué es lo que está pasando... La gráfica está hecha de muchos puntos, muchos más que los que tenemos en la tabla... Por eso la gráfica nos da puntos que no están en la tabla...”

2E: “Podríamos poner más columnas en la tabla para tener más puntos... ¡No acabaríamos nunca!... ¡Ni con la calculadora!”

10E: “Ya entendí, es que la ecuación, la tabla y la gráfica son lo mismo... Dan los mismos resultados. Miren, yo sustituí en la ecuación los números [valores] que me da la gráfica y llego los mismos resultados... Por eso digo que son lo mismo la tabla, la ecuación y la gráfica, sólo que las usamos para hacer cosas diferentes”

La mayoría de los alumnos aceptaron como cierta la idea planteada por 10E, los que se observaban con más renuencia finalmente fueron convencidos por sus mismos compañeros al comparar las coordenadas que obtenían en su calculadora con los resultados de la ecuación para completar su tabla.

Resumen del apartado

En este apartado reportamos resultados que confirman las ventajas que se obtienen cuando se trabaja en un ambiente cooperativo, el 100% de los alumnos de la muestra del grupo experimental completó de manera satisfactoria su tabla contrastando con el 20% de alumnos de la muestra del grupo control. Además, durante el desarrollo de estas actividades observamos en el grupo experimental una actitud de mayor compromiso hacia su aprendizaje, hacia el debate de manera argumentada y hacia la exploración. Nuestros datos sugieren que las relaciones afectivas que desarrollaron no permitieron que se rezagara ostensiblemente alguno de sus compañeros, los alumnos alternaban el liderazgo al proponer alguna estrategia que ayudara a los demás a solucionar el problema en cuestión, incrementándose su autoestima cuando lograban completar de manera satisfactoria su actividad. En

muchos momentos del trabajo en el aula se percibió un ambiente entre iguales, donde no había quienes se sintieran excelentes, regulares o malos.

Asimismo, encontramos diferencias importantes entre las conjeturas que formularon los alumnos que trabajaron de manera cooperativa y los que lo hicieron de manera individual. En el grupo experimental se acercaron más a lo formalmente establecido, mientras que en el grupo control se expusieron conjeturas en la que no se aprecia alguna similitud con el concepto de función. En el grupo experimental encontramos que los alumnos identificaron una relación entre los valores de x y los de y , e intuyeron que los cambios en una variable influyen en la otra; en sus logros debemos destacar que encontraron que la ecuación, la gráfica y la tabla, son formas distintas de representar a una función.

CAPÍTULO V

Conclusiones

En el desarrollo de este trabajo reportamos los resultados obtenidos al aplicar en el aula los efectos en las actitudes y aprendizajes de los alumnos al aplicar en el aula un ambiente de aprendizaje cooperativo y un ambiente de aprendizaje individual. Asimismo, de manera colateral estudiamos las ventajas y limitaciones del uso de la calculadora algebraica como herramienta didáctica esos ambientes de trabajo.

A manera de colofón, en este capítulo presentamos las conclusiones generales que se derivan de la realización de este estudio. En particular, abordaremos cuestiones referentes a los cambios que observamos en las actitudes y los aprendizajes de los alumnos comparándolos con resultados reportados en estudios que presentamos en el capítulo dedicado al marco conceptual; en el presente capítulo también planteamos algunas implicaciones hacia la enseñanza relacionadas con el uso de la calculadora, consideramos que éstas pueden ser útiles para los profesores que quieran incorporar el uso de esta herramienta con sus alumnos; finalizamos el capítulo señalando aquellos aspectos que consideramos requieren continuar siendo estudiados en una investigación posterior.

Actitudes de los alumnos hacia el aprendizaje de las matemáticas

Con base en los resultados obtenidos en los cuestionarios de actitudes aplicados antes y después del estudio de campo, y conforme a lo observado durante el desarrollo de este estudio, podemos afirmar que coincidimos ampliamente con los reportes de Ferreiro (2001); Johnson y Johnson (1989); Coll (2000); Vygotsky (1978) y Cazden (1991), quienes reportan que el trabajo en un ambiente cooperativo favorece significativamente que los alumnos incrementen su autoestima, que asuman posturas de liderazgo, que sean proclives a participar en la toma de decisiones durante la solución de problemas matemáticos y que estas actitudes se pueden reflejar en una mayor capacidad para argumentar. En el caso de nuestro estudio destacamos la

capacidad para argumentar como uno de los hallazgos de mayor trascendencia en esta investigación; se observó durante el trabajo de campo que cuando un alumno percibía que sus aportaciones ayudaban a la solución de la actividad iba adquiriendo gradualmente una mayor confianza en sí mismo y manifestaba mayor disposición para aprender por sí mismo.

Esas reacciones se observaron de manera más clara en el grupo experimental, al inicio de la actividad los alumnos de este grupo asumían la resolución de un problema de manera individual utilizando la calculadora, unos momentos después empezaban a discutir sus avances y dudas con sus compañeros, por lo general hacían esto en parejas, cuando una pareja llegaba a una solución que les convencía interrumpían a los demás integrantes de su mesa de trabajo, este proceso los conducía a afinar sus argumentos y a encontrar formas para confirmar la validez de sus respuestas; si era necesario debatían otras mesas de trabajo sus resultados hasta aceptar que lo que proponían parecía ser correcto; finalmente cada mesa de trabajo presentaba y discutía sus soluciones frente a la totalidad del grupo. Esta situación resuena con lo planteado por Piaget y Vygotsky; Piaget propone que la forma en que los niños llegan a aprender es por medio de la interacción con el medio físico, mientras actúan sobre él como individuos (alumno y calculadora), esta concepción parece confirmarse con la forma de trabajo que asumían los alumnos al iniciar sus actividades. Vygotsky plantea que el desarrollo intelectual del niño recae básicamente en la interacción social, en la que el niño actúa más allá de sus límites de su capacidad individual debido al apoyo que le brinda una persona con más experiencia (compañeros con mayores habilidades). En este estudio pudimos corroborar que los mejores resultados en cuanto al aprendizaje de los alumnos se obtienen cuando se reflejan en la actividad de los alumnos los principios de estas dos teorías, como hemos mencionado, esto se dio con mayor énfasis en los alumnos que trabajaban en un ambiente cooperativo.

El incremento en la autoestima de los alumnos se reflejaba en su determinación por seguir trabajando a pesar de que en muchas ocasiones les fue difícil superar los retos planteados por las actividades de aprendizaje, esa determinación motivaba a los alumnos que tenían mayores dificultades para

mantenerse en la actividad, con frecuencia registramos expresiones como “*si ellos pudieron yo también puedo*”.

En el grupo control se detectaron casos en donde los alumnos comentaban con sus compañeros más cercanos los razonamientos que desplegaron para llegar a solucionar un problema, lamentablemente, con el transcurso de la sesiones esta práctica se fue haciendo más escasa, observándose un desinterés progresivo en el grupo, lo cual se reflejó en una escasa productividad.

Las respuestas de los alumnos en los cuestionarios de actitudes y en las hojas de trabajo proporcionan evidencias de cambios favorables hacia el estudio de las matemáticas en ambos grupos, lo cual es deseable que ocurra en una clase, pero nuestro objetivo en este estudio no es solamente indagar en qué ambiente de trabajo los alumnos se sienten más cómodos, o en qué ambiente resolvieron un mayor número de actividades, sino también conocer los efectos de cada forma de trabajo en los aprendizajes de los estudiantes. Para tal efecto en el siguiente apartado se analiza la correlación que se dio entre las preferencias y actitudes de cada alumno y sus respectivos logros en términos de aprendizajes.

