



Universidad Pedagógica Nacional

SECRETARÍA ACADÉMICA

COORDINACIÓN DE POSGRADO

MAESTRÍA EN DESARROLLO EDUCATIVO

**“El aprendizaje de fracciones: propuesta didáctica con
estudiantes de quinto grado de primaria”**

Tesis que para obtener el Grado de

Maestro en Desarrollo Educativo

Presenta

Daniel Domínguez Sosa

Directora de tesis:

Dra. Cristianne Butto Zarzar

Ciudad de México febrero de 2018

Agradecimientos

Para mí, fue un gusto y una satisfacción estudiar la Maestría en Desarrollo Educativo. Obtuve muchas experiencias que me servirán en mi desarrollo personal y profesional. Pero esto no habría sido posible sin el apoyo de muchas personas y de instituciones, es por ello que, considero pertinente y necesario agradecerles.

En primera instancia, agradezco al **CONACyT** por haberme otorgado una beca que me ayudó a concluir mis estudios.

A la **Universidad Pedagógica Nacional**, plantel Ajusco, que una vez más me brindó un espacio para estudiar y aprender.

Al coordinador del programa de Maestría en Desarrollo Educativo, **Dr. Juan Mario Ramos Morales**, quien siempre estuvo apoyándonos en lo que necesitamos como estudiantes.

A mi asesora, la **Dra. Cristianne Butto Zarzar**, quien siempre estuvo presente para apoyarme y guiarme en esta difícil tarea.

A la dirección del **Colegio Juan de Jauregui** y a sus estudiantes. Sin su apoyo no habría sido posible la realización de mi trabajo.

A mi madre **Angela Sosa Santes**, que también es mi amiga, mi consejera y mi modelo a seguir. Siempre ha estado y estará conmigo.

A mi amiga y compañera de toda la vida **Martha Angélica Delgado Hernández**, quien siempre está ahí cuando más la necesitas.

Finalmente, a mis amigos, colegas y compañeros de la maestría, quienes fueron un apoyo a lo largo de las clases y también fuera de ellas. En especial a los siguientes.

Anahy Mejía, Andrea Ortiz, Beatriz del Callejo, Claudia Esquivel, Francisco Calles, Jessica Peña, Jesús Segura, María Bernardo, Mariana Rodríguez, Marisol Sandoval, Raúl Tavira, Remedios Soriano y Víctor Santos Catalán.

Resumen

Las fracciones forman parte del programa y plan de estudios de la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2011). Los estudiantes se inician en ese contenido escolar a partir del tercer grado de primaria y el estudio sigue hasta la educación secundaria, aun así, los estudiantes presentan dificultades con varias ideas de dicho contenido. De acuerdo a la literatura, varias dificultades derivan del uso del modelo conceptual parte-todo en la enseñanza. En dicho modelo se considera las fracciones en la forma $\frac{a}{b}$, donde un entero o unidad se divide en 'b' partes de las que se toman 'a' partes. El simbolismo $\frac{a}{b}$ tiene un significado restricto, la fracción es vista como una partición, como la conjugación de dos acciones: dividir/tomar, dividir/comer, dividir/pintar. En ese sentido, existen diversos autores que proponen trabajar las fracciones desde diferentes perspectivas. Diversos autores investigaron sobre el conocimiento de fracciones con estudiantes de quinto grado, a quienes se les enseñaron fracciones con modelos de área. Muchos estudiantes presentaban problemas. Estos autores consideran importante usar otros modelos para la representación de fracciones para que los estudiantes logren una mejor comprensión de dicho contenido escolar. Otro autor considera que estudiar las fracciones como partes de un todo no posibilita la comprensión correcta del concepto y crea una dependencia a partir de los objetos concretos y dificulta la noción de número racional y la formación de ideas abstractas. En este estudio indagamos sobre los conocimientos y las habilidades que tienen los estudiantes sobre las fracciones. Posteriormente, se trabajó en una secuencia de actividades que les permitió avanzar conceptualmente con ese contenido escolar. Objetivos del estudio: 1) Identificar habilidades y dificultades que los estudiantes tienen sobre fracciones. 2) Diseñar y aplicar una secuencia de actividades. 3) Verificar si los estudiantes avanzaron en sus conocimientos sobre fracciones. Marco teórico: modelo recursivo, en el que se considera que los números racionales se componen de constructos interrelacionados, el conocimiento de las fracciones se divide en sub-constructos. Este modelo se basa en el conocimiento integral del número racional y en las conexiones entre cada idea. Metodología: estudio de corte cualitativo, descriptivo y observacional. Participantes: una muestra de 100 estudiantes de primaria, y una profesora de sexto grado de primaria. El estudio principal se llevó a cabo con una sub-muestra de 10 estudiantes que se encontraban en quinto año de primaria. Etapas del estudio: 1) Diseño y aplicación de cuestionarios sobre fracciones, diseño y aplicación de entrevistas clínicas individuales y entrevista con profesora, 2) Diseño y aplicación de una secuencia de actividades, 3) Diseño y aplicación de un cuestionario final sobre fracciones. Los resultados de la primera etapa revelaron que los estudiantes tienen dificultades con algunas ideas del concepto de fracción (fracciones impropias, representación de fracciones en la recta numérica, equivalencia de fracciones, entre otras ideas). En lo referente a la secuencia de actividades, los estudiantes trabajaron con materiales conceptos de fracciones y lograron responder a las actividades planteadas exitosamente. En el cuestionario final, se observó que los estudiantes avanzaron en sus conocimientos sobre fracciones, aunque siguen presentando dificultades con conceptos básicos de fracciones como la representación de fracciones en la recta y equivalencia de fracciones.

ÍNDICE

| | |
|---|----|
| Capítulo I | 1 |
| Introducción | 1 |
| Capítulo II | 7 |
| Antecedentes de las fracciones | 7 |
| 2.1 Concepto de fracciones..... | 7 |
| 2.2 Modelos para la enseñanza de las fracciones | 7 |
| 2.2.1 El modelo parte-todo..... | 8 |
| 2.2.2 El modelo recursivo de Kieren | 9 |
| 2.3 Aporte de la literatura para la enseñanza y aprendizaje de las fracciones..... | 10 |
| 2.3.1 Modelos de corte conceptual | 10 |
| 2.3.2 Modelos de corte didáctico | 12 |
| 2.3.3 Modelos de corte psicológico..... | 17 |
| Capítulo III | 20 |
| Planes y programas de estudio SEP | 20 |
| 3.1 Planes y Programas de estudio de la Secretaría de Educación Pública del 2011... 20 | |
| 3.1.2 Propósitos del estudio de las Matemáticas para la Educación Básica..... | 21 |
| 3.2 Planes y Programas de estudio de la Secretaría de Educación Pública del 2017... 23 | |
| 3.2.1 Pensamiento Matemático..... | 23 |
| 3.2.2 Matemáticas en la educación básica..... | 24 |
| 3.3 Reflexión sobre el tratamiento de los contenidos en los programas de estudio de la SEP..... | 27 |
| Capítulo IV | 28 |
| Marco teórico | 28 |
| 4.1 El modelo recursivo de Kieren..... | 28 |
| 4.2 Consideraciones sobre el modelo de Kieren | 32 |
| 4.3 Relevancia del modelo recursivo de Kieren en esta investigación | 33 |
| 4.4 Aportación del modelo recursivo de Kieren para el entendimiento del campo de los números racionales | 33 |
| Capítulo V | 34 |
| Metodología | 34 |
| 5.1 Tipo de estudio..... | 34 |
| 5.2 Corte del estudio | 34 |
| 5.3 Participantes | 34 |
| 5.4 Etapas del estudio..... | 35 |
| 5.5 Instrumentos | 38 |

| | |
|--|-----------|
| 5.5.1 Cuestionario inicial de fracciones..... | 38 |
| 5.5.2 Entrevista clínica individual..... | 41 |
| 5.5.3 Entrevista con la profesora..... | 43 |
| 5.5.4 Plan de actividades de enseñanza de las fracciones..... | 44 |
| 5.5.5 Cuestionario final..... | 46 |
| Capítulo VI..... | 47 |
| Resultados de la primera etapa del estudio..... | 47 |
| 6.1 Diseño de los instrumentos..... | 47 |
| 6.1.2 Diseño de las entrevistas clínicas piagetianas..... | 49 |
| 6.1.3 Diseño de la entrevista semiestructurada..... | 51 |
| 6.2 Aplicación de los instrumentos..... | 52 |
| 6.2.1 Aplicación del cuestionario inicial de fracciones..... | 52 |
| 6.2.2 Aplicación de las entrevistas clínicas piagetianas..... | 53 |
| 6.2.3 Entrevista con la profesora..... | 53 |
| 6.3 Análisis de los datos obtenidos en la primera etapa del estudio..... | 54 |
| 6.3.1 Análisis de los datos del cuestionario inicial de fracciones..... | 54 |
| 6.3.2 Consideraciones sobre los niveles de conceptualización matemática de los estudiantes..... | 55 |
| 6.3.3 Análisis de resultados a partir de las estrategias de resolución de problemas..... | 67 |
| 6.3.4 Consideraciones sobre las estrategias de resolución de problemas de los estudiantes..... | 74 |
| 6.3.5 Análisis de las entrevistas clínicas piagetianas..... | 75 |
| 6.3.6 Análisis de la entrevista con la profesora..... | 79 |
| 6.3.6.1 Categoría 1.- Historia de vida relacionada con la elección de su profesión... .. | 80 |
| 6.3.6.2 Categoría 2.- Rescate de experiencia docente..... | 80 |
| 6.3.6.3 Categoría 3.- Fracciones en el libro de desafíos matemáticos de sexto..... | 80 |
| 6.3.6.4 Categoría 4.- Materiales utilizados..... | 81 |
| 6.3.6.5 Categoría 5.- Evaluación de los conocimientos de fracciones..... | 82 |
| 6.3.6.6 Consideraciones sobre la entrevista a la profesora..... | 82 |
| Capítulo VII..... | 84 |
| Resultados de la segunda etapa del estudio..... | 84 |
| 7.1 Diseño de la secuencia de actividades..... | 84 |
| 7.1.1 Actividades con modelos de área..... | 85 |
| 7.1.2 Actividades con modelos de conjunto..... | 86 |
| 7.1.3 Actividades con un modelo lineal..... | 87 |
| 7.2 Descripción de la secuencia de actividades..... | 89 |
| 7.2.1 Trabajo con lápiz y papel..... | 93 |

| | |
|--|-----|
| 7.2.3 Modelos de conjunto..... | 95 |
| 7.2.4 Modelos lineales | 97 |
| 7.3 Consideraciones finales sobre el trabajo con la secuencia de actividades | 99 |
| Capítulo VIII | 100 |
| Tercera etapa del estudio: Cuestionario final | 100 |
| 8.1 Diseño del cuestionario final de fracciones..... | 100 |
| 8.2 Descripción del cuestionario final de fracciones | 101 |
| 8.3 Aplicación del cuestionario final de fracciones..... | 101 |
| 8.4.1 Niveles de conceptualización matemática..... | 102 |
| 8.4.2 Estrategias de resolución de problemas | 107 |
| 8.5 Consideraciones finales sobre el cuestionario final de fracciones | 112 |
| Capítulo IX | 113 |
| Conclusiones | 113 |
| 9.1 Resultados generales..... | 113 |
| 9.1.1 Resultados de la primera etapa | 114 |
| 9.1.2 Resultados de la segunda etapa..... | 115 |
| 9.1.3 Resultados de la tercera etapa | 115 |
| 9.2 Conclusiones..... | 116 |
| 9.2.1 Conclusiones de la primera etapa del estudio | 116 |
| 9.2.2 Conclusiones de la segunda etapa del estudio | 117 |
| 9.2.3 Conclusiones de la tercera etapa del estudio..... | 118 |
| Referencias bibliográficas | 119 |
| Anexos | 124 |
| Anexo 1 | 125 |
| Cuestionario inicial de fracciones | 125 |
| Anexo 2..... | 137 |
| Entrevista semiestructurada | 137 |
| Anexo 3..... | 143 |
| Secuencia de actividades..... | 143 |
| Anexo 4..... | 155 |
| Cuestionario final | 155 |

LISTA DE TABLAS

| | | |
|------------|---|----|
| Tabla n 1 | Ejemplo de los bloques temáticos y sus elementos | 22 |
| Tabla n 2 | Ideas matemáticas trabajadas en el cuestionario de fracciones | 39 |
| Tabla n 3 | Ideas matemáticas exploradas en el cuestionario de fracciones | 48 |
| Tabla n 4 | Ejemplo de un guion para la entrevista clínica piagetiana | 50 |
| Tabla n 5 | Porcentaje de respuestas por nivel de conceptualización matemática | 55 |
| Tabla n 6 | Cuadro comparativo de respuestas por nivel de conceptualización matemática | 56 |
| Tabla n 7 | Niveles de conceptualización matemática por idea: entero y mitad | 60 |
| Tabla n 8 | Niveles de conceptualización matemática por idea: Fraccionamiento en cantidad continua | 61 |
| Tabla n 9 | Niveles de conceptualización matemática por idea: Fraccionamiento en cantidad discreta | 62 |
| Tabla n 10 | Niveles de conceptualización matemática por idea: Equivalencia de fracciones | 63 |
| Tabla n 11 | Niveles de conceptualización matemática por idea: Representación de fracciones en la recta numérica y no numérica | 64 |
| Tabla n 12 | Niveles de conceptualización matemática por idea: Fracción como razón | 65 |
| Tabla n 13 | Niveles de conceptualización matemática por idea: Proporcionalidad geométrica y aritmética | 66 |
| Tabla n 14 | Estrategias de resolución de problemas por idea matemática: Idea de entero y mitad | 67 |
| Tabla n 15 | Estrategias de resolución de problemas por idea matemática: Fraccionamiento en cantidad continua | 68 |

| | | |
|------------|--|-----|
| Tabla n 16 | Estrategias de resolución de problemas por idea matemática: Fraccionamiento en cantidad discreta | 69 |
| Tabla n 17 | Estrategias de resolución de problemas por idea matemática: Equivalencia de fracciones | 70 |
| Tabla n 18 | Estrategias de resolución de problemas por idea matemática: Representación de fracciones en la recta numérica y no numérica | 71 |
| Tabla n 19 | Estrategias de resolución de problemas por idea matemática: Fracción como razón | 72 |
| Tabla n 20 | Estrategias de resolución de problemas por idea matemática: Proporcionalidad geométrica y aritmética | 73 |
| Tabla n 21 | Fragmento de entrevista con estudiante: Ale | 77 |
| Tabla n 22 | Fragmento de entrevista con estudiante: Andy | 79 |
| Tabla n 23 | Descripción de las actividades de fraccionamiento en cantidad continua | 85 |
| Tabla n 24 | Descripción de las actividades de fraccionamiento en cantidad discreta | 87 |
| Tabla n 25 | Descripción de las actividades de representación de fracciones en la recta | 89 |
| Tabla n 26 | Descripción de las actividades realizadas por los estudiantes en fracciones en cantidad continua | 90 |
| Tabla n 27 | Descripción de las actividades con fracciones en cantidad discreta | 91 |
| Tabla n 28 | Descripción de las actividades de representación de fracciones en la recta | 92 |
| Tabla n 29 | Ideas matemáticas trabajadas en el cuestionario final de fracciones | 101 |
| Tabla n 30 | Cuadro comparativo por niveles de conceptualización matemática | 103 |
| Tabla n 31 | Comparación de resultados de los cuestionarios inicial y final | 104 |

| | | |
|------------|--|-----|
| Tabla n 32 | Comparación de cuestionarios inicial y final por estudiante: Andy y Kev | 105 |
| Tabla n 33 | Comparación de cuestionarios inicial y final por estudiante: Samy y Jack | 106 |
| Tabla n 34 | Comparación de estrategias de resolución de los cuestionarios inicial y final: Idea de entero y mitad | 107 |
| Tabla n 35 | Comparación de estrategias de resolución de los cuestionarios inicial y final: Fraccionamiento en cantidad continua | 108 |
| Tabla n 36 | Comparación de estrategias de resolución de los cuestionarios inicial y final: Fraccionamiento en cantidad discreta | 109 |
| Tabla n 37 | Comparación de estrategias de resolución de los cuestionarios inicial y final: Equivalencia de fracciones | 110 |
| Tabla n 38 | Comparación de estrategias de resolución de los cuestionarios inicial y final: Representación de fracciones en la recta numérica y no numérica | 111 |

LISTA DE FIGURAS

| | | |
|------------|--|----|
| Figura n 1 | Esquema del modelo recursivo de Kieren | 31 |
| Figura n 2 | Respuesta de un estudiante a la representación de fracciones en la recta numérica con fracciones impropias | 58 |
| Figura n 3 | Respuesta de estudiante a la pregunta de proporcionalidad geométrica | 59 |
| Figura n 4 | Respuesta de un estudiante a la primera pregunta del cuestionario inicial de fracciones | 76 |
| Figura n 5 | Respuesta de un estudiante a una pregunta del cuestionario inicial de fracciones | 78 |

| | | |
|-------------|--|-----|
| Figura n 6 | Trabajo con material y con lápiz y papel | 86 |
| Figura n 7 | Trabajo con fichas y con lápiz y papel | 87 |
| Figura n 8 | Actividades realizadas en la cuarta sesión de trabajo | 88 |
| Figura n 9 | Respuestas de un estudiante a las preguntas durante las actividades con modelos de área | 94 |
| Figura n 10 | Respuesta de un estudiante a una pregunta en la sesión con modelos de área | 94 |
| Figura n 11 | Respuesta de un estudiante a las preguntas sobre representación de fracciones y equivalencia con modelos de conjunto | 95 |
| Figura n 12 | Respuestas de un estudiante a una pregunta sobre representación de fracciones impropias en modelos de conjuntos | 96 |
| Figura n 13 | Representación de fracciones en la recta con dos unidades | 97 |
| Figura n 14 | Respuestas de una estudiante a la representación de fracciones en la recta | 98 |
| Figura n 15 | Preguntas del cuestionario final, en el que se muestran ejemplos de fracciones en cantidad continua | 100 |

Capítulo I

Introducción

En mi trayectoria tanto laboral como personal, muchos estudiantes, amigos y familiares se han acercado a mí en busca de apoyo en la materia de matemáticas y esa es una de las razones por las que me involucré en el trabajo en este tema. Cuando estudian temas de matemáticas, sin lugar a dudas, las fracciones aparecen, se presentan como un tema complicado, no solo para aprenderlo, también para enseñarlo. Las herramientas didácticas de las que dispongo en muchos sentidos se quedan cortas a las necesidades de los estudiantes. Los estudiantes requieren de enfoques específicos a sus necesidades y conocimientos. En la búsqueda por una forma de apoyarlos mejor, encontré en la Maestría en Desarrollo Educativo, en la línea de Matemática Educativa, una gran fuente de conocimientos que me podrían ayudar en mi labor docente. Veo como un compromiso con los estudiantes el enseñarles, no solo un procedimiento, sino la comprensión de los temas, para que ellos mismos puedan entender otros, encontrar otras soluciones e, incluso, requerir poco o nada de ayuda en los temas venideros.

Es en ese sentido, que la intención de este trabajo radica en la adquisición de conocimientos y herramientas que me permitan atender las problemáticas educativas que tienen los estudiantes en el tema de las fracciones, principalmente, en la comprensión de los conceptos básicos, tales como las fracciones impropias, las operaciones con fracciones y la representación de fracciones en cantidad continua, entre otras.

Esta investigación se centra en la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones que es un tema bastante amplio e importante en la educación matemática, en el que se presentan variadas dificultades para ser aprendido por los estudiantes. En la educación primaria, aproximadamente en el tercero y cuarto grados, los estudiantes inician su enseñanza de fracciones. El modelo que se utiliza regularmente para enseñar fracciones es el modelo parte-todo. En dicho modelo se consideran las fracciones en la forma a/b , donde un entero o unidad se divide en 'b' partes de las que se toman 'a' partes. El simbolismo a/b tiene un significado restricto, la fracción

es vista como una partición, como la conjugación de dos acciones: dividir/tomar, dividir/comer, dividir/pintar. Derivado de este modelo, los estudiantes presentan dificultades para comprender los conceptos de fracciones enseñados en primaria, lo que impide que comprendan nuevos conceptos en los siguientes niveles educativos.

Butto (2013) menciona que los estudiantes cometen errores sistemáticos procedentes de la metáfora de fracción como parte-todo, como en el caso de las fracciones impropias. El uso de las fracciones como partes de un todo no posibilita el entendimiento adecuado del concepto y crea una dependencia con los objetos concretos. Estudiar una fracción como algo que necesariamente está contenido dentro de un entero, limita el tipo de situaciones en las que se pueden utilizar las fracciones. El modelo parte-todo también dificulta la noción de número racional y obstaculiza la formación de ideas abstractas.

Aunado a los problemas antes mencionados, se muestran los resultados en matemáticas que los estudiantes mexicanos tienen respecto a la prueba PISA (2012). En ella se muestra que,

- 55% de los estudiantes mexicanos no alcanzan el nivel 2 de competencias básico en matemáticas,
- menos del 1% alcanzan el nivel 5 y 6, los más altos, los estudiantes mexicanos de más alto rendimiento obtienen el mismo puntaje que un alumno promedio en Japón,
- en general, hay una mejora en los puntajes del estudio de pisa 2003 y el de 2012,
- en México hay mayor cobertura de la educación que en 2003, pero sigue siendo menor que al de la mayoría de los países participantes en el estudio (90%),
- los estudiantes muestran motivación por aprender, pero manifiestan ansiedad hacia las matemáticas.

El aumento en la cobertura de la educación puede explicar por qué los estudiantes presentan mejores puntajes que en la prueba pasada. Sin embargo, dicha cobertura

no es suficiente y la mejora en los puntajes no es tan significativa en comparación con otros países similares en condiciones a México. A este paso, llevaría mucho tiempo alcanzar los niveles actuales de países más desarrollados.

Diversos autores han trabajado el tema de fracciones con la intención de brindar alternativas para la enseñanza y el aprendizaje. Por ejemplo, Figueras (1988), quien estudió la problemática de la enseñanza y aprendizaje de los números racionales. Aplicó secuencias didácticas para la formación de enlaces entre imágenes mentales y los significados de los estudiantes. El trabajo con los estudiantes mostró la dificultad que representa enseñar fracciones, porque no se alcanzaron los logros esperados.

Llinares y Sánchez (1997), analizaron la comprensión de los contenidos matemáticos escolares en estudiantes para profesores de primaria. Encontraron que el significado asociado a los símbolos matemáticos procede en muchas ocasiones del nivel de formalización matemática y está vinculado parcialmente al aspecto simbólico y al manejo sintáctico.

Ávila (2006) analizó el conocimiento de fracciones desarrollado en las prácticas cotidianas. Entrevistó a 36 personas adultas con escasa o nula escolaridad. Su trabajo la llevó a considerar que la asistencia a la escuela no es factor esencial en el conocimiento que desarrollan las personas sobre el tema. Además, señala que los procesos de aprendizaje formal deberían vincularse con la experiencia previa y sustentarse en los saberes construidos en dicha experiencia.

Block (2008) trabajó con entrevistas individuales y secuencias didácticas. Llegó a la conclusión de que los estudiantes tienen un nivel bajo de apropiación de las fracciones como medida, y conocimiento intuitivo sobre las razones, para resolver solo problemas simples. Con las entrevistas encontró que al favorecer un trabajo con razones se favorece tanto ese concepto como el de fracciones, al vincular fracciones con su equivalente de razón.

Perera y Valdemoros (2009) diseñaron una enseñanza experimental con estudiantes de cuarto año en situaciones de la vida real. Aplicaron cuestionarios y entrevistas. Encontraron que los estudiantes contaban con escasos conocimientos

intuitivos respecto a las nociones de fracción. Los estudiantes no reconocieron el todo como divisible en los problemas de reparto o partición. Con las sesiones de trabajo se favoreció la noción de fracción y de algunos de sus significados.

Butto (2013) estudió las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de fracciones. Planteó su investigación en tres etapas. Aplicó un cuestionario inicial en la primera etapa, una secuencia didáctica en lápiz y papel y en recursos interactivos para la segunda etapa y, en la tercera, un cuestionario final. Considera que con su trabajo hubo un avance conceptual en los estudiantes respecto a las fracciones.

Cortina Zúñiga y Visnovska (2013) considera inadecuado usar la equipartición como el contexto más favorable para apoyar el desarrollo inicial de nociones fraccionarias en los estudiantes y lo mira como un obstáculo didáctico. Con base en el análisis fenomenológico de Freudenthal (citado en Cortina Zúñiga y Visnovska, 2013) y el conceptual de Thompson y Saldanha (citado en Cortina Zúñiga y Visnovska, 2013) sobre el concepto fracciones, explica por qué la conjetura puede ser cierta. Su trabajo intenta contribuir a la búsqueda de vías didácticas alternativas sobre fracciones, que ayude a que los estudiantes entiendan el concepto.

Objetivo del estudio: determinar el conocimiento de fracciones que tienen los estudiantes de quinto grado de primaria, para desarrollar un plan de actividades que les permita avanzar conceptualmente en dicho tema y analizar si el plan de actividades es viable para lograr dicho avance.

Marco teórico: referido al modelo recursivo de Kieren (1980), este autor considera que los números racionales se componen de constructos interrelacionados y el conocimiento de las fracciones se divide en sub-constructos. Este autor propone un modelo que se basa en el conocimiento integral del número racional y en las conexiones entre cada idea. El modelo recursivo considera que la instrucción requiere dirigirse hacia los diferentes componentes del constructo de número racional. Además, tal instrucción debe considerar las relaciones entre sus componentes. Para comprender mejor los racionales, es importante conocer los diferentes tratamientos que se les da, las diferentes propuestas para trabajar estas ideas, así como sus usos en distintos contextos.

Metodología: el estudio es de tipo explicativo descriptivo porque se pretende describir un fenómeno y las condiciones en las que se presenta. El corte del estudio es mixto porque utiliza datos cualitativos y cuantitativos. Se utilizó un “diseño anidado concurrente de varios niveles” (DIACNIV) (Hernández Sampieri et al. 2014, p. 564). En este tipo de diseños se pueden obtener datos cualitativos y cuantitativos, en diferentes niveles, con análisis que varían de uno a otro. Participantes: una muestra total de 30 estudiantes de cuarto, quinto y sexto de primaria y una profesora de sexto año, la submuestra se compone de 10 estudiantes de quinto grado al inicio del estudio, que fueron los participantes principales de esta investigación. Etapas del estudio: primera etapa. Diseño y aplicación de un cuestionario inicial de fracciones a la muestra total de estudiantes, así como aplicación de entrevistas clínicas piagetianas a 5 estudiantes de la submuestra. Diseño y aplicación de entrevista semiestructurada a profesora de sexto año. Segunda etapa. Diseño y aplicación de un plan de actividades que permitiera a los estudiantes avanzar conceptualmente en los temas básicos de fracciones como son la relación parte-parte y relación parte-todo, fraccionamiento en cantidad continua, fraccionamiento en cantidad discreta y la representación de las fracciones en la recta numérica. Tercera etapa. Diseño y aplicación de un cuestionario final de fracciones, que abordó los temas trabajados en la segunda etapa y con preguntas similares a las del primer cuestionario y a las del plan de actividades. Instrumentos: cuestionario inicial de fracciones, entrevistas clínicas piagetianas, entrevista semiestructurada con la profesora, plan de actividades dividido en modelos de área, de conjuntos y lineales y cuestionario final de fracciones.