Conocimientos de los alumnos

De acuerdo con lo observado durante el trabajo de campo y el análisis de las respuestas dadas por los alumnos en sus respectivas hojas de trabajo, podemos concluir lo siguiente:

- ❖ Las respuestas que dieron los alumnos que trabajan en un ambiente cooperativo muestran un proceso más elaborado que los que trabajan de manera individual, poniendo en juego nociones que se acercan a las convencionales, participando de manera activa en la búsqueda de un objetivo común (la respuesta para cada actividad). Esto sugiere que este tipo de procesos motivan una mayor participación de los alumnos en tareas específicas, manifestándose en los alumnos de manera gradual una buena disposición para discutir y defender sus ideas frente a los demás con base en argumentos.

- ❖ El porcentaje de respuestas correctas en el grupo experimental fue de 90%, lo cual contrasta de manera significativa con el 40% de respuestas correctas en el grupo control.

Uso de la calculadora

Con base en los resultados anteriores de actitudes y conocimientos que alcanzaron los alumnos, podemos decir que los resultados encontrados al finalizar el trabajo de campo en cuanto al desarrollo de habilidades de los alumnos, presentan similitudes a los reportados por Pantoja, 2002; Udina, 1997; Hirsch y Coxford, 1995; Streun, 2000; Borba, 1996; Hennessy, 2001, Shternberg, 2001, Zbiek, 1998; Dyke, 1996; Cedillo, 2004. Los resultados en este estudio confirman que la calculadora propicia la exploración y la experimentación por medio de la visualización y los cálculos rápidos, además de que proporciona al estudiante la posibilidad de acceder a conocimientos más complejos aunque carezca aún de una estructura conceptual sólida. Asimismo, se observó que los alumnos en ambos grupos incrementaron su gusto por la materia, en particular creemos que esto se debe en buena parte a que esta herramienta los liberó de cálculos tediosos y les brindó la oportunidad de validar/rechazar de manera rápida sus conjeturas mediante un ágil acceso a gráficas y tablas de valores, favoreciendo de esta manera que se concentraran en sus formas de razonamiento más que en la ejecución de procedimientos algorítmicos.

Consideraciones finales

En este apartado presentamos algunas reflexiones sobre el trabajo realizado, así como ciertas recomendaciones que deben tomarse en cuenta para emplear la calculadora en el salón de clases. Cabe señalar que no sugerimos que puedan generalizarse los resultados que obtuvimos en el presente estudio, sin embargo, creemos que las consideraciones que presentamos a continuación podrían contribuir a un mejor funcionamiento del ambiente de trabajo cooperativo.

Implicaciones sobre la enseñanza

Enseguida presentamos algunas implicaciones que se derivan de este estudio en la escuela secundaria, en éstas se vislumbran situaciones que podría enfrentar un profesor al incorporar la calculadora en el ambiente escolar, nuestra pretensión es proporcionar al profesor una visión más completa de los alcances que tiene el uso de esta herramienta, así como algunas sugerencias útiles para el mejor desempeño de su labor con este tipo de materiales.

a) Aspectos sociales

El uso de la tecnología en este estudio ocasionó diversas reacciones en los distintos sectores de la población, entre éstas destacamos las siguientes.

- En general los padres de familia mostraron su aprobación para el uso de la calculadora como una herramienta didáctica, entre otras cosas manifestaron que el uso de la tecnología es ya una exigencia en los diferentes aspectos de la vida y que es bueno que sus hijos se fueran familiarizando de manera progresiva con el uso de estas herramientas de trabajo.
- Los directivos manifestaron su interés por adquirir las calculadoras debido a los resultados que observaron en los avances de los estudiantes y en su motivación hacia la clase de matemáticas, lamentablemente la sociedad de padres de familia no apoyó este proyecto debido al alto costo económico que esto representaba para ellos.
- Hubo alumnos de otros grupos que manifestaron su interés por participar en las clases con el uso de la calculadora, dado que sus profesores no participaban en este proyecto los alumnos propusieron que se les permitiera entrar como oyentes.
- Varios integrantes de la planta docente de la escuela mostraron interés hacia las actividades con el uso de la calculadora, les interesaba saber cómo se comportan los alumnos cuando trabajan con la calculadora, qué

tipo de actividades se utilizan, cómo se les evaluaba, cuánto cuesta una calculadora como las que usamos, si los alumnos deberían aprender primero con lápiz y papel, qué tan complicado es que los alumnos aprendan a manejar la calculadora y qué tanto trabajo extra exige para ellos abordar la enseñanza empleando la calculadora. Como nuestro objetivo en este trabajo no era convencer a los profesores de las ventajas que implicaba el uso de la calculadora en el salón de clase, se les dio solamente respuestas cortas sin entrar en demasiados detalles; sin embargo, en las breves pláticas que sostuvimos nos percatamos que muchos profesores manifiestan una tendencia a rechazar la inclusión de nuevas tecnologías en el aula debido al esfuerzo extra que esto requiere, acentuándose esta postura en los profesores de mayor experiencia, quienes exponían argumentos como los siguientes:

Profesor de Biología; *“Es muy complicado estar al tanto de las nuevas formas de enseñanza pues en muchas ocasiones no hay tiempo para asistir a cursos”*.

Profesor de Español; *“Es importante plantearles a los alumnos nuevas cosas pero a veces el material que se necesita lo tienes que poner de tu dinero (fotocopias de las actividades), porque en la mayoría de los casos los alumnos no traen su material y los padres no están al pendiente de lo que requieren sus hijos”*.

Profesor de Matemáticas; *“... Es más importante que los alumnos primero aprendan a hacer las cosas empleando lápiz y papel, porque la calculadora los hace más flojos”*.

Profesora de Matemáticas; *“... Es importante que los alumnos aprendan a usar la calculadora, pero primero tienen que saber de dónde vienen los resultados que obtienen de ellas”*.

Podemos concluir este apartado mencionando que la inclusión de la calculadora en este trabajo de investigación fue bien recibida por los padres de

familia, los directivos y alumnos, no fue así en el caso de los profesores, quienes señalan la falta de tiempo para actualizarse y la insuficiencia de materiales en la escuela.

b) Aspectos económicos

El costo de un laboratorio de matemáticas con este tipo de calculadoras es aún un problema difícil de afrontar, se requiere mayor coordinación y disposición por parte de los directivos y los padres de familia, el presupuesto de la escuela se agota en la atención de otras necesidades que también son prioritarias.

c) Carga docente

Una de las preguntas más frecuentes de los docentes durante el desarrollo de esta investigación fue si es necesario invertir más trabajo para enseñar con la calculadora. Al iniciar las actividades dedicadas a la familiarización con el uso de la calculadora notamos desconcierto por parte del profesor/investigador del grupo, le era difícil adaptarse a la dinámica que exige el trabajo, cuando los alumnos están explorando con la calculadora encuentran una amplia gama de posibles respuestas a sus actividades matemáticas y también plantean muchas preguntas acerca del funcionamiento de la máquina, por ejemplo, cómo saber si las pilas están bajas o cómo enfocar mejor la imagen que generaba el proyector.