Esta tesis se presenta organizada en nueve capítulos. El primero es la “Introducción”, el segundo es el referido a los “Antecedentes del estudio: El concepto de fracciones”, corresponde a una revisión de la literatura del estudio sobre el concepto de fracción; el tercero “Planes y programas de estudio SEP”, que abarca lo referente a las fracciones en el plan y programas de estudio de la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2011, 2016). El cuarto capítulo es “Marco teórico”, donde se describe el modelo recursivo de Kieren (1980) y su importancia en este estudio. El quinto capítulo es “Metodología”, que explica los instrumentos y procedimientos

utilizados en esta investigación. El sexto es sobre los “Resultados de la primera etapa del estudio”, en el que se describe el análisis realizado a los datos obtenidos en la primera etapa del estudio a partir de los instrumentos utilizados, que fueron el cuestionario inicial de fracciones, las entrevistas clínicas piagetianas y la entrevista semiestructurada a la profesora. el séptimo capítulo es el referido a los “Resultados de la segunda etapa del estudio”, que explica el diseño y aplicación del plan de actividades con estudiantes de primaria. El octavo capítulo se denomina “Tercera etapa del estudio: Cuestionario final”, en este, se detalla cómo se realizó el diseño y la aplicación del cuestionario final de fracciones a los estudiantes participantes del estudio principal, así como el análisis de los resultados al compararlos con los resultados del cuestionario inicial de fracciones. Por último, el noveno capítulo “Conclusiones”, que presenta los resultados generales por etapas, así como las conclusiones a las que se llegó en cada etapa del estudio.

En este capítulo se presentó el problema de investigación de esta tesis, los objetivos del estudio, el marco teórico, la metodología y una breve descripción de los capítulos de la tesis. El capítulo II contiene los antecedentes del estudio sobre las fracciones, en el que se describe el concepto de fracciones y los modelos de enseñanza de las fracciones. También se describen los aportes de la literatura para la enseñanza y aprendizaje de las fracciones divididos en los modelos de corte conceptual, didáctico y psicológico.

Capítulo II

Antecedentes de las fracciones

En este capítulo se describen los antecedentes del estudio correspondientes al concepto de fracción. Se inicia con la descripción del concepto de fracción y los modelos para la enseñanza de las fracciones. Posteriormente, se revisan los modelos conceptual parte-todo y el modelo de Kieren. Finalmente, se mencionan aportaciones de la literatura sobre la enseñanza y el aprendizaje de fracciones, divididas en tres aspectos: de corte conceptual, didáctico y psicológico.

2.1 Concepto de fracciones

Castro y Torralbo (2001) definen a las fracciones como un “par ordenado de números enteros con la condición de que el segundo número sea un entero” (p 287)”. La expresión que lo representa es $\frac{a}{b}$ y ‘a’ debe ser diferente a cero. Aquí ‘a’ es el numerador y ‘b’ es el denominador. Estos autores consideran que las fracciones pueden representar objetos en cantidades continuas o discretas, es decir, una figura dividida en partes o un conjunto de figuras.

Otros tratamientos a las fracciones son los que expresan a la fracción como una medida o como un operador, también como un cociente de enteros y como una razón.

2.2 Modelos para la enseñanza de las fracciones

La enseñanza de las fracciones se apoya en algunos modelos para abordar las fracciones. Se considera pertinente describir dichos modelos, pues, en esta investigación, son utilizados para abordar los conceptos de fracciones propuestos. Estos modelos pueden ser del tipo continuo o discreto y son:

1. Modelo lineal. De acuerdo a Castro y Torralbo (2001), estos modelos son del tipo continuo y en este se representan puntos en una recta.
2. Modelo de área. De acuerdo a Castro y Torralbo (2001), en este tipo de modelo, también se representan cantidades continuas.

3. Modelos de conjuntos. De acuerdo a Castro y Torralbo (2001), en este tipo de modelos, varios elementos similares forman un conjunto y pueden tratarse como las partes del todo. Este tipo de modelos son discretos.

Para Castro y Torralbo (2001), estos modelos se enseñan de forma separada y no como conceptos de la misma naturaleza. Los autores mencionan que para que exista un entendimiento apropiado de dichos conceptos, se deben enseñar sus propiedades y cómo se interconectan. De esta forma, se puede identificar en qué situaciones se utiliza cada uno y por qué. Fazio y Siegler (2011) establecen que se requiere de una comprensión amplia de los conceptos de fracciones para poder utilizar las representaciones de fracciones y conectar los conceptos a estas. Consideran que cada representación sirve para una situación en concreto. Dichos autores consideran, por ejemplo, que la recta numérica “puede ayudar a los estudiantes a enfocarse en la magnitud de las fracciones, mientras los modelos de área pueden ilustrar parcial/totalmente la representación de fracciones” (p. 22). No pretenden decir que hay modelos lineales por un lado y modelos de área por el otro. Más bien, se refieren a lograr que los estudiantes comprendan que existe una conexión entre esos dos modelos y con ello comprender mejor las dificultades de los estudiantes al estudiar fracciones con uno y otro modelo.

2.2.1 El modelo parte-todo

En el modelo parte-todo, Castro y Torralbo (2001) consideran que la representación de una fracción $\frac{a}{b}$ representa una unidad que se divide en ‘b’ partes iguales, de las que se toman ‘a’ partes. De tal forma que, en las fracciones, lo que se toma en cuenta son las partes y no la unidad. En este modelo, comúnmente se utilizan representaciones de las fracciones con objetos cotidianos como pizzas, pasteles o galletas.

De acuerdo a Ruiz Cruz (2013), los primeros acercamientos de los estudiantes a las fracciones son a partir de este modelo. Este autor considera que existen varias formas de interpretar a las fracciones, como el concepto de medida, de razón o

porcentaje, sin embargo, el modelo más utilizado en la escuela es el modelo parte-todo, que considera fácil de enseñar y de entender.

Sin embargo, diversos estudios (Escolano y Gairín, 2005; Butto, 2013; Cortina; Zúñiga y Visnovska, 2013) señalan que el modelo parte-todo genera un obstáculo didáctico, que no permite el entendimiento correcto de las fracciones, porque impide que se comprendan conceptos como la comparación de fracciones, equivalencia, fracciones impropias, entre otros. Los estudiantes tienden a familiarizarse con las representaciones de las fracciones con objetos que representan a la fracción en cantidad continua, lo que dificulta que identifiquen la unidad en otras representaciones como en la representación en cantidad discreta o en la representación de fracciones en la recta.

2.2.2 El modelo recursivo de Kieren

Kieren (1976, citado en Charalambous Y Pitta-Pantazi, 2007) fue el primero en cuestionar si las fracciones se componían de un solo concepto y recomendó conceptualizar las fracciones como una sucesión de constructos interrelacionados. Kieren (1993, citado en Butto, 2013) propone un modelo que se basa en el conocimiento integral del número racional, con la intención de comprender cada idea y cómo se interconectan. Considera que es importante tener la información de las variables y relaciones que intervienen en el conocimiento matemático de este campo.

En el modelo de Kieren, los conceptos matemáticos de los números racionales son llamados constructos, el conocimiento de las fracciones se divide en sub-constructos. En su trabajo, identifica como sub-constructos la relación parte-todo y parte-parte, la fracción como cociente, razón, operador y medida.

Mientras algunos conceptos son manejados por separado, el modelo Recursivo pretende integrar todos los conceptos y así poder comprender de manera global el sentido de los números racionales, porque en el modelo parte-todo, los diferentes conceptos de las fracciones se enseñan por separado, lo que puede causar dificultades con otras ideas y conceptos más complejos de los números racionales.

2.3 Aporte de la literatura para la enseñanza y aprendizaje de las fracciones

Los aportes de la literatura para la enseñanza de las fracciones se pueden dividir en tres modelos, los modelos de corte conceptual, didáctico y psicológico. A continuación, se presentan los aportes de cada modelo.

2.3.1 Modelos de corte conceptual

En este apartado se incluyen autores como Figueras (1988), que estudió la problemática de la enseñanza y aprendizaje de los números racionales. En su investigación, se trató de identificar el concepto de número racional y sus diversos significados. También buscó las dificultades que los estudiantes presentaban al aprender el concepto. Además, diseñó y aplicó secuencias didácticas para la formación de enlaces entre imágenes mentales y los significados de los estudiantes. Su trabajo mostró que los logros alcanzados por los estudiantes en el trabajo con el texto no fueron los esperados y que los estudiantes tenían poca apropiación de los conceptos matemáticos sobre fracciones.

Llinares y Sánchez (1997), analizaron la comprensión de los contenidos matemáticos escolares en estudiantes para profesores de primaria. Describen las dificultades que tuvieron los estudiantes para relacionar ciertos conceptos con fracciones equivalentes. Encontraron que, la comprensión de los estudiantes a profesores de los racionales está relacionado a su nivel de formalización matemática. Si no se desarrolla una comprensión recursiva sino solamente simbólica, el aprendizaje se queda en un nivel algorítmico, que impide la apropiación de diferentes modos de representación. Los profesores deben conocer diferentes modos de representación de los racionales para presentar a los estudiantes información útil de acuerdo a cada representación.

Fernández y Llinares (2010) estudiaron la relación entre el pensamiento aditivo y el multiplicativo para desarrollar el significado de razón en estudiantes de primaria. trabajaron con 197 estudiantes de primaria de clase media y alta. Elaboraron un cuestionario de estructura aditiva y multiplicativa, con 12 problemas aditivos, proporcionales y distractores. Categorizaron las estrategias que los estudiantes utilizaron y analizaron estadísticamente las relaciones entre las estrategias. El

análisis de las respuestas mostró que los estudiantes utilizaban más estrategias aditivas y pocas las adecuadas. Los autores consideran que cuando los estudiantes no encuentran relaciones aditivas, tienen dificultad para encontrar la relación multiplicativa. De acuerdo a lo encontrado en su estudio, los autores recomiendan que el currículo plantee situaciones proporcionales y no proporcionales para que los estudiantes puedan discriminar entre esas dos situaciones.

Brousseau, Brousseau y Warfield (2014) realizaron actividades de enseñanza de racionales que utilizaron como modelo la teoría de situaciones que considera que los estudiantes pueden aprender mejor en situaciones en las que ellos puedan intervenir, al descubrir conceptos a partir de sus conocimientos previos. Según esta teoría, al promover el uso de objetos que representen conceptos matemáticos manipulables por los estudiantes, los conceptos se comprenden mejor. Las actividades se componen de 65 sesiones sobre números racionales y decimales, con 15 módulos que representan los temas revisados. El primer tema trabajado fue la fracción como medida. Los estudiantes debían encontrar una forma de medir el grosor de hojas de papel, para ello debían inventar un método para poder diferenciar entre distintos tipos de papel. Los estudiantes también debían compartir y comparar sus estrategias para determinar los métodos más acertados. Una vez realizado esto, los estudiantes debían medir grosores de papeles ficticios. Los estudiantes debían llegar al uso de la forma a/b para comparar el grosor de los papeles. Los resultados mostraron que después de estas actividades, los estudiantes podían medir grosores de hojas de papel, escribir el correspondiente par ordenado de números y rechazar los papeles que no correspondían a un par dado de ellos. Varios también eran capaces de analizar tablas de medidas y señalar inconsistencias, haciendo uso implícito de la proporcionalidad, los demás parecían entender a aquellos que lo hacían. Además, los estudiantes sabían cómo encontrar pares equivalentes y comparar el grosor de hojas de papel.

En la investigación de Campos y Llinares (2015), se buscó identificar la forma en que los estudiantes de primaria usaban las acciones de dividir e iterar en la construcción del concepto de fracción impropia en un contexto continuo. Se les aplicó un examen en el que debían representar fracciones impropias. Los resultados

mostraron que a los estudiantes se les dificulta representar fracciones impropias a partir de iterar fracciones unitarias por la relación parte-todo que tienen construida de las fracciones propias. Encontrar la relación entre la fracción unitaria y el todo no es suficiente para la construcción de la unidad a partir de la iteración de la fracción. La representación de fracciones impropias a partir de iterar la fracción tampoco es una tarea sencilla. Consideran que existen “dos saltos cognitivos en la construcción del concepto de fracción impropia; la reconstrucción y representación del todo y la representación de fracciones impropias a partir de la fracción unitaria” (p. 113).