Después de las dos primeras sesiones de trabajo con los alumnos empezamos a notar una disminución considerable en el esfuerzo del profesor por mantener a los alumnos trabajando, siendo este fenómeno más visible en el grupo experimental, pues en este grupo se observó que el trabajo del profesor era básicamente como guía del trabajo de los alumnos, interviniendo sólo a la hora de moderar la participación de los equipos y al momento de validar o cuestionar las respuestas presentadas por los alumnos.

A este respecto podemos concluir que el uso de la calculadora en el tema de funciones lineales, utilizando actividades de aprendizaje adecuadas en un ambiente de aprendizaje cooperativo, puede llegar a facilitar a los profesores la manera de dar clase, reduciendo su participación como simples expositores de

información. Una vez familiarizados con uso de la calculadora, los alumnos se van involucrando de manera gradual en el desarrollo de su aprendizaje, debatiendo entre ellos las estrategias y las conjeturas que mejor responden a la resolución del problema matemático que están enfrentando.

Con lo anterior no queremos decir que al incorporar el uso de la calculadora en el salón de clases la participación del profesor deja de ser importante, sino todo lo contrario, el profesor sigue siendo un agente esencial en el proceso enseñanza-aprendizaje, en él recaen otras responsabilidades. Entre éstas destacamos las que mencionamos a continuación y sugerimos enfáticamente que deben ser consideradas por los profesores que quieran incorporar la calculadora como una herramienta didáctica:

1. Establecer claramente los objetivos que se pretende alcanzar.
2. Seleccionar las actividades más adecuadas en donde la calculadora sea una herramienta que propicie la apropiación de aprendizajes mediante la exploración de posibilidades que no se tienen al alcance cuando se trabaja con lápiz y papel.
3. Buscar los espacios físicos adecuados para que las actividades sean llevadas en los mejores términos posibles.
4. Resolver anticipadamente las actividades que se pretenden aplicar, con el objetivo de identificar posibles dificultades que los alumnos puedan tener.
5. Cerciorarse que las calculadoras y el proyector estén en buenas condiciones para su uso:
 - Revisar el buen estado de las baterías de las calculadoras.
 - Revisar que la configuración sea homogénea en todas las calculadoras.
 - Seleccionar a un alumno para que del reparto de las calculadoras en cada mesa de trabajo y para su posterior almacenamiento.
 - Revisar que las la conexiones del viewScreen y proyector estén en buen estado y no impidan el libre paso de los alumnos

- Fijar el proyector para evitar movimientos al momento de que los alumnos hagan uso de este.
6. Identificar y corregir el aislamiento de algunos alumnos dentro de los equipos de trabajo.
 7. Determinar el número y las cualidades que deben cubrir los integrantes de los equipos de trabajo de manera que sus talentos y habilidades se complementen.
 8. Enseñar a los alumnos de manera gradual las distintas facilidades que ofrece la calculadora, de preferencia cuando recursos sean realmente útiles para la tarea que van a enfrentar.
 9. Explicar de manera clara a los alumnos las reglas que tendrán que seguirse en las sesiones de trabajo.
 10. Intervenir solamente cuando en el interior los equipos se generen dudas o cuando no se tenga claro cuál es el sentido de la pregunta que se les pidió contestar.
 11. Intervenir a manera de mediador con respecto a las conclusiones que dan los alumnos, introduciendo lo formalmente establecido a manera de conclusión en cada sesión de trabajo.

Las recomendaciones que proponemos pueden sugerir que la carga para el docente se incrementa cuando se incorpora la calculadora como herramienta didáctica en un ambiente de aprendizaje cooperativo, con base en nuestra experiencia en este estudio podemos afirmar que sin duda hay que hacer un trabajo previo, una vez que se ha iniciado el trabajo el papel del profesor gradualmente se va centrando en las dos últimas recomendaciones (10 y 11), lo que representa una enorme ventaja si consideramos que el grupo escolar con el que se hizo el estudio está formado por 45 alumnos, esta modificación en la carga de trabajo del profesor durante la sesión de clase, le proporciona la oportunidad de entablar una atención más personalizada con los alumnos que presentan mayores dificultades en el aprendizaje de las matemáticas y también para atender de mejor manera a aquéllos que avanzan a un ritmo más acelerado.

Visión prospectiva

Una vez terminado esta investigación surgió una nueva interrogante, ¿Qué alumnos retendrán por más tiempo los conocimientos adquiridos, los que trabajan en un ambiente individual o los que se desenvuelven de manera cooperativa? Esta pregunta sin duda nos remite a lo que asumimos como aprendizaje significativo, el aprendizaje significativo ocurre cuando una nueva información "se conecta" con un concepto relevante preexistente en la estructura cognitiva; es decir, si los conceptos adquiridos por los alumnos en este trabajo resultaron relevantes y adecuadamente claros, estarán disponibles en su estructura cognitiva durante más tiempo, sirviendo de anclaje a nuevos aprendizajes.

Ausubel (1983, p.18) propone que "... un aprendizaje es significativo cuando los contenidos son relacionados de modo no arbitrario y sustancial con lo que el alumno ya sabe. Por relación sustancial y no arbitraria se debe entender que las ideas se relacionan con algún aspecto existente específicamente relevante de la estructura cognoscitiva del alumno, como una imagen un símbolo ya significativo, un concepto una proposición"

Sin duda, es necesario recabar nuevos datos para indagar en qué medida son significativos los aprendizajes que mostraron los estudiantes en el presente estudio, consideramos que esta tarea corresponde a una línea de investigación que no pudimos abordar con suficiente profundidad y que es necesario hacerlo para valorar de mejor manera el potencial que parece ofrecer el ambiente de aprendizaje cooperativo apoyado con el uso de la calculadora algebraica.

Asimismo, también es necesario abundar en el conocimiento de las posibilidades que brinda la calculadora, en particular, el tipo y alcances de los conocimientos que pueden adquirir los estudiantes mediante actividades que propicien de mejor manera el uso de las tres formas de representar una función: mediante la expresión algebraica de su regla de correspondencia, mediante la construcción y análisis de tablas de valores dentro y fuera del rango de valores a que se limita la pantalla de la máquina cuando se despliega su gráfica, y mediante la correlación de la representación gráfica de una

función con los parámetros en su expresión analítica y los valores numéricos que corresponden a su dominio y contradominio. Esto nos marca una nueva línea de investigación que debería ser abordada en estudios posteriores.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Ausubel, D. (1983). *Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo*, Trillas, México.
- Ávila, A. (2004). "Entre la costumbre y las presiones de la innovación" *Educación matemática*. Vol. 16, No. 2, pp. 24-48.
- Best, J. (1982). *Cómo Investigar en Educación*, Ediciones Morota.
- Borba, M. (1996). "A student's construction of transformations of functions in a multiple representational environment", *Kluwer Academic Publishers*, Vol. 31, No. 3, pp. 319-337. USA.
- Cazden, C. (1984). "El discurso del aula". 627-709. En M, Wittrock. (1990) *la investigación de la enseñanza, III. Profesores y alumnos*. Barcelona: Paidós/Ministerio de Educación y Ciencia.
- Cazden, C. (1991). "La conversación entre iguales". 135-170. En Cazden, C. *El discurso en el aula. El lenguaje de la enseñanza y del aprendizaje*. Barcelona: Paidós/Ministerio de educación y ciencia.
- Cedillo, T. (1997). *Calculadoras: introducción al Álgebra*. Grupo Editorial Iberoamericana. México.
- Cedillo, T.(2001). "Toward on algebra Acquisition Support System". *Mathematical Thinking and Learning*, Vol. 3, No. 4, pp. 221.260. Lawrence Erlbaum associates, USA.
- Cedillo, T. (2003). "Initiating Students Into Algebra with Symbol –Manipulating Calculators", 219-239. En Fey, J. *Computer algebra systems in secondary school mathematics education*. USA: National council of teachers of mathematics.
- Cedillo, T. (2004). *Las gráficas de funciones y la resolución de problemas*, 2 da. Ed., Pearson educación, México.
- Chiu, M. (2001). *Learning to Graph Linear Functions: A Case Study of Conceptual Change*, Lawrence Erlbaum. USA.
- Coll, C. (2000). *El constructivismo en el aula*, Graó, España.
- Dyke, F. (1996). "The inverse of a Function", *The mathematics Teacher*, Vol. 89, No. 2, pp. 121-123. USA.
- Ferreiro, R. (2001). *El ABC del Aprendizaje Cooperativo*, Trillas, México.