2.3.2 Modelos de corte didáctico

En este apartado se encuentran autores como Escolano y Gairín (2005), quienes realizaron una propuesta didáctica que evitó el uso del modelo parte-todo. Trabajaron con estudiantes de cuarto, quinto y sexto grado de primaria con actividades que les ayudaran en la construcción del significado de número racional y en la construcción de ideas abstractas. Los modelos de aprendizaje utilizados fueron planteados para permitir a los estudiantes construir sus propios conocimientos. Utilizaron modelos de fracción como medida, cociente y razón. La intención era que los estudiantes utilizaran diferentes conceptos de fracciones, que les permitieran utilizar aspectos diferentes de los números racionales. Para las sesiones, se partía de situaciones problemáticas planteadas a los estudiantes. Los estudiantes trabajaron primero solos y después mostraron sus resultados y los compararon con el grupo, de esta forma se promovió la reflexión colectiva. Los resultados mostraron que los estudiantes mejoraron su conocimiento de la fracción al utilizar diferentes sistemas de representación. Los estudiantes podían representar fracciones simbólicamente, utilizar equivalencias de fracciones para resolver problemas de relaciones y operaciones con fracciones. Con su trabajo, mostraron que se pueden enseñar fracciones sin la necesidad del uso del modelo parte-todo y su propuesta de trabajo eliminó obstáculos didácticos propiciados por la utilización del modelo parte-todo.

Fuentes (2010) trabajó con estudiantes de quinto grado de primaria con actividades con una base constructivista, que utilizaban las fracciones como signos, con las que

se pudiera ordenar y operar. Utilizó un grupo de control para comparar los resultados. El estudio mostró que los estudiantes que participaron en las actividades tuvieron una diferencia significativa en el nivel de logro de la que tenía el grupo de control. Lograron avanzar en la representación de fracciones, en la comparación y en la ordenación de fracciones. A partir de su estudio, encontró que utilizar actividades con base constructivista permite que se desarrolle el nivel de conocimiento de las fracciones en los estudiantes.

En el artículo de Wilkerson, Bryan y Curry (2012), se presenta una propuesta de enseñanza de fracciones en la que los denominadores fueron factores de 12. Se utilizó un modelo de barras de chocolate que se componía de doce piezas, con el cual, los estudiantes exploraban las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{12}$, así como el entero o unidad y fracciones equivalentes. Las actividades fueron atractivas para los estudiantes y permitieron que desarrollaran sus ideas acerca de equivalencia de fracciones, la relación parte-todo y parte-parte, así como encontrar relaciones con modelos diferentes usados con anterioridad.

Por otra parte, Ruiz Cruz (2013) realizó una propuesta didáctica que trabajó con la relación parte-todo y la fracción como cociente. Participaron estudiantes de sexto grado de primaria. Utilizó guías de clase y actividades lúdicas. Para medir sus conocimientos, aplicó un examen después de las actividades. Considera que su trabajo permitió que los estudiantes avanzaran en el conocimiento de fracciones, al utilizar la relación parte-todo como base para conocer las fracciones de manera intuitiva y así avanzar en conocimientos más complejos, como la fracción como cociente. Su propuesta facilita la comprensión de la fracción como parte-todo y cociente, además, permite conocer los ajustes que se deben hacer a dicha propuesta para mejorarla.

Vinogradova y Blaine (2013), proponen una actividad en la que se pueden ordenar y manipular fracciones. Los estudiantes realizan actividades de repartición equitativa y comparación de fracciones, así como la observación de patrones numéricos. Después de jugar, los estudiantes pueden analizar patrones numéricos, formular hipótesis y justificarlas. El juego es muy accesible y los estudiantes más

avanzados pueden ser desafiados a construir generalizaciones precisas y explicaciones sólidas para los patrones observados. Consideran que el juego puede servir en cualquier clase para revisar las estrategias de comparación de fracciones. De esta forma, se le puede dar al estudiante la oportunidad de pensar y darle sentido a las fracciones, así como motivarlos a hablar sobre fracciones. También da herramientas para poder razonar y generalizar. Los estudiantes menos participativos también son motivados a participar.

En su artículo, Tobias (2014) describe estrategias pedagógicas en las que se utilizan ejemplos de clases para profesores en formación. La instrucción se centra en que los futuros profesores conozcan más de un procedimiento para comparar fracciones a través de experiencias similares, para luego implementarlos en sus propias aulas. Se mostraron diferentes estrategias pedagógicas a profesores que pudieran implementar en sus clases. De esa forma, los profesores obtenían una amplia comprensión para razonar cuando comparaban fracciones. También les permitió desarrollar sus propias estrategias de razonamiento para pensar en números y no solo calcularlos. A partir de su trabajo, la autora considera que apoyar la comprensión de los estudiantes al proveerles diferentes estrategias como contextualizar, explicar, justificar y conectar, les permite reconocer cómo razonar cuando comparan fracciones.

En el trabajo de Zhang, Clements y Ellerton (2014) se investigó la comprensión de fracciones unitarias como $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$ de 40 estudiantes de quinto grado, representadas a través de diferentes modelos. Además, se diseñó una intervención docente para la enseñanza y aprendizaje de fracciones, para mejorar su comprensión de los conceptos. El propósito del estudio era investigar el efecto de la intervención docente en la mejora de la comprensión de fracciones de los estudiantes. Para el diseño de la investigación se utilizó un pre test, un post test de intervención, y un test de retención, utilizando un grupo de control, que después recibió la misma intervención. Estos instrumentos fueron diseñados principalmente para evaluar la comprensión de los estudiantes sobre conceptos de fracciones unitarias, como parte-todo, cociente, medida y operador, asociadas con una variedad de modelos o representaciones visuales. Se observó que, en la etapa del

pre test, ambos grupos tenían puntos idénticos en rendimiento promedio. En la etapa de retención, ambos grupos una vez más, tenían casi idénticos puntos en rendimiento promedio. A pesar de la pequeña pérdida en la etapa post enseñanza/retención, los puntos medios en retención fueron más altos que en los puntos de la pre enseñanza. Consideran que su intervención mejoró el desempeño de los estudiantes en las pruebas, así como en su entendimiento conceptual de las fracciones. Además, mostró que los modelos de área para representar fracciones, podrían generar un entendimiento conceptual no balanceado sobre las fracciones en estudiantes de primaria.

Lewis, Gibbons, Kazemi y Lind (2015), describen cómo los profesores pueden usar problemas de evaluación formativa para obtener y entender las ideas de los estudiantes acerca del significado de las fracciones. Su trabajo se apoya en las respuestas de los estudiantes cuando se les pedía resolver problemas de compartir equitativamente y al preguntar lo que pensaban mientras respondían y compartir con la clase sus estrategias de resolución. Su trabajo apoyó el desarrollo y entendimiento del significado de las fracciones y el desarrollo de estrategias de partición, crear representaciones, nombrar cantidades fraccionarias y usar notación simbólica.

McCormick (2015) describe el trabajo que se realizó en una clase para profesores en pre-servicio de educación elemental (PSTs, por sus siglas en inglés). Se dieron tareas a los profesores que debían resolver. Además, se utilizaron vídeos en los que estudiantes de cuarto y quinto grado trabajaban con las mismas tareas que los profesores. Los PSTs fueron capaces de profundizar en su entendimiento de las fracciones. Este trabajo permitió modificar sus creencias de una manera positiva sobre las habilidades de los estudiantes para hacer matemáticas. El estudio permitió a los participantes comprender que sus estudiantes tienen una capacidad muy amplia para aprender matemáticas.

Morrow-Leong (2016) considera importante desarrollar la fluidez matemática. A través de evaluaciones que buscan “lo que está bien”, puede determinar los logros que los estudiantes obtienen y de esa forma, encontrar evidencia de lo que debe

hacer en las siguientes instrucciones. Al clasificar el trabajo del estudiante de acuerdo a las estrategias comunes en vez de revisar respuestas correctas e incorrectas, el profesor puede formar equipos de trabajo basados en cómo piensan los estudiantes acerca de un concepto matemático de fracciones.

Flynn (2017), considera importante “usar y conectar representaciones matemáticas” (p. 522), ya que ayuda a los estudiantes a comprender conceptos matemáticos y entender procedimientos de resolución de problemas. En fracciones, sirve para observar la relación entre la fracción y su unidad de referencia. Propone una actividad en la que se trabajan conceptos de fracciones en diferentes modelos de representación en contextos que les sean cercanos a los estudiantes. De acuerdo al autor, este tipo de enfoque de trabajo permite a los estudiantes darle sentido a las fracciones y a los números enteros. Además de ayudar a que los estudiantes desarrollen estrategias más eficientes y generalizables para resolver problemas que involucren fracciones.

King y Smith (2017) realizaron un estudio para trabajar conceptos de ciencias computacionales en el salón de clases. Diseñaron actividades que introdujeran a los estudiantes la idea de clasificación de algoritmos mientras les permitían comparar y ordenar fracciones. Consideran que entender diferentes algoritmos es útil para comprender otros conceptos de fracciones más avanzados. Con una actividad en la que los estudiantes deben clasificar fracciones, se comienza a desarrollar una base de conocimientos para prepararlos en el campo de los algoritmos de clasificación computacionales. Los resultados de su estudio mostraron que, al pensar en estrategias para clasificar y luego compartirlas en clase, los estudiantes lograban desarrollar estrategias para clasificar fracciones más grandes que un medio y más pequeñas que un medio. De acuerdo con los autores, esta actividad permite a los profesores introducir temas de ciencias computacionales en clase que mejoran las habilidades de pensamiento computacional y preparar mejor a los estudiantes para trabajos centrados en computación.

2.3.3 Modelos de corte psicológico

Ávila (2006) indagó sobre el conocimiento de fracciones desarrollado en las prácticas cotidianas. Utilizó entrevistas con personas adultas con escasa o nula escolaridad. Encontró que los conocimientos sobre fracciones de las personas entrevistadas no rebasaban el manejo de los medios, los cuartos y los medios cuartos (término cotidiano para referirse a los octavos). A partir de sus hallazgos, considera que las situaciones de medición son la fuente principal de los conocimientos sobre las fracciones y que la asistencia a la escuela no es factor esencial en el conocimiento que desarrollan las personas sobre fracciones. Menciona que las personas encuentran situaciones en las que deben medir y tienen que apoyarse necesariamente en las fracciones. La autora menciona que las fracciones tienen múltiples significados que derivan del tipo de situaciones a las que pueden asociarse en el mundo real. También considera que en el currículo de educación matemática para jóvenes y adultos, deberían vincularse la experiencia previa con el aprendizaje formal.

Block (2008) estudió el conocimiento sobre fracciones en estudiantes de primaria. Utilizó entrevistas y aplicó secuencias didácticas que permitieran a los participantes avanzar en su conocimiento sobre fracciones. Encontró que los estudiantes contaban con solo un nivel bajo de apropiación de las fracciones como medida, y conocimiento intuitivo sobre las razones, que permite solo resolver problemas simples. Considera que sus secuencias didácticas propiciaron la construcción de las fracciones a partir de las razones, pero dichas secuencias son muy complejas y se deben estudiar formas de articular los dos conceptos. Aunque el trabajo de Block permite observar el desarrollo de la idea de razón, acepta que es un tema complejo y que a su estudio le falta un mayor desarrollo para poder ser una herramienta útil para este y otros estudios posteriores.

Perera y Valdemoros (2009) estudiaron la construcción de la noción de fracción en estudiantes de cuarto grado de primaria, utilizaron un programa de enseñanza con actividades referidas a la vida real de los estudiantes. Para valorar los avances alcanzados por los estudiantes en el programa de enseñanza, se aplicaron dos

cuestionarios, uno antes y otro después de su implementación. También se seleccionó a tres participantes que fueron entrevistados para el estudio de casos, para conocer a fondo los procesos de aprendizaje de cada participante. Con el cuestionario inicial observaron que los estudiantes contaban con escasos conocimientos intuitivos respecto a las nociones de fracción. Las actividades propiciaron en ellos la construcción de la noción de fracción y el reconocimiento de algunos de sus significados (relación parte-todo, medida, cociente intuitivo y rudimentos de operador multiplicativo).

Butto (2013), realizó una investigación sobre aprendizaje de fracciones con estudiantes de 6° grado de primaria en dos ambientes, lápiz y papel y recursos interactivos. Los objetivos fueron describir las dificultades que los estudiantes tenían en el aprendizaje de fracciones, diseñar y aplicar una secuencia didáctica y verificar sus conocimientos después de la misma. Considera que el modelo parte-todo representa un obstáculo didáctico para que los estudiantes se apropien adecuadamente de los conceptos matemáticos y generen ideas abstractas adecuadas. Su propuesta de trabajo permitió que los estudiantes avanzaran en el conocimiento general de fracciones.

Cortina, Cardoso y Zúñiga (2012), reportaron los resultados de su investigación, que consistió en identificar el conocimiento que tienen los estudiantes de sexto grado de primaria sobre fracciones. Utilizaron un cuestionario diagnóstico aplicado a 298 estudiantes de sexto grado de primaria de escuelas privadas y públicas. Consideran que es importante detectar el conocimiento de los estudiantes para la toma de decisiones pedagógicas, así como comprender los logros que tienen los estudiantes en contenidos específicos. Entender la diversidad de conocimientos permite plantear estrategias de intervención que involucren a cada estudiante.

Cortina, Zúñiga y Visnovska (2013), exploraron la posibilidad de que sea inadecuado usar a la equipartición (similar al concepto parte-todo) como el contexto más favorable para apoyar el desarrollo inicial de conceptos de fracción en los estudiantes. Considera que los conocimientos que desarrollan los estudiantes como consecuencia de involucrarse en actividades basadas en la partición y repartición

equitativa de artículos alimentarios y otros objetos divisibles, constituyen obstáculos didácticos en el proceso de lograr una comprensión madura de las fracciones. Su trabajo promueve la revisión crítica del concepto de equipartición, que, a pesar de ser fundamental para el desarrollo matemático de los estudiantes, pocos logran comprenderlo adecuadamente. También intenta contribuir a la búsqueda de vías didácticas alternativas sobre fracciones, que ayuden a que los estudiantes entiendan el concepto.