- Hennessy, S. (2001). "Role of Graphic Calculator in Mediating Graphing Activity", *International Journal of Mathematical in science and technology*. Vol. 32, No. 2, pp. 267-289. Taylor and Francis. USA.
- Hirsch, C. y Coxford, A. (1995). "Teaching Sensible Mathematics in Sense-MaKing Ways with the CPMP", *The mathematics Teacher*, Vol. 88, No. 8, pp. 694-700. USA.
- Hirschhorn, D. B. y Thompson, D. R. (1996) "Technology and Reasoning in Algebra and Geometry". *The Mathematics Teacher*, Vol. 89, No.2, pp 138-142.
- Johnson, D. W. y Johnson, R. T. (1989). "Cooperative Learning in Mathematics Education". In *New directions for Elementary School Mathematics*, Yearbook of the National Council of Teacher of Mathematics , edited by Paul R. Trafton, pp. 45-234, Reston.
- Mercer, J., 1995. "Teaching Graphing Concepts With Graphing Calculators", *The Mathematics Teacher*, Vol. 88, No. 4, pp. 268-273. USA.
- Moreno, E. (2004). *Aprendizaje, matemáticas y tecnología*, Santillana, México.
- OCDE (1991). *Escuelas y calidad de la enseñanza. Informe internacional*, Barcelona - Buenos Aires – México, Paidós, Ministerio de Educación y Ciencia.
- Ortega, R. (1995). "Constructivismo y práctica educativa escolar", 77-91. En Rodrigo, M. *La construcción del conocimiento escolar. Ecos de un debate*. Barcelona, Paidós.
- Pantoja, G. (2002). "Aritmética Fácil con el uso de la Calculadora", cuadernos de actualización. Número 15, UPN, México.
- Perales, F. (2000). *Resolución de Problemas, síntesis*, Madrid.
- Piaget, J. (1978). *La equilibracion de las estructuras cognoscitivas: problema fundamental del desarrollo*, Siglo XXI, España.
- Polya, G. (1965). *Como plantear y Resolver Problemas*, Trillas, México.
- Ríbnikov, K. (1987). *Historia de las Matemáticas*, Mir Moscú, URSS.
- Ruiz , M. (2001). *Profesionales competentes: Una respuesta educativa*, IPN, México.
- SEP. (1993). Plan y programas de estudio. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas. México.
- SEP. (2001). Libro para el maestro, Matemáticas. Educación Secundaria. Matemáticas. México.

- Shternberg, B. (2001). Charting a Visual Course to the Concept of Function. The Roles of Representation in School Mathematics. National Council of Mathematics Reston, Virginia.
- Streun, A. (2000). "Representations in applying functions", *International Journal of Mathematical in science and technology*. Vol. 31, No. 5, pp. 703-725. Taylor and Francis. USA.
- Szendrei, J. (1996). "Concrete Materials in the Classroom", en *International Handbook of Mathematics Education*, Bishop et al. (Eds.). Dordrecht (Netherlands): kluwer Academic Publisher.
- Udina, F. (1997). *Aritmética y Calculadoras*, Síntesis, España.
- Vigotsky, Lev. (1978). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*, Editorial Critica, Barcelona.
- Walmsley, A. y Muñoz, J. (2003). "Cooperative Learning and Its Effects in a High School Geometry Classroom", *The Mathematics Teacher*, Vol. 96, No.2, pp 112-116.
- Wenzelburger, E. (1993). *Calculadora Electrónica*, Iberoamericana, México.
- Yerushalmy, M. (2001). "Charting a visual Course to the Concept of Function", En Cuoco, A. *The Roles of Representation in school Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics, Reston Virginia.
- Zbiek, R. (1998). "Prospective Teachers' Use of Computing Tools to Develop and Validate Functions as Mathematical Models", *Journal for Research in mathematics Education*. Vol. 29, No. 2, pp. 184-201. USA.
- Cedillo Ávalos, Tenoch, "Actividades de aprendizaje" Instituto Latinoamericano de la Comunicación Educativa <<http://sec21.ilce.edu.mx/matematicas/calculadoras/>> (9 de octubre del 2005), 5 pp.
- Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (inee), "La calidad de la educación básica en México informe anual 2006", *Resultados del aprendizaje* <http://www.inee.edu.mx/images/stories/documentos_pdf/Publicaciones/Informe2006/4olibro_c_6.pdf>, (25 de febrero de 2008), 48 pp.

ANEXO I

ACTIVIDADES UTILIZADAS ANTES DEL ESTUDIO DE CAMPO



Actividades de Aprendizaje

Primer Grado

Números Naturales
y sus Operaciones

¡AL CERO EN CINCO PASOS!

Esta hoja presenta juego matemático que consiste en lo siguiente:

Se trata de reducir a cero un número que esté entre cero y mil. Puedes hacer esto mediante sumas, restas, multiplicaciones o divisiones. Puedes repetir una operación las veces que quieras.

Las operaciones deben hacerse con el número que se da y otro número entero que tú elijas. El número que elijas debe ser uno de los siguientes: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, o 9. Puedes usar el número que elijas las veces que quieras.

Cada operación que hagas se cuenta como un paso. El resultado de cada operación que hagas debe ser un número entero.

Ganas el juego si, a lo más en cinco pasos, puedes reducir a cero cada uno de los siguientes números.

EJEMPLO: REDUZCAMOS A CERO EL NÚMERO 869.

PASO 1: $869 - 5 = 864$

PASO 2: $864 / 9 = 96$

PASO 3: $96 / 8 = 12$

PASO 4: $12 / 6 = 2$

PASO 5: $2 - 2 = 0$

Usa la calculadora para encontrar maneras de reducir a cero los siguientes números:

789		629		823	
Paso 1:		Paso 1:		Paso 1:	
Paso 2:		Paso 2:		Paso 2:	
Paso 3:		Paso 3:		Paso 3:	
Paso 4:		Paso 4:		Paso 4:	
Paso 5:		Paso 5:		Paso 5:	

952		997		857	
Paso 1:		Paso 1:		Paso 1:	
Paso 2:		Paso 2:		Paso 2:	
Paso 3:		Paso 3:		Paso 3:	
Paso 4:		Paso 4:		Paso 4:	
Paso 5:		Paso 5:		Paso 5:	



NÚMEROS CON SIGNO: SUMA



Los números con signo pueden ser positivos o negativos, el cero no es positivo ni negativo. Los números positivos los conoces bastante bien, en estas hojas de trabajo aprenderás algunas cosas importantes sobre los números negativos. Los números negativos se usan para referirse a ciertas situaciones. Por ejemplo, la temperatura "siete grados bajo cero" puede representarse mediante la expresión -7 grados. Los números negativos también se usan para referirse a deudas, por ejemplo, si una persona debe \$1000.00, esa deuda puede representarse mediante la expresión -1000 pesos.