Zhang, Clements y Ellerton (2015), investigaron sobre el conocimiento de fracciones de estudiantes de quinto grado de los Estados Unidos, en los que las fracciones les fueron enseñadas con modelos de área casi exclusivamente. Encontraron que, aunque los estudiantes lograban realizar tareas con esos modelos, muchos de ellos tenían problemas cuando se encontraban ante situaciones de fracciones que no usaran esos modelos. Consideran que es importante el uso de modelos alternativos de representación de fracciones para que los estudiantes logren una comprensión conceptual profunda de dicho tema.

A partir de los trabajos revisados, se puede comprobar la gran cantidad de investigación que existe en torno al tema de la enseñanza de las fracciones. Se hacen evidentes las dificultades que existen en enseñanza y aprendizaje de las fracciones y que los investigadores trabajan para avanzar en estos conocimientos. De igual forma, nos da un panorama para saber lo que se ha hecho en didáctica de fracciones que nos guía para realizar esta investigación, así como brindarnos una base de conocimiento que nos permitirá realizar mejor nuestra labor educativa. En este capítulo se presentaron los estudios referentes a didáctica de fracciones desde tres modelos: conceptual, didáctico y psicológico. En el siguiente capítulo se presenta lo referente a fracciones de sexto grado de primaria en los planes y programas de estudio de la Secretaría de Educación Pública.

Capítulo III

Planes y programas de estudio SEP

En este capítulo se hace una descripción sobre los Planes y Programas de la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2011, 2017), específicamente del programa de matemáticas y, en particular sobre las fracciones. Inicialmente, se mencionan los propósitos de la enseñanza de las fracciones y los aprendizajes esperados durante los cursos de quinto y sexto grado. En seguida, se menciona lo referente al programa de estudio de la Estudios de la Secretaria de Educación Pública (SEP, 2011). En la segunda parte se presentan los contenidos del programa de Estudios de la Secretaria de Educación Pública (SEP, 2017), Finalmente, se hace una reflexión sobre el tratamiento de los contenidos en los programas de estudio y en el libro gratuito de la SEP, de 5º grado de primaria.

3.1 Planes y Programas de estudio de la Secretaría de Educación Pública del 2011

En los Planes y Programas de estudio de la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2011), se mencionan una serie de elementos que describen la forma en que se enseñan las fracciones en la educación básica. A continuación, se presentan los elementos relevantes para la enseñanza de las matemáticas en quinto y sexto grado de primaria, principalmente sobre fracciones.

Los estándares de matemáticas, según los planes y programas de la SEP (2011), se organizan en:

1. Sentido numérico y pensamiento algebraico
2. Forma, espacio y medida
3. Manejo de la información
4. Actitud hacia el estudio de las matemáticas (p 63).

Los estudiantes deben de:

- Transitar del lenguaje cotidiano a un lenguaje matemático para explicar procedimientos y resultados.

- Ampliar y profundizar los conocimientos, de manera que se favorezca la comprensión y el uso eficiente de las herramientas matemáticas.
- Avanzar desde el requerimiento de ayuda al resolver problemas hacia el trabajo autónomo (SEP, 2011, p. 63).

Los Estándares Curriculares para los estudiantes de quinto y sexto corresponden a tres ejes temáticos, de acuerdo a las SEP (2011): “Sentido numérico y pensamiento algebraico, Forma, espacio y medida, y Manejo de la Información” (p. 63).

En el eje temático de sentido numérico y pensamiento algebraico, el estudiante:

- Resuelve problemas aditivos con números fraccionarios o decimales, empleando los algoritmos convencionales.
- Resuelve problemas que impliquen multiplicar o dividir números fraccionarios decimales entre números naturales, utilizando los algoritmos convencionales (SEP, 2011, p. 64).

3.1.2 Propósitos del estudio de las Matemáticas para la Educación Básica

De acuerdo a los planes y programas de estudio de sexto grado (SEP, 2011), se espera que los estudiantes:

- Desarrollen formas de pensar que les permitan formular conjeturas y procedimientos para resolver problemas, así como elaborar explicaciones para ciertos hechos numéricos o geométricos.
- Utilicen diferentes técnicas o recursos para hacer más eficientes los procedimientos de resolución.
- Muestren disposición hacia el estudio de la matemática, así como al trabajo autónomo y colaborativo (p. 61).

En el mismo programa de sexto (SEP, 2011), se menciona que, al estudiar matemáticas, en específico sobre fracciones, se espera que los estudiantes:

- Utilicen el cálculo mental, la estimación de resultados o las operaciones escritas con números naturales, así como la suma y resta con números fraccionarios y decimales para resolver problemas aditivos y multiplicativos...

- Identifiquen conjuntos de cantidades que varían o no proporcionalmente, calculen valores faltantes y porcentajes, y apliquen el factor constante de proporcionalidad (con números naturales) en casos sencillos (p. 62).

En el programa de sexto grado (SEP, 2011), se puede observar que la materia de matemáticas está organizada en tres niveles. El primero son los ejes, luego los temas y por último los contenidos. En educación primaria y secundaria se toman los ejes de Sentido numérico y pensamiento algebraico, Forma, espacio y medida, y Manejo de la información.

Para cada eje hay temas y secuencias de contenidos, en progresión de dificultad. Varios temas inician en primaria y terminan en secundaria. Esos temas son: “Números y sistemas de numeración, Problemas aditivos, Problemas multiplicativos, Figuras y cuerpos, Ubicación espacial, Medida, Proporcionalidad y funciones, y Análisis y representación de datos” (SEP, 2011, p. 74). Los aprendizajes esperados se agregan en la primera columna de cada bloque temático. Un ejemplo se puede observar en la siguiente tabla.

Tabla n 1
Ejemplo de los bloques temáticos y sus elementos (SEP, 2011, p. 77)

| COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente | | | |
|---|---|--|---|
| APRENDIZAJES ESPERADOS | EJES | | |
| | SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO | FORMA, ESPACIO Y MEDIDA | MANEJO DE LA INFORMACIÓN |
| <ul style="list-style-type: none"> • Calcula porcentajes e identifica distintas formas de representación (fracción común, decimal, %). | <p>NÚMEROS Y SISTEMAS DE NUMERACIÓN</p> <ul style="list-style-type: none"> • Ubicación de fracciones y decimales en la recta numérica en situaciones diversas. Por ejemplo, se quieren representar medios y la unidad está dividida en sextos, la unidad no está establecida, etcétera. <p>PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS</p> <ul style="list-style-type: none"> • Construcción de reglas prácticas para multiplicar rápidamente por 10, 100, 1 000, etcétera. | <p>FIGURAS Y CUERPOS</p> <ul style="list-style-type: none"> • Definición y distinción entre prismas y pirámides; su clasificación y la ubicación de sus alturas. | <p>PROPORCIONALIDAD Y FUNCIONES</p> <ul style="list-style-type: none"> • Resolución, mediante diferentes procedimientos, de problemas que impliquen la noción de porcentaje: aplicación de porcentajes, determinación, en casos sencillos, del porcentaje que representa una cantidad (10%, 20%, 50%, 75%); aplicación de porcentajes mayores que 100%. <p>ANÁLISIS Y REPRESENTACIÓN DE DATOS</p> <ul style="list-style-type: none"> • Lectura de datos, explícitos o implícitos, contenidos en diversos portadores para responder preguntas. |

En esta tabla se pueden observar los elementos que contiene el bloque temático II. Se puede observar que en los aprendizajes esperados están contempladas diferentes formas de representación de los números racionales.

En esta parte se revisó información referente a los planes y programas de estudio de la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2011) anterior a la utilizada en la actualidad. En los siguientes párrafos, se muestra la información de los planes y programas de la SEP (2017) que se utilizarán a partir del ciclo escolar 2018-19.

3.2 Planes y Programas de estudio de la Secretaría de Educación Pública del 2017

A partir del nuevo modelo educativo de la Secretaria de Educación Pública (SEP, 2017), se consideró revisar la información referida en los Planes y Programas de estudio. A continuación, se muestra la información referida a la educación matemática y a las fracciones, encontrada en el programa de sexto grado de primaria.

3.2.1 Pensamiento Matemático

En el nuevo modelo educativo, se adopta el campo formativo denominado pensamiento matemático. En este modelo, de acuerdo al libro de Aprendizajes clave para la educación integral (SEP, 2017), se denomina Pensamiento matemático “a la forma de razonar que utilizan los matemáticos profesionales para resolver problemas provenientes de diversos contextos, ya sea que surjan en la vida diaria, en las ciencias o en las propias matemáticas” (p. 214).

En el campo formativo Pensamiento Matemático, de acuerdo al nuevo modelo, los estudiantes desarrollarán “esa forma de razonar tanto lógica como no convencional... y que al hacerlo aprecien el valor de ese pensamiento, lo que ha de traducirse en actitudes y valores favorables hacia las matemáticas, su utilidad y su valor científico y cultural” (p. 214).

“En la educación básica, este campo formativo abarca la resolución de problemas que requieren el uso de conocimientos de aritmética, álgebra, geometría, estadística y probabilidad. Asimismo, mediante el trabajo individual y colaborativo en las actividades en clase se busca que los estudiantes utilicen el pensamiento matemático al formular explicaciones, aplicar métodos, poner en práctica algoritmos, desarrollar estrategias de generalización y particularización; pero sobre todo al afrontar la resolución de un problema hasta entonces desconocido para ellos. Además se busca

que comprendan la necesidad de justificar y argumentar sus planteamientos y la importancia de identificar patrones y relaciones como medio para encontrar la solución a un problema, y que en ese hacer intervenga también un componente afectivo y actitudinal que requiere que los estudiantes aprendan a escuchar a los demás, identifiquen el error como fuente de aprendizaje; se interesen, se involucren y persistan en encontrar la resolución a los problemas; ganen confianza en sí mismos y se convenzan de que las matemáticas son útiles e interesantes, no solo como contenido escolar, sino más allá de la escuela” (p. 214).

En el siguiente extracto se muestra la importancia que toma en el nuevo modelo (SEP, 2017), el uso del pensamiento matemático en la educación:

Esta materia es incluida en el nuevo modelo educativo como parte de la formación en matemáticas. En los siguientes párrafos se hace referencia a la información contenida en los Planes y Programas de la SEP (2017) referentes a las fracciones.

3.2.2 Matemáticas en la educación básica

Como se menciona en los planes y programas de la SEP (2017), “las matemáticas son un conjunto de conceptos, métodos y técnicas mediante los cuales es posible analizar fenómenos y situaciones en contextos diversos; interpretar y procesar información, tanto cuantitativa como cualitativa; identificar patrones y regularidades, así como plantear y resolver problemas” (p. 217).

Los propósitos generales de la educación matemática según el plan y programas de la SEP (2017) son:

1. Concebir las matemáticas como una construcción social en donde se formulan y argumentan hechos y procedimientos matemáticos.
2. Adquirir actitudes positivas y críticas hacia las matemáticas: desarrollar confianza en sus propias capacidades y perseverancia al enfrentarse a problemas; disposición para el trabajo colaborativo y autónomo; interés por emprender procesos de búsqueda en la resolución de problemas.
3. Desarrollar habilidades que les permitan plantear y resolver problemas usando herramientas matemáticas, tomar decisiones y enfrentar situaciones no rutinarias (p. 217).

En la educación primaria, los propósitos de la enseñanza de las matemáticas señalados en el plan y programas de estudios SEP (2017) son:

1. Utilizar de manera flexible la estimación, el cálculo mental y el cálculo escrito en las operaciones con números naturales, fraccionarios y decimales.
2. Identificar y simbolizar conjuntos de cantidades que varían proporcionalmente y saber calcular valores faltantes y porcentajes en diversos contextos.
3. Usar e interpretar representaciones para la orientación en el espacio, para ubicar lugares y para comunicar trayectos.
4. Conocer y usar las propiedades básicas de triángulos, cuadriláteros, polígonos regulares, círculos y prismas.
5. Calcular y estimar el perímetro y el área de triángulos y cuadriláteros, y estimar e interpretar medidas expresadas con distintos tipos de unidad.
6. Buscar, organizar, analizar e interpretar datos con un propósito específico y luego comunicar la información que resulte de este proceso.
7. Reconocer experimentos aleatorios y desarrollar una idea intuitiva de espacio muestral (p. 218).

Además, existen los llamados organizadores curriculares, los cuales están organizados en tres ejes temáticos y contienen doce temas, de acuerdo a los planes y programas de la SEP (2017), estos son:

Número, álgebra y variación

- Número
- Adición y sustracción
- Multiplicación y división
- Proporcionalidad
- Ecuaciones
- Funciones
- Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes

Forma, espacio y medida

- Ubicación espacial
- Figuras y cuerpos geométricos
- Magnitudes y medidas

Análisis de datos

- Estadística
- Probabilidad

En el eje denominado Número, álgebra y variación, de acuerdo al plan y programas de la SEP (2017), “en los niveles de primaria y secundaria se profundiza en el estudio de la aritmética, se trabaja con los números naturales, fraccionarios, decimales y enteros, las operaciones que se resuelven con ellos y las relaciones de proporcionalidad” (p. 221).

En los planes y programas de la SEP (2017), se establece que los estudiantes de quinto y sexto grados, “continúan estudiando la variación en el contexto de las relaciones de proporcionalidad, ahora de manera explícita y de manera integrada con el estudio de las fracciones y los decimales” (p. 222).

En el libro de Aprendizajes clave para la educación integral (SEP, 2017), se establece que, en sexto grado, en el eje denominado ‘número, álgebra y variación’, los temas y aprendizajes esperados que se relacionan con las fracciones son:

Número

- Lee, escribe y ordena números naturales de cualquier cantidad de cifras, fracciones y números decimales...

Adición y sustracción

- Resuelve problemas de suma y resta con números naturales, decimales y fracciones.
- Usa el algoritmo convencional para sumar y restar decimales.
- Calcula mentalmente, de manera exacta y aproximada, sumas y restas de decimales.

Multiplicación y división

- Resuelve problemas de multiplicación con fracciones y decimales, con multiplicador número natural, y de división con cociente o divisores naturales.

Proporcionalidad

- Compara razones expresadas mediante dos números naturales (n por cada m) y con una fracción (n/m) ...
- Resuelve problemas de cálculo de porcentajes y de tanto por ciento.
- Calcula mentalmente porcentajes (50%, 25%, 10% y 1%) que sirvan de base para cálculos más complejos (p. 234).

En este capítulo se presentó la información sobre las fracciones que se proponen para su estudio en los planes y programas de la SEP (2011, 2017) para la enseñanza en sexto grado de primaria. El siguiente capítulo trata sobre el marco teórico sobre el que se basa esta investigación, referido al modelo recursivo de Kieren de los números racionales.

3.3 Reflexión sobre el tratamiento de los contenidos en los programas de estudio de la SEP

En los párrafos anteriores se revisó el contenido de los planes y programas de la SEP (2011, 2017). Es preciso indicar que la secuencia en que se proponen para su enseñanza en el libro, difiere a como se presentó en esta investigación. En realidad, los contenidos se enseñan con poca continuidad y con muy pocas horas de trabajo en el aula. Para que los profesores aborden los temas, se describen algunas propuestas, pero no se profundiza en los conocimientos previos de los estudiantes. Las actividades están planteadas a partir de modelos tradicionales como los de área, conjuntos y en la recta. Los libros no permiten que los estudiantes guíen ellos mismos su aprendizaje.

Con lo anterior, se concluye este capítulo que trató de los contenidos en los planes y programas de estudio de la SEP (2011, 2017) referentes a las fracciones. En el siguiente capítulo se aborda el marco teórico en el que se basa esta investigación.

Capítulo IV

Marco teórico

Este capítulo trata sobre el marco teórico utilizado en este estudio. Inicialmente, se describe el modelo recursivo de Kieren (1976) y posteriormente se menciona cómo se utilizó el modelo en esta investigación, para finalmente, describir la aportación del modelo para el entendimiento del campo de los números racionales y específicamente, las fracciones.

4.1 El modelo recursivo de Kieren

En su investigación, Kieren (1976), sugirió siete interpretaciones para los números racionales.

- Fracciones: considera que los números racionales son fracciones que se pueden comparar, sumar, restar, etc.
- Decimales: los racionales son fracciones decimales que forman una extensión natural de los números enteros.
- Pares ordenados (equivalencia de clases).
- Medida: los números racionales son medidas o puntos en una línea.
- Cociente: los racionales son elementos de orden infinito del campo de cocientes. Son números de la forma $x = p/q$ donde x satisface la ecuación $qx = p$.
- Operadores: los números racionales son operadores multiplicativos.
- Razones: los números racionales son números de la forma p/q , donde p y q son enteros y q es diferente de 0.

Estas interpretaciones no son independientes, incluso podrían considerarse isomórficas, es decir, que tienen modelos similares. Sin embargo, cada interpretación permite una perspectiva diferente de los racionales. Kieren (1976) considera que la falta de investigaciones basadas en esas diferentes interpretaciones del número racional, ha provocado que investigadores y profesores se encuentren con dificultades en la enseñanza de las fracciones.

Kieren (1976) consideraba que los programas de matemáticas no desarrollaban apropiadamente cada una de las interpretaciones del número racional, solo se trabajan algunos conceptos y se dejaban de lado otros.

Kieren (1980) considera que la instrucción requiere dirigirse hacia los diferentes componentes del constructo de número racional. Además, tal instrucción debe considerar las relaciones entre sus componentes. Para comprender mejor los racionales, es importante conocer los diferentes tratamientos que se les da, las diferentes propuestas de para trabajar estas ideas, así como sus usos en distintos contextos, que puede resultar enriquecedor para los estudiantes.

Kieren (1980) realizó un análisis matemático de los números racionales, con el que llegó a varias interpretaciones lógicas. De dichas interpretaciones, surgieron cinco ideas del número fraccional básicas para la construcción de los racionales, la relación parte-todo, cociente, medida, razones y operadores. Kieren considera que no son matemáticamente independientes, y tampoco psicológicamente. Estas son las cinco representaciones de los números racionales:

- Parte-todo. Existe una relación entre el todo y el número de partes. Esta idea se ha utilizado frecuentemente en el aprendizaje de las fracciones.
- Razones. Relación entre dos cantidades.
- Cociente. Kieren (1980) considera que el número racional como cociente se relaciona con la idea de parte-todo, pero para los estudiantes se aplica en contextos diferentes. En ella se permite la cuantificación del resultado de dividir una cantidad en un número determinado de partes y se relaciona al álgebra de ecuaciones lineales.
- Medida. El sub-constructo de medida también está relacionado con el de parte-todo, sin embargo, la tarea de medir significa asignar un número a una región. Describe una cantidad o una medida a partir de una cierta magnitud.
- Operadores. El sub-constructo de operadores coloca a los números racionales como mecanismos que mapean un conjunto multiplicativo hacia otro conjunto.

Kieren (1980) menciona la importancia de enseñar el lenguaje de los pares ordenados y la partición como mecanismos constructivos que contienen un gran número de productos de experiencia, necesarios en la construcción del concepto de fracción. Considera que el uso del lenguaje de los pares ordenados es fundamental en el desarrollo de los sub-constructos de número racional en varios niveles de sofisticación. La partición es vista como una estrategia general para dividir una cantidad dada en un cierto número de partes iguales. Kieren considera importante esto en el desarrollo de los cinco sub-constructos. Kieren, además, considera importantes otro par de mecanismos en la construcción del constructo de los racionales, estos son la identificación de la unidad y la aplicación de estructuras matemáticas apropiadas y la lógica formal que los acompaña.

Kieren (1976, citado en Charalambous Y Pitta-Pantazi, 2007) fue el primero en cuestionar si las fracciones se componían de un solo concepto y recomendó conceptualizar las fracciones como una sucesión de constructos interrelacionados. El autor propone un modelo que se basa en el conocimiento integral del número racional, con la intención de comprender cada idea y cómo se interconectan. Considera que es importante tener la información de las variables y relaciones que intervienen en el conocimiento matemático de este campo.

En el modelo de Kieren (1993), los conceptos matemáticos de los números racionales son llamados constructos, el conocimiento de las fracciones se divide en sub-constructos. En su trabajo, identifica como sub-constructos la relación parte-todo y parte-parte, la fracción como cociente, razón, operador y medida.

Mientras algunos conceptos son manejados por separado, el modelo Recursivo pretende integrar todos los conceptos (Figura 1) y así poder comprender de manera global el sentido de los números racionales, porque en el modelo parte-todo, regularmente no se puede o se pierde el sentido completo y es causa de conflictos con las ideas de unidad, que no permite el entendimiento de otros conceptos más complejos. Kieren (1980) considera importante revisar que dichos conceptos sean tratados en el currículum de educación básica, porque, como lo vemos en el modelo Recursivo, sería difícil lograr una conexión entre todos los conceptos si alguno de

ellos falta o no se enseña correctamente. Esto trae consigo una conceptualización de la idea global de número racional poco clara en el estudiante, que deviene en dificultades cuando se intenten explicar otros conceptos que requieren del conocimiento de las fracciones.

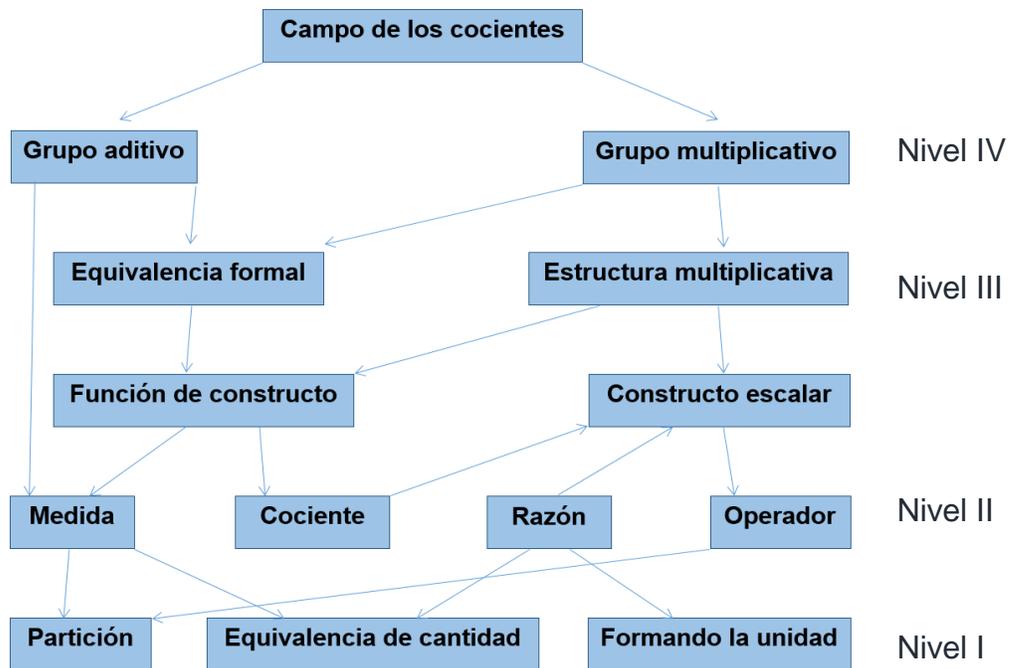


Figura n 1. Esquema del modelo recursivo de Kieren (1993, p. 65), en el que se observa el campo de los cocientes y la relación jerarquica que existe entre los conceptos.

En la figura 1, se muestra el modelo recursivo propuesto por Kieren. En el nivel I se encuentra el conocimiento que Kieren (1993) considera como herramientas intuitivas básicas. En el nivel II se encuentra el conocimiento de los sub-constructos. El nivel III está conformado por un pensamiento multiplicativo más formal. Arriba, en el nivel IV se representa el conocimiento estructural de los números racionales, que se refiere a los significados matemáticos.

Kieren (1980) considera que las fracciones deberían estudiarse desde cinco ideas principales, como base para el constructo de número racional, las cuales son: Parte

todo; cociente; medida; razón y operadores. Dichos conceptos no son matemática ni psicológicamente independientes. Aunque representen cinco patrones de pensamiento separados del número racional. El concepto de parte-todo y razón están estrechamente relacionados, el sub-constructo de número racional como cociente se relaciona con el concepto parte-todo, etc. Sin embargo, para el estudiante surge de y es aplicado en un contexto diferente. El autor considera que las escuelas de ahora deben permitir que los estudiantes experimenten con mecanismos, como la partición, con una variedad de constructos, como el de medida, así como proveerlos de experiencia en el lenguaje elemental con palabras relacionadas al número fraccional.

4.2 Consideraciones sobre el modelo de Kieren

A partir del modelo recursivo de Kieren, las fracciones se pueden mirar como una estructura y no como elementos aislados. Las ideas matemáticas presentes en este modelo, guardan una estrecha relación, pues son formas de abordar los números racionales desde diferentes perspectivas, que llevan a la comprensión total de los números racionales.

Un ejemplo de lo anterior se presenta en el trabajo de Charalambous Y Pitta-Pantazi (2007), quienes utilizaron el modelo de Kieren para investigar el conocimiento que tenían los estudiantes sobre los cinco sub-constructos referidos en el modelo recursivo de Kieren. Encontraron que los estudiantes están más familiarizados con el sub-constructo parte-todo que con cualquiera de los otros. Mencionan que, en los libros de texto, existe un énfasis mayor en trabajar con modelos referidos al sub-constructo parte-todo que a los demás. El conocimiento que mostraron los estudiantes en su investigación refleja ese énfasis. Sin embargo, su estudio mostró, además, que el concepto de fracción no se limita al del sub-constructo parte-todo, sino también al de los demás. Admiten que el sub-constructo parte-todo forma parte importante en el entendimiento de los otros sub-constructos, por su estrecha relación con ellos. Pero el conocimiento de los demás sub-constructos está presente en el currículo de educación y en el conocimiento adquirido por los estudiantes.

4.3 Relevancia del modelo recursivo de Kieren en esta investigación

Es por lo revisado en el tema anterior, que se debe considerar el estudio de los números racionales desde los diferentes sub-constructos propuestos por Kieren. En esta investigación, el modelo recursivo de Kieren es tomado para definir los conocimientos que los estudiantes deben adquirir como base para el entendimiento de otros conceptos más complejos del campo de los números racionales. Se tomó como referencia el esquema de la figura 1, para determinar que los estudiantes primero deben comprender ideas básicas como la relación parte-parte, la idea de entero y mitad, entre otros, que les permitan un mejor entendimiento de los demás conceptos.