¿Puedes dar otro ejemplo de una situación en que puedan usarse los números negativos?

1. Usa la calculadora para realizar las siguientes actividades. Observa que en la calculadora hay dos signos que representan "menos". Uno de esos signos sirve para efectuar la operación de restar, el otro, el signo ($-$), es el que debes usar para escribir un número negativo en la calculadora.

1. $-7+9=$ • $-5+-7=$ • $8+-7=$ • $-15+-17=$
• $-30+-50=$ • $0.5+-2=$ • $-19+-30=$ • $-72+30=$

1. ¿Qué hizo la calculadora para sumar un número negativo con un número positivo?

2. ¿Qué hizo la calculadora para sumar un número negativo con otro número negativo?

3. En cada inciso encuentra tres parejas de números que al sumarlos den el resultado que se indica. Verifica tus respuestas usando la calculadora.

1. Resultado: - 32	• Resultado: - 45	• Resultado: - 27	• Resultado: - 40
• Resultado: - 55	• Resultado: - 78	• Resultado: 0	• Resultado: - 1



HOJA DE TRABAJO NUMERO 2 (Formato 1)

7	14
8	16
9	18
15	30
18	36

En mi calculadora escribí un programa que produce la siguiente tabla:



1. ¿Qué resultado me va a dar la calculadora si escribo en mi programa el número 5?

¿ Y si escribo el número 25? _____ ¿Si escribo el número 17?

¿Qué operaciones hiciste para obtener esos resultados _____

2. ¿Puedes programar tu calculadora para que haga lo mismo? Escribe tu programa en el cuadro de abajo.

--

3. Usa el programa que hiciste para encontrar los números que faltan en la tabla.

25	37.03	59.83	117.18	136.1	200.79		
						551	653.38

ANEXO II
CUESTIONARIO DE ACTITUDES

Cuestionario sobre actitudes*

Por favor encierre en un círculo el número de la opción que mejor corresponda a tus respuestas

1. En total desacuerdo
2. Discrepo en algo.
3. Concuerdo en algo
4. Totalmente de acuerdo

1. Aprendo más cuando trabajo en equipo en las clases de matemáticas

1. En total desacuerdo	2. Discrepo en algo.	3. Concuerdo en algo	4. Totalmente de acuerdo
------------------------	----------------------	----------------------	--------------------------

2. Me gustan las matemáticas.

1. En total desacuerdo	2. Discrepo en algo.	3. Concuerdo en algo	4. Totalmente de acuerdo
------------------------	----------------------	----------------------	--------------------------

3. Me gusta trabajar de manera individual en las clases de matemáticas

1. En total desacuerdo	2. Discrepo en algo.	3. Concuerdo en algo	4. Totalmente de acuerdo
------------------------	----------------------	----------------------	--------------------------

4. Me gusta estudiar de manera individual para las clases de matemáticas.

1. En total desacuerdo	2. Discrepo en algo.	3. Concuerdo en algo	4. Totalmente de acuerdo
------------------------	----------------------	----------------------	--------------------------

5. Aprender matemáticas puede ser divertido y placentero.

1. En total desacuerdo	2. Discrepo en algo.	3. Concuerdo en algo	4. Totalmente de acuerdo
------------------------	----------------------	----------------------	--------------------------

6. No me gusta estudiar matemáticas en equipos

1. En total desacuerdo	2. Discrepo en algo.	3. Concuerdo en algo	4. Totalmente de acuerdo
------------------------	----------------------	----------------------	--------------------------

7. Me siento más cómodo preguntándole a un compañero de mi equipo que al profesor.

1. En total desacuerdo	2. Discrepo en algo.	3. Concuerdo en algo	4. Totalmente de acuerdo
------------------------	----------------------	----------------------	--------------------------

8. Aprendo menos cuando trabajo en equipo en las clases de matemáticas

1. En total desacuerdo	2. Discrepo en algo.	3. Concuerdo en algo	4. Totalmente de acuerdo
------------------------	----------------------	----------------------	--------------------------

9. No me gusta aprender matemáticas

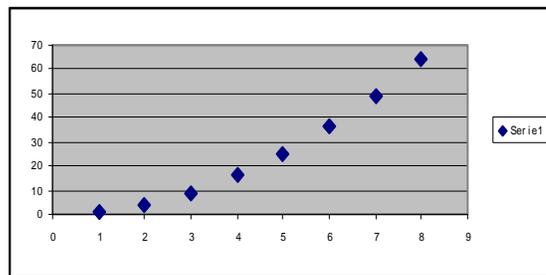
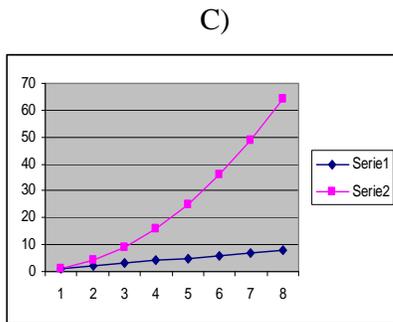
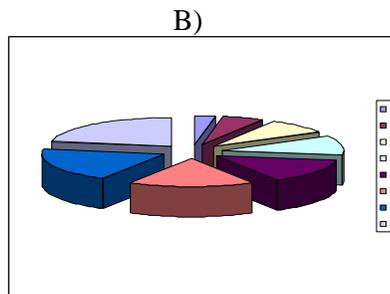
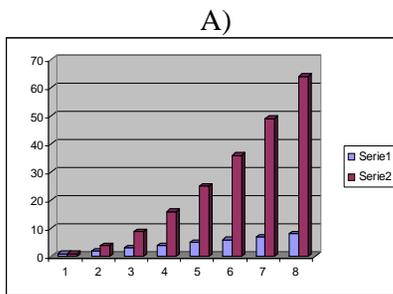
1. En total desacuerdo	2. Discrepo en algo.	3. Concuerdo en algo	4. Totalmente de acuerdo
------------------------	----------------------	----------------------	--------------------------

* Tomado de la revista "The Mathematics Teacher", Vol. 96, No.2, pp 112-116.

ANEXO III
CUESTIONARIO DE CONOCIMIENTOS

Cuestionario exploratorio

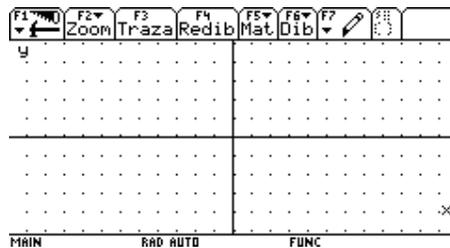
1. ¿Has encontrado gráficas como las siguientes en tú vida cotidiana? ¿Cuáles?



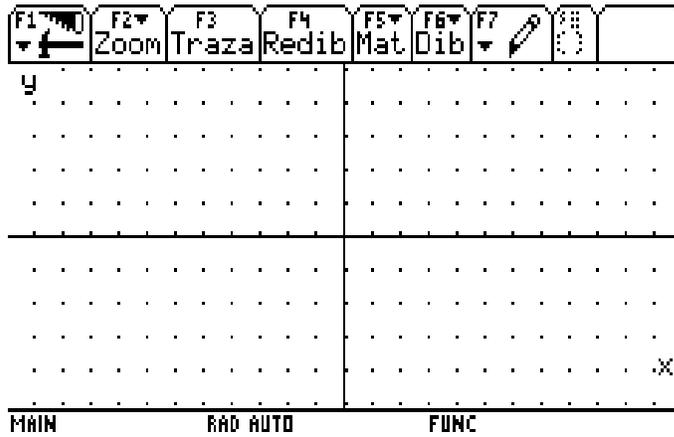
2. ¿Para que crees que sirven las gráficas?

3. ¿Te gustaría aprender a hacer gráficas? ¿Por qué?

4. ¿Sabes para qué sirven las líneas vertical y horizontal que se cruzan en la siguiente figura?

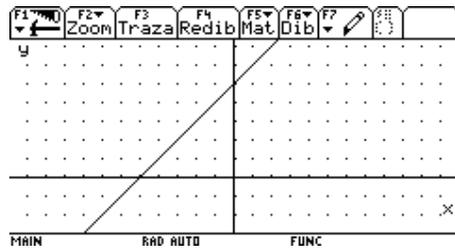


5. En la siguiente figura marca el punto A cuyas coordenadas son (3, 4) y el punto B cuyas coordenadas son (5, 2).

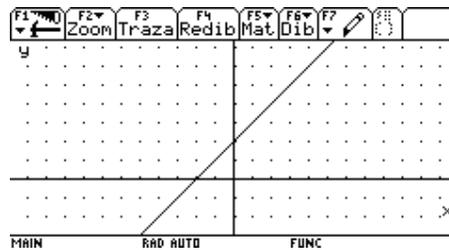


6. ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a la ecuación $y = x + 2$?

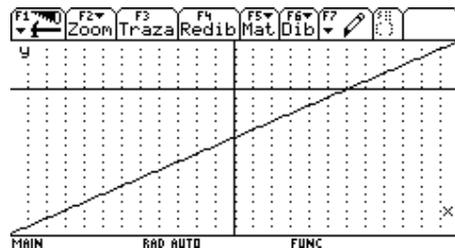
A)



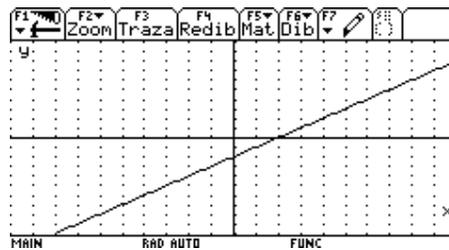
B)



C)

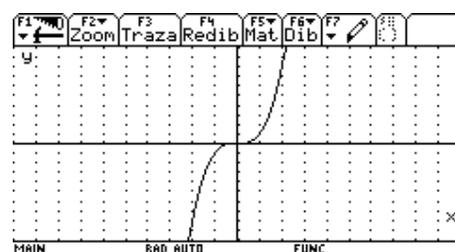
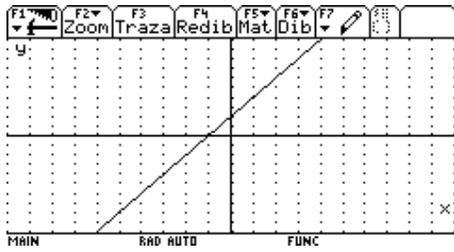
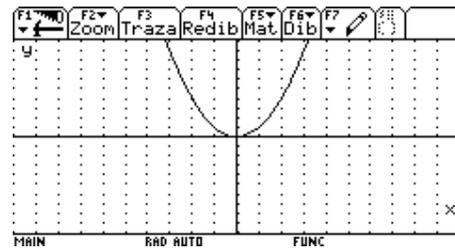
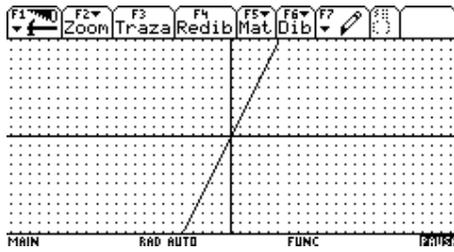


D)



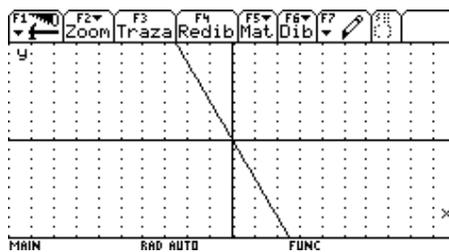
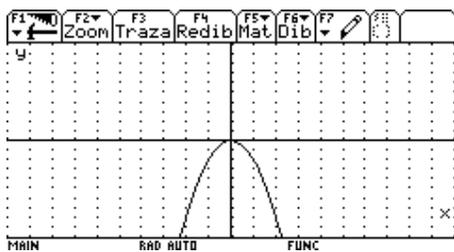
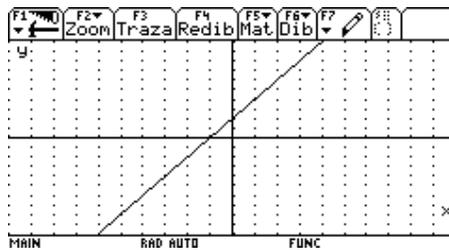
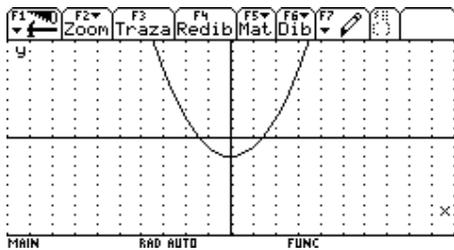
7. ¿En que te guiaste para elegir la gráfica? _____

8. Encierra cual es la gráfica que cumple con la ecuación $y = 2x$,



9. ¿En que te guiaste para elegir la gráfica en la pregunta anterior?

10. De las siguientes gráficas identifica la que representa a la ecuación $y = 2x + 2$



11. ¿En que te fijaste para seleccionar la gráfica?

ANEXO IV

ACTIVIDADES UTILIZADAS DURANTE EL TRABAJO DE CAMPO

HOJA DE TRABAJO 27

CAMBIO DE ESCALA

1. Construye en la calculadora la gráfica de la ecuación $y=2x+3$.

a) ¿Cuáles son las coordenadas del punto en que la gráfica corta al eje Y ?

$x=$ _____ $y=$ _____

b) ¿Cuáles son las coordenadas del punto en que la gráfica corta al eje X ?

$x=$ _____ $y=$ _____

2. La pantalla donde se producen las gráficas en tu calculadora puede configurarse de distintas maneras. Las siguientes figuras muestran la gráfica de la ecuación $y=2x+3$ con distintas escalas en el eje Y . Arriba de cada pantalla dice qué escala se empleó para producir cada gráfica. Por ejemplo, si ajustas la escala en el eje Y como "yscl=2", significa que cada marca en el eje Y vale 2 unidades.