4.4 Aportación del modelo recursivo de Kieren para el entendimiento del campo de los números racionales

Si los estudiantes tienen dificultades para reconocer los conceptos básicos de los números racionales, serán incapaces de avanzar en sus conocimientos y comprender otros conceptos más complejos. La propuesta de Kieren de mirar a las fracciones como conceptos interrelacionados, permite obtener un conocimiento global del número racional, más completo e integral. Sirve como guía para determinar los elementos que se deben enseñar y realizar una planeación más adecuada sobre los aprendizajes que deben adquirir primero los estudiantes, así como los subsecuentes. Si se presenta a los diferentes conceptos de las fracciones como ideas separadas, los estudiantes no lograrán una comprensión adecuada del número racional. Será más complicado, más adelante, que los estudiantes comprendan otros conceptos más complejos, al no tener una idea global del número racional.

En este apartado se mostró el sustento teórico de esta investigación, referido al modelo recursivo de Kieren. También presentó la importancia del modelo en esta investigación. En el siguiente capítulo se presenta toda la información perteneciente a la metodología utilizada en el estudio, que consta de tres etapas; investigación del nivel conceptual de los estudiantes, diseño y aplicación de una secuencia de actividades y aplicación de un cuestionario final.

Capítulo V

Metodología

En este capítulo se describe, inicialmente, el tipo, corte y diseño del estudio que se utilizó en la investigación. En seguida, se hace una caracterización de los participantes. Finalmente, se describen las etapas del estudio, así como una breve descripción de los instrumentos utilizados para obtener los datos y la propuesta de análisis para dichos datos.

5.1 Tipo de estudio

Este estudio cualitativo descriptivo observacional porque se pretende describir un fenómeno y las condiciones en las que se presenta, además, se hace una revisión de los conceptos relacionados que permitan explicar por qué surge y cuáles son las propuestas para abordarlo.

5.2 Corte del estudio

El corte del estudio es cualitativo. Este estudio se enfoca en comprender un fenómeno en específico y explorarlo desde la perspectiva de los participantes, a partir de su contexto y su trabajo.

En esta investigación se estudian los conocimientos que tienen los estudiantes sobre los conceptos de fracciones desde una visión cualitativa. Es decir, se investigan las habilidades y dificultades de los estudiantes, al analizar sus conocimientos con diferentes instrumentos.

5.3 Participantes

Escuela primaria

La escuela primaria donde se realizó el estudio se encuentra ubicada al sur de la Ciudad de México, en una zona de nivel socioeconómico medio a medio alto. Es un edificio de dos pisos con 8 salones de clases, dos oficinas y dos patios pequeños al aire libre. Cuenta con 73 alumnos desde primero a sexto. Los directores de la misma son esposos y algunos integrantes del personal administrativo son parientes de

ellos. Los maestros son de diversas edades y niveles educativos, la directora menciona que la rotación de docentes es poca, con maestras que han estado trabajando durante más de 8 años. Se considera a los estudiantes de nivel socioeconómico medio a medio bajo. Hijos de trabajadores y oficinistas vecinos de la escuela. Son niños sin NEE visibles o sugeridas, acuden regularmente a clases, en un horario de 8 am a 2:30 pm. El grupo de quinto grado con el que se trabajó se conforma de 10 estudiantes, 5 hombres y 5 mujeres, en general participativos.

Muestra

La muestra total se compone de 100 estudiantes de primaria y una profesora de sexto grado. participaron tres escuelas primarias, dos escuelas públicas y una escuela particular. De la escuela particular, se trabajó con 30 estudiantes, 10 de cuarto, 10 de quinto y 10 de sexto. Fue de esta escuela que se tomó a la submuestra con la que se trabajó en el estudio principal.

Submuestra

La submuestra principal son 10 estudiantes que al inicio del estudio se encontraban en quinto grado de primaria de un grupo de una escuela primaria particular de la Ciudad de México.

5.4 Etapas del estudio

El estudio constó de tres etapas que se enlistan a continuación:

Primera etapa. Diseño y aplicación de los instrumentos de investigación

- Cuestionario inicial de fracciones

En esta etapa se realizó una revisión de la literatura sobre fracciones que permitiera la construcción de un cuestionario de fracciones, en el que se exploraran diferentes ideas matemáticas sobre el concepto de fracción. A partir de la información encontrada en los planes y programas de estudio de la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2011 y 2017), así como en la revisión de la literatura especializada en el tema de fracciones, se elaboró el cuestionario inicial de fracciones con el

objetivo de indagar acerca de los conocimientos que los estudiantes tenían sobre fracciones y las dificultades y habilidades que presentaban.

Una vez diseñado, se aplicó el cuestionario inicial de fracciones. En un principio, se aplicó a estudiantes de cuarto, quinto y sexto grado de primaria para, a partir de los resultados encontrados, seleccionar el grupo y grado escolar con el cuál se trabajaría. A partir de los resultados encontrados, se decidió trabajar con estudiantes de 5º grado de educación primaria.

- Entrevistas clínicas piagetianas

Derivado de los hallazgos iniciales en el cuestionario, se aplicaron entrevistas clínicas piagetianas a una parte de los estudiantes del grupo de quinto grado. Dichas entrevistas tenían como objetivo principal, ahondar en las respuestas de los estudiantes al cuestionario. En total se entrevistó a seis de los diez estudiantes de la submuestra principal.

- Entrevista semiestructurada

Se diseñó una entrevista semiestructurada y se aplicó a la profesora de 5º grado de primaria. La entrevista exploró diferentes aspectos de su trabajo como maestra y su actuación con las fracciones frente al grupo. Las preguntas estaban encaminadas a indagar sobre diferentes aspectos de su formación docente, trabajo frente a grupo, dificultades para enseñar fracciones, conocimiento de los planes y programas de estudio de la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2011), así como también la utilización de los recursos didácticos para enseñar fracciones.

- Segunda aplicación del cuestionario inicial de fracciones

El cuestionario también se aplicó a 70 estudiantes de quinto grado de primaria con la intención de comparar los resultados que obtuvieron los estudiantes del estudio principal con una muestra significativa de estudiantes.

Segunda etapa. Diseño y aplicación de un plan de actividades de enseñanza de fracciones

En la segunda etapa se diseñó un plan de actividades, que apoyara a los estudiantes en la construcción de sus conocimientos sobre fracciones. El diseño de actividades se basó en el modelo recursivo de Kieren, en que se propone trabajar con conceptos de base para desarrollar otros conceptos más amplios de las fracciones. Para la elaboración de las actividades, se tomaron en cuenta diversos estudios sobre fracciones que permitieran el avance conceptual de los estudiantes de la muestra representativa en los temas con los que se observó, tenían dificultades.

Las actividades abordaron las ideas básicas de fracciones, como, por ejemplo; relación parte-parte y relación parte-todo, fraccionamiento en cantidad continua, fraccionamiento en cantidad discreta y la representación de las fracciones en la recta numérica.

La aplicación de las actividades se llevó a cabo en diferentes sesiones y se trabajó con dos estudiantes cada vez. Las sesiones se componían de la resolución de actividades con el apoyo de materiales y hojas de trabajo que recopilaban los temas estudiados en dichas sesiones.

Para el tema de fracciones en cantidad continua, se utilizaron *regletas de cuisenaire* y el plan de actividades se dividió en siete temas o actividades, cada una con una hoja de trabajo a desarrollar o responder.

En las fracciones en cantidad discreta se utilizaron fichas de tres colores, rojas, blancas y azules, y se dividió en 5 temas o actividades, que exploraban el entero o unidad, fracciones como medios, tercios, cuartos, sextos y octavos, así como equivalencia de fracciones, sumas y fracciones impropias.

En las actividades de fracciones en la recta numérica, se trabajó con la representación de fracciones en la recta, con una unidad, con varias unidades y con fracciones propias e impropias. Como actividad complementaria, se jugó con un dominó de fracciones.

Tercera etapa. Diseño y aplicación de un cuestionario final

El cuestionario final exploró las ideas matemáticas trabajadas inicialmente en el cuestionario y en las actividades de enseñanza. También se exploraron otras preguntas que no se habían abordado en los instrumentos anteriormente mencionados con la intención de observar si habían avanzado conceptualmente en las actividades trabajadas.

5.5 Instrumentos

La elaboración de los instrumentos de este estudio se fundamentó en tres aspectos:

- Análisis de planes y programas de estudio de la SEP (2011).
- Revisión de la literatura sobre fracciones.
- Estudio piloto (cuestionario de fracciones).

A continuación, se describen los instrumentos en el orden de aplicación.

5.5.1 Cuestionario inicial de fracciones

Este cuestionario inicial sobre fracciones (ver Anexo 1, p. 123) tuvo como objetivo identificar el nivel de conocimientos sobre fracciones que tenían los estudiantes, para así detectar las dificultades y habilidades de dichos estudiantes. Como se mencionó anteriormente, se construyó a partir del análisis de los planes y programas de la SEP y de la revisión de la literatura sobre didáctica de las fracciones.

La intención era abordar los temas que se proponen trabajar en la educación primaria, con preguntas que sean pertinentes para obtener información útil para el estudio. Se planteó para ser aplicado a los estudiantes de una escuela particular de los grados cuarto, quinto y sexto de primaria. De esa forma se podría considerar en qué nivel tienen mayor dominio conceptual de los temas y quienes tienen mayores dificultades, para entonces decidir con qué muestra sería conveniente trabajar las siguientes etapas del estudio.

El cuestionario de fracciones fue diseñado específicamente para este estudio. En él, se abordan diferentes conceptos de fracciones que fueron presentados a los estudiantes como se muestra en la tabla 2. Se desarrollaron 19 preguntas que pretenden explorar los conocimientos básicos de los estudiantes en el tema de

fracciones, a partir de situaciones que se plantean regularmente en la educación. Es decir, la forma de mostrar las preguntas es lo más parecido a la forma en la que se les presentan las preguntas en la educación formal.

Tabla n 2

Ideas matemáticas trabajadas en el cuestionario de fracciones

| Pregunta | Idea matemática | Solicitud de la pregunta |
|-----------------|--|--|
| 1 | Idea de mitad | Identificar figuras que representan una mitad |
| 2 | Entero o unidad | Identificar figuras que representan un entero |
| 3 y 4 | Representación de fracciones en cantidad continua (fracciones propias e impropias) | Dado el caso, se le pide al estudiante que represente una fracción con un dibujo o escriba la fracción que la imagen representa. |
| 5 | Representación de fracciones en cantidad discreta | Identificar la fracción que representa la parte encerrada, o que encierre las figuras de acuerdo a la fracción dada. |
| 6 | Representación de fracciones equivalentes | Identificar las fracciones equivalentes marcándolas con el mismo color. |
| 7 | Fracciones equivalentes | Continuar secuencias de fracciones faltantes. |
| 8, 9 y 10 | Representación de fracciones en la recta | Identificar fracciones en la recta. |
| 11-14 | Operaciones con fracciones (+, -, *, ÷) | Resolver operaciones con fracciones. |
| 15 | Razones equitativas | Seleccionar la oración que representa la opción verdadera. |
| 16 | Idea de razón | Resolver un problema de razón |
| 17 | Proporcionalidad geométrica | Dibujar una figura al doble de tamaño |
| 18 | Proporcionalidad aritmética | Resolver un problema en el que debe encontrar la distancia real entre dos lugares de acuerdo a un mapa. |
| 19 | Porcentaje | Se le da un problema al estudiante donde debe determinar el descuento de varios artículos para saber cuál de ellos tiene el mejor precio final |

En esta tabla se muestran las ideas matemáticas trabajadas en el cuestionario inicial de fracciones.

Las preguntas tienen la siguiente estructura. Se les daba una instrucción a seguir de acuerdo al tema, se les colocaba una pregunta o solicitud para responder las preguntas y se colocaban imágenes que podían apoyar en la resolución de la pregunta, como en las preguntas 1 y 2, entre otras, o como apoyo visual como en el caso de la pregunta 19. Así, los estudiantes tenían la información suficiente para responder las preguntas planteadas. Las preguntas estaban enumeradas y el material que se solicitaba en algunos casos debía ser proporcionado previamente por el aplicador del cuestionario.

Para su aplicación, se solicitó apoyo de una escuela primaria particular en la que se permitió el acceso para trabajar con los diferentes grados. Se aplicó a los grados cuarto, quinto y sexto de dicha escuela, uno a la vez. Se requirió de dos sesiones para la aplicación debido a la extensión del cuestionario y con la intención de que los estudiantes respondieran el cuestionario completo sin estar cansados o aburridos. Una vez frente al grupo se daban las instrucciones para responder. Se les dijo cómo llenar los datos, se leyeron las preguntas para que se comprendiera lo que se pedía en cada caso. Se les pidió utilizar el lápiz y en caso de requerirlo, sacapuntas, pero no podían borrar lo que escribieran. Si tenían dudas sobre cómo responder se les dijo que podían preguntar al aplicador. Además, se les proporcionó material extra que se encontraba al frente del salón, como lápices, hojas blancas, tijeras, reglas y colores. Una vez descritas las preguntas y las instrucciones para responder, los estudiantes comenzaron a resolver el cuestionario. La duración de la primera parte del cuestionario fue entre una hora y 80 minutos. La segunda parte duró entre 30 y 50 minutos.

Posteriormente se aplicó en escuelas públicas de la Ciudad de México, a un total de 70 estudiantes de quinto grado de primaria. Esto con la intención de tener una muestra representativa que proporcionara información estadística sobre los conocimientos que tienen los estudiantes en ese nivel educativo. Estos datos apoyarían a los datos obtenidos en el estudio principal.