Fig. 15; yscl=1

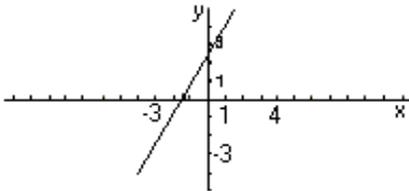


Fig. 16; yscl=2

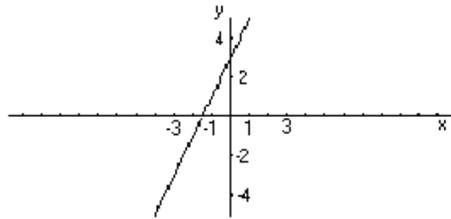


Fig. 17; yscl=3

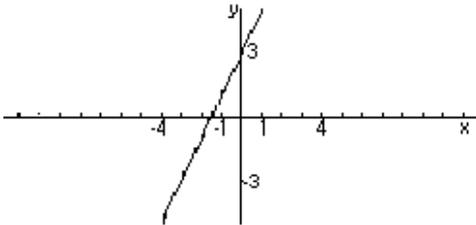
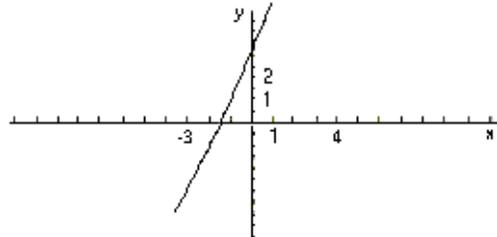


Fig. 18; yscl=0.5



a) ¿Qué diferencias observas en las gráficas? _____

b) ¿En todas las gráficas las coordenadas del punto en que cortan al eje Y son las mismas? _____

¿Por qué parecen ser distintos los puntos en que cada gráfica corta al eje Y ? _____

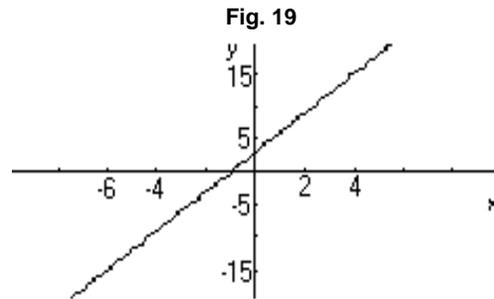
Usa la tecla TRACE para verificar tus respuestas.

HOJA DE TRABAJO 28
MÁS SOBRE ESCALAS Y GRÁFICAS

Las gráficas que se muestran a continuación se hicieron usando una escala en la que cada marca en el eje **Y** equivale a **cinco** unidades y cada marca en el eje **X** equivale a **dos** unidades.

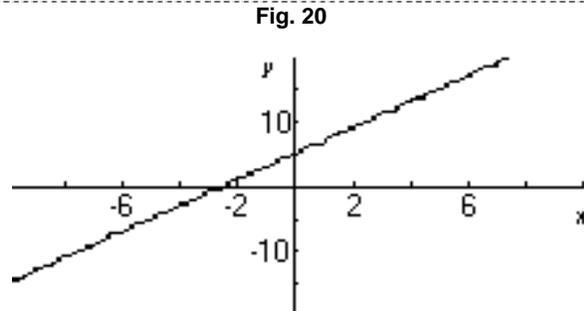
1) ¿Cuáles son las coordenadas del punto en que la gráfica de la Fig. 19 corta al eje **Y**? _____

2) ¿Cuáles son las coordenadas del punto en que la gráfica de la Fig. 19 corta al eje **X**? _____



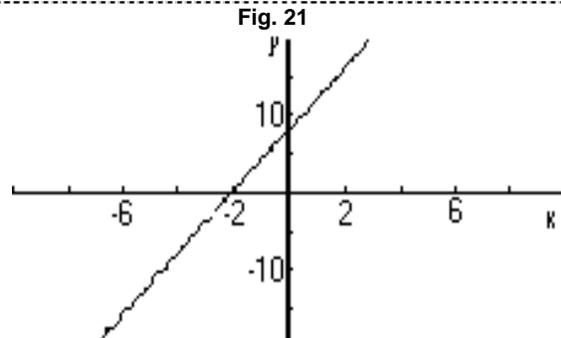
3. ¿Cuáles son las coordenadas del punto en que la gráfica de la Fig. 20 corta al eje **Y**? _____

4. ¿Cuáles son las coordenadas del punto en que la gráfica de la Fig. 20 corta al eje **X**? _____



5. ¿Cuáles son las coordenadas del punto en que la gráfica de la Fig. 21 corta al eje **Y**? _____

6. ¿Cuáles son las coordenadas del punto en que la gráfica de la Fig. 21 corta al eje **X**? _____



7. Reproduce de manera exacta esas gráficas en tu calculadora. Verifica tus respuestas usando la tecla TRACE. ¿Todas tus respuestas fueron correctas? Si tuviste alguna respuesta incorrecta explica por qué.

HOJA DE TRABAJO 29
EL RANGO EN EL EDITOR DE GRÁFICAS

Se le llama rango del editor de gráficas a los valores máximo y mínimo que podemos asignar tanto en el eje **X** como en el eje **Y**.

- Activa la pantalla de tu calculadora que te muestra los valores mínimo y máximo con los que está configurado el editor de gráficas de tu máquina. Completa la siguiente tabla con los valores que tiene en este momento tu calculadora.

xmin =	xmin significa el mínimo valor en el eje X
xmax =	xmax significa el máximo valor en el Eje Y
ymin =	ymin significa el mínimo valor en el eje Y
ymax =	ymax significa el máximo valor en el Eje Y

- Construye la gráfica de la ecuación $y=2x+3$ y anota las coordenadas de los puntos en que la gráfica corta al eje **X** y al eje **Y**. _____

- Ahora configura el rango de tu calculadora con los valores que se muestran a continuación y ve de nuevo la gráfica de la ecuación $y=2x+3$.

$$\begin{aligned} \text{xmin} &= -20 \\ \text{xmax} &= 20 \\ \text{ymin} &= -30 \\ \text{ymax} &= 30 \end{aligned}$$

¿Qué ocurre cuando cambias el rango del editor de gráficas? _____

- Construye en la calculadora las gráficas de las ecuaciones $y=2x+30$ y $y=40-3x$. Esas gráficas se cortan en un punto, pero en este momento no puedes verlo.
 - Ajusta de manera adecuada el rango y la escala de la pantalla del editor de gráficas para que puedas ver en qué punto se cortan esas gráficas.
 - Usa la tecla **TRACE** para encontrar las coordenadas del punto en que esas gráficas se cortan. ¿Cuáles son las coordenadas del punto de intersección?

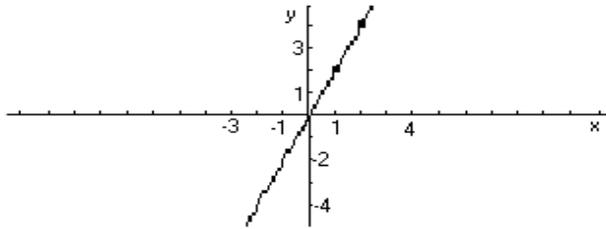
- Construye una ecuación tal que su gráfica no se vea en la pantalla debido a la forma en que en este momento tienes definida la escala en el editor de gráficas y a los valores máximos y mínimos asignados para **X** y **Y**. ¿Cuál es la ecuación que construiste? _____
 ¿Cómo ajustarías el rango de tu calculadora para que se vea la gráfica? _____

HOJA DE TRABAJO 30
RECTAS QUE "CRECEN"

En la Fig. 22 se muestra la gráfica de la ecuación $y=x$. Constrúyela en tu calculadora.

En la figura se han destacado algunos puntos. Tú no tienes que reproducirlos, sólo son para auxiliarte en la lectura de la gráfica.

Fig. 22

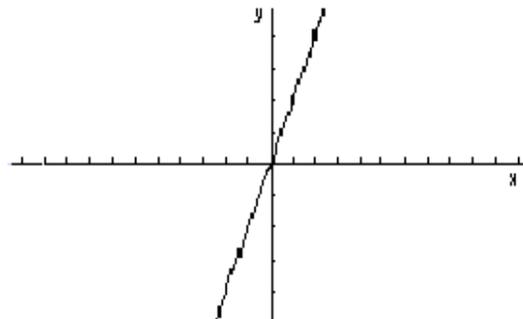


1. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos que se han destacado en la gráfica?

2. ¿A qué crees que se deba que los valores de la primera y la segunda coordenadas de esos puntos sean iguales?

1. En la Fig. 23 se muestra la gráfica de la ecuación $y=2x$. Constrúyela en tu calculadora. Se han destacado algunos puntos de la gráfica. ¿Cuáles son las coordenadas de esos puntos? _____

Fig. 23



2. ¿Un alumno dice que en esa gráfica los valores de Y son el doble de los valores de X ? ¿Lo que él dice es cierto? _____ ¿Qué relación hay entre esto y que la gráfica fue construida usando la ecuación $y=2x$?

3. Completa la siguiente tabla usando la ecuación $y=5x$. ¿Qué relación hay entre los valores de X y Y ?

X	-2.5	-2		1.5	2	3	4.5
Y			-7.5				

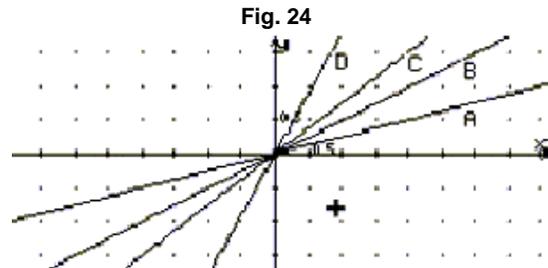
4. Cuando localizamos las coordenadas de un punto contamos cuántas unidades **"avanzas"** sobre el eje **X**, y luego cuántas unidades **"subes"** sobre el eje **Y**. Traza la gráfica de la ecuación $y=4x$. ¿Cuántas unidades "sube" la gráfica en el eje **Y** **por cada unidad** que "avanza" sobre el eje **X**? _____
- ¿Encuentras una relación entre lo que "sube" y lo que "avanza" la gráfica con la ecuación $y=4x$? ¿Cuál es esa relación? _____
- Construye una gráfica en la que por cada unidad que "avance" sobre el eje **X**, "suba" 1.5 unidades sobre el eje **Y**. ¿Cuál es la ecuación que usaste para construir esa gráfica? _____
- _____
- _____

HOJA DE TRABAJO 31
¿QUÉ GRÁFICAS "CRECEN" MÁS RÁPIDO?

En las figuras de esta hoja de trabajo la escala en X y en Y es 1.

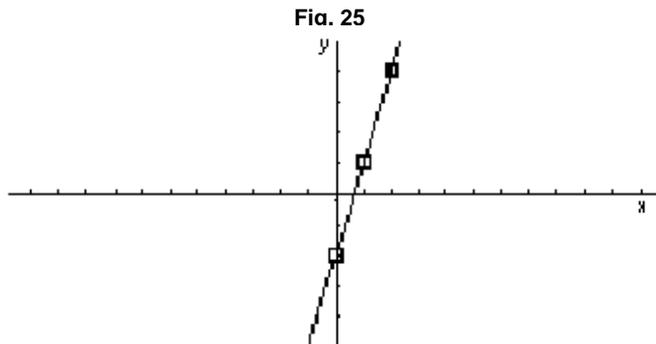
1. ¿Cuál de las gráficas que se muestran en la Fig. 24 es la que "crece" más rápido?

2. ¿Cuál es la gráfica que "sube" más lento?



3. La Fig. 25 muestra la gráfica de la ecuación $y=3x-2$. ¿Cuántas unidades "sube" la gráfica sobre el eje Y, mientras avanza desde $x=0$ hasta $x=1$? _____

¿Cuántas unidades "sube" la gráfica mientras avanza desde $x=1$ hasta $x=2$? _____



4. ¿Qué relación hay entre esa ecuación y el número de unidades que sube la gráfica en el eje Y, respecto a lo que avanza por cada unidad sobre el eje X? _____

5. Construye lo que se indica en cada caso.

a) Dos gráficas que "crezcan" más rápido que la gráfica de $y=x$. ¿Cuáles son las ecuaciones que usaste para construirlas? _____

b) Dos gráficas que "crezcan" menos rápido que $y=x$. ¿Cuáles son las ecuaciones que usaste para construirlas? _____

c) Una gráfica que corte al eje Y en el punto $(x=0, y=3)$, y que suba 5.5 unidades por cada unidad que avanza sobre el eje X? ¿Qué ecuación usaste para construirla? _____
Compara tu respuesta con la de tus compañeros. Escribe tus conclusiones a continuación _____

d) Dos gráficas distintas que "crezcan" igual de rápido que $y=4x$. ¿Cuáles son las ecuaciones que usaste para construirlas? _____

HOJA DE TRABAJO 33
GRÁFICAS QUE "DECRECEN"

En las figuras de esta hoja de trabajo la escala en X y en Y es 1.

La Fig. 29 muestra la gráfica de la ecuación $y = -x + 2$.

1. ¿Cuáles son las coordenadas del punto en que la gráfica corta al eje Y? _____
2. ¿La gráfica "sube" si avanzas desde $x=1$ hasta $x=2$? _____
3. Una alumna dice que esta gráfica "baja" cuando avanzas de izquierda a derecha sobre el eje de las X. ¿Estás de acuerdo con lo que ella dice? _____ ¿Por qué? _____

Fig. 29

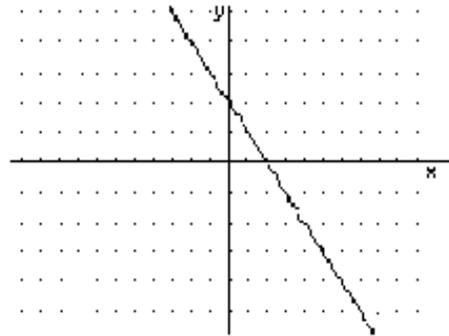
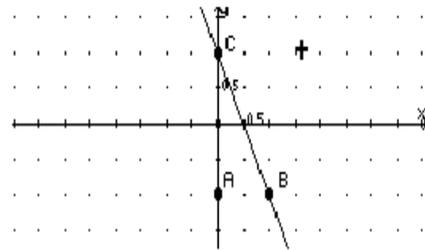


Fig. 30

4. La Fig. 30 muestra la gráfica de la ecuación $Y = -2x + 1$. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos A, B y C? _____

5. ¿Cuántas unidades avanzas sobre el eje de las X si te mueves desde el punto A hasta el punto B? _____



4. ¿Cuántas unidades baja la gráfica sobre el eje Y cuando te mueves desde A hasta B? _____

5. ¿Qué relación hay entre lo que "baja" la gráfica y su ecuación? _____

ANEXO V

GRAFICAS DE LOS SEIS GRUPOS DE PRIMER GRADO