Se decidió trabajar con los estudiantes de quinto grado por ser quienes tenían un mayor tiempo de instrucción y se consideraba que habían revisado los conceptos

abordados en el cuestionario. Ellos, presentaban ciertos conocimientos de fracciones y dificultades en varios de los conceptos abordados en el cuestionario. Los resultados de los cuestionarios se basaron a partir de este punto, en las respuestas dadas por los estudiantes de quinto grado.

Para analizar los datos, se propuso revisar las respuestas de cada estudiante y generar categorías de análisis por cada idea matemática abordada en el cuestionario. Entonces, ubicar a los estudiantes en un nivel de apropiación matemática de acuerdo a la respuesta dada en el cuestionario. Para ello, se colocaron los datos en tablas que contenían las respuestas de todos los estudiantes, lo que permitía la comparación de las respuestas y así agrupar aquellas que fueran similares y entonces construir categorías de análisis. De acuerdo a lo que los estudiantes respondían, se consideraba si su respuesta pertenecía a un nivel de apropiación matemática alto, medio o inicial. De esta forma se podía ubicar a los estudiantes por nivel de apropiación matemática.

5.5.2 Entrevista clínica individual

Las entrevistas clínicas piagetianas (Delval, 2012), fueron aplicadas a los estudiantes del quinto grado del estudio principal. Tienen como objetivo indagar en las respuestas de los estudiantes y así comprender mejor por qué respondieron de dicha forma a cada pregunta. Con la entrevista, los estudiantes tienen la oportunidad de complementar las respuestas dadas en el cuestionario y de esta forma, modificar su respuesta si considera que no era la adecuada.

La entrevista clínica piagetiana, según Delval (2012), indaga la forma en que piensan, perciben, actúan y sienten los estudiantes. Intenta averiguar lo que no es evidente de lo que los sujetos hacen o dicen, ya sea en acciones o palabras.

Para Delval (2012), una entrevista clínica piagetiana puede dar información acerca de cómo perciben el mundo los entrevistados, muestra datos que no se pueden observar fácilmente, en este caso, aquellos conocimientos que el cuestionario de fracciones no haya permitido revisar adecuadamente, como las estrategias o los procesos para resolver las preguntas. Con la entrevista se esperaba comprender el

proceso por el que los estudiantes respondían las preguntas del cuestionario sobre fracciones.

Para la realización de la entrevista clínica individual realizada con los estudiantes que participaron en el estudio. Las preguntas realizadas giraban en torno a las respuestas dadas por los estudiantes a cada pregunta del cuestionario sobre fracciones. De acuerdo a las respuestas se debían realizar otras preguntas que permitieran ahondar en los comentarios de los estudiantes, para que aportaran tanta información como fuera posible. Se les pedía que explicaran sus respuestas hasta comprender cómo habían respondido las preguntas del cuestionario y así poder indagar con más detalle sobre los procesos cognoscitivos que los estudiantes utilizaban al resolver el cuestionario, se indagaba también acerca de las estrategias de resolución de problemas que utilizaban, como también se exploraba acerca de las ideas intuitivas que los estudiantes tenían sobre fracciones y las concepciones de las mismas a partir de la enseñanza de ese contenido escolar.

La idea central de las entrevistas fue indagar sobre esas ideas y nociones que tenían los niños sobre fracciones y cómo este contenido escolar se ve fuertemente influenciado por los procesos de enseñanza y aprendizaje que cada profesor ministra en el salón de clase.

Las entrevistas fueron grabadas en video con fines de revisión posterior. Se les explicaba a los participantes el fin de la entrevista y se les pedía que respondieran con la mayor honestidad posible, que consideraran que las respuestas no buscaban saber si estaba bien o mal, sino el porqué de sus respuestas y entonces no debían preocuparse por ello porque no estaban siendo evaluados. Una vez explicado lo anterior, se procedía a realizar las preguntas para cada problema del cuestionario. Las entrevistas tenían una duración de entre 40 y 60 minutos.

El análisis de las entrevistas se realizaba analizando sus respuestas y comparando, en principio, con lo respondido en el cuestionario. De esa forma se podía considerar si la respuesta dada en la entrevista modificaba la respuesta al cuestionario y se podía cambiar el nivel de apropiación matemática que se tenía en un principio. Posterior a esto, se comparaban las respuestas de los estudiantes con los demás.

De esta forma se podrían encontrar similitudes en los procesos de resolución de las preguntas y las ideas que tienen respecto a los temas de fracciones.

5.5.3 Entrevista con la profesora

Se aplicó una entrevista semiestructurada (ver Anexo 2, p. 135) a la profesora del grupo con el que se realizaba el estudio. El objetivo de la entrevista es conocer la perspectiva que tienen los profesores sobre la enseñanza de fracciones, los contenidos que se deben enseñar y la actitud de los estudiantes hacia esos conocimientos, así como su actuar frente a dichas situaciones. Los objetivos específicos de la entrevista son:

1. Conocer la percepción del profesor sobre el pensamiento de sus estudiantes.
2. Conocer la percepción del profesor sobre el plan de estudios de la SEP.

La entrevista se estructuró por categorías como se plantea a continuación.

Categoría 1.- Historia de vida relacionada con la elección de su profesión.

Categoría 2: Rescate de experiencia docente.

Categoría 3.- Fracciones en el libro de desafíos.

Categoría 4.- Materiales utilizados.

Categoría 5.- Evaluación de los conocimientos de fracciones.

La entrevista se llevó a cabo dentro de la escuela donde labora la profesora, se le mencionó que la conversación sería grabada con fines de análisis y que las respuestas que diera serían tratadas con absoluta discreción cuidando siempre sus datos personales. Una vez explicado esto se procedió a realizar la entrevista a partir de las preguntas que se tenían previamente construidas. Sin embargo, a partir de las respuestas se realizaban más preguntas que permitieran comprender a fondo lo dicho por la profesora.

El análisis de las respuestas se realizó a partir de las categorías de análisis previamente desarrolladas para la entrevista. Se analizaron las respuestas de la

profesora a las preguntas realizadas y se categorizaron sus respuestas de acuerdo a lo establecido.

5.5.4 Secuencia de actividades de enseñanza de las fracciones

Para la segunda etapa del estudio, se diseñó y aplicó una secuencia de actividades (ver Anexo 3, p. 141), que exploró conceptos básicos de fracciones. Las actividades toman como referencia el modelo recursivo de Kieren (1980), en el que se establece que, para acceder al campo de los cocientes, se deben conocer los conceptos básicos y así avanzar en las ideas, las que considera como constructos interconectados.

Dichos constructos se componen de subconstructos, de los que reconoce cinco de ellos: la relación parte-todo y parte-parte, cociente, razón, operador y medida. Para este estudio, se toman ideas matemáticas como la idea de mitad, entero, fracciones en cantidad continua, discreta, entre otras. Estas ideas matemáticas, de acuerdo al modelo de Kieren, se encuentran en la parte inferior del modelo y deben ser aprendidas por los estudiantes para acceder a otros conceptos más complejos de fracciones.

De acuerdo a los resultados obtenidos en el cuestionario, los estudiantes tienen dificultades con ideas matemáticas básicas, es por ello que se decidió utilizar dichas ideas matemáticas para diseñar las actividades.

Se plantearon tres conjuntos de actividades. El primer conjunto explora las fracciones en cantidad continua (modelos de área). El segundo utiliza el fraccionamiento en cantidad discreta (modelos de conjuntos). El tercer conjunto de actividades explora la representación de fracciones en la recta (modelos lineales).

A continuación, se enlistan los tres conjuntos con sus respectivas actividades:

1. Modelos de área

- Reconocimiento de las regletas,
- Representación de fracciones en cantidad continua,
- Fracciones equivalentes,

-Fracciones impropias y

-Sumas de fracciones.

2. Modelos de conjuntos

-Representación de fracciones en cantidad discreta,

-Enteros y mitades,

-Equivalencias de fracciones y

-Fracciones impropias.

3. Modelos lineales

-Representación de fracciones en la recta numérica

-Unidad o enteros

-Fracciones equivalentes

-Fracciones impropias.

Las actividades se realizaron en varias sesiones. Se trabajó en parejas que continuaban las sesiones juntas. Se seleccionaron a partir del nivel de apropiación matemática que tenían después de la aplicación del cuestionario y las entrevistas clínicas piagetianas. Se colocó un estudiante de nivel alto con un estudiante de nivel medio, otra pareja con nivel medio, y dos parejas compuestas por un estudiante de nivel medio y uno de nivel bajo, respectivamente. Se considera que, de esta forma, los estudiantes pueden apoyarse en la construcción de sus niveles de conocimiento y apropiación matemáticos. Para cada sesión correspondía un conjunto de actividades y cada actividad correspondía a trabajo con materiales y la resolución de hojas de trabajo para reforzar lo visto en las actividades y, además, tener evidencia de lo estudiado. Se realizaba la actividad con material y después se respondía a la actividad en papel.

Las sesiones fueron grabadas en video con el único fin de revisar posteriormente las actividades realizadas y la actuación de los estudiantes durante las sesiones. Para estudiar las actividades se utilizaron dos tablas distintas. En una de ellas se analizaban las respuestas de los estudiantes en las hojas de trabajo, se consideraba si habían entendido la actividad, cómo y qué respondieron y en qué nivel de

apropiación matemática se clasificarían de acuerdo a la respuesta. En la otra tabla se analizaba lo realizado en las sesiones con el material, de acuerdo a la interacción que existió entre los participantes, quién dirigió las actividades y si construían juntos su conocimiento. Se construyeron categorías a partir de las ideas matemáticas abordadas y de esta forma se pudieron analizar las actividades realizadas.

5.5.5 Cuestionario final

En la tercera etapa se diseñó y aplicó un cuestionario de fracciones final de fracciones (ver Anexo 4, p. 153), con la intención de reconocer si la secuencia de actividades permitió a los estudiantes avanzar en sus conocimientos sobre fracciones. Se elaboró a partir del primer cuestionario y de las actividades realizadas en la secuencia de actividades.

El cuestionario tuvo 14 preguntas relativas a fracciones. Se aplicó en una sesión y tuvo como duración entre 20 y 30 minutos. Abarcó los temas de idea de mitad, representación de fracciones en cantidad continua, representación de fracciones en cantidad discreta, representación de fracciones en la recta y fracciones equivalentes. Para su análisis se utilizaron las mismas categorías que en la primera etapa del estudio, que fueron desde dos perspectivas, las estrategias de resolución de problemas y los niveles de conceptualización matemática.

Este capítulo abarcó la metodología propuesta en esta investigación, se mostró el trabajo realizado en cada etapa. En el siguiente capítulo, se muestran los resultados de la primera etapa del estudio.

Capítulo VI

Resultados de la primera etapa del estudio

En este capítulo se presentan los resultados de la primera etapa del estudio, correspondiente al cuestionario inicial de fracciones aplicado a estudiantes de quinto grado de primaria, las entrevistas clínicas piagetianas aplicadas los estudiantes y la entrevista semi-estructurada aplicada a una profesora. Inicialmente se hace una descripción de los instrumentos aplicados: el cuestionario inicial de fracciones, las entrevistas clínicas piagetianas y la entrevista semiestructurada aplicada a la profesora de quinto grado de educación primaria. Posteriormente, se describe la aplicación de cada instrumento. Finalmente, se presenta el análisis de los datos obtenidos en esta etapa del estudio.

6.1 Diseño de los instrumentos

A continuación, se describe el diseño de los instrumentos utilizados en esta etapa del estudio.

6.1.1 Diseño del cuestionario inicial de fracciones

El cuestionario inicial de fracciones se diseñó a partir de la revisión de la literatura, sobre el análisis de las ideas matemáticas abordadas en educación primaria para la enseñanza del concepto de fracción, también de acuerdo a las ideas matemáticas contenidas en los Planes y Programas de la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2017) para la enseñanza de las fracciones. El objetivo del cuestionario fue identificar los conocimientos que los estudiantes tenían sobre diferentes ideas de las fracciones. Para desarrollar cada pregunta se buscó información teórica que permitiera su construcción. Con base en esa información se diseñaron las preguntas, algunas fueron retomadas de trabajos de investigación (Lesh, Behr, & Post, 1987, Charalambous and Pitta-Pantazi, 2007), y otras más por nosotros mismos. Las preguntas se elaboraron con niveles de dificultad bajo, medio y alto, que nos permitieran observar diferentes niveles de conocimiento de los temas por parte de los estudiantes. El instrumento constó de 19 preguntas sobre diversas

ideas del concepto de fracción. A continuación, se muestra la Tabla 3 que describe las ideas exploradas en el cuestionario.

Tabla n 3

Ideas matemáticas exploradas en el cuestionario de fracciones

| Pregunta | Idea matemática | Solicitud de la pregunta |
|-----------------|---|---|
| 1 | Idea de mitad | Se presentan diferentes figuras y se le pide que identifique encerrando las figuras que representan una mitad |
| 2 | Entero o unidad | De varias figuras dadas, se le pide que identifique encerrando en un círculo las figuras que representan un entero |
| 3 y 4 | Rep. de fracs en cantidad continua | Dado el caso, se le pide que represente una fracción con un dibujo o escriba la fracción que la imagen representa. |
| 5 | Representación de fracciones en cantidad discreta | De diferentes grupos de imágenes, se le pide que identifique la fracción que representa la parte encerrada, o que encierre las figuras de acuerdo a la fracción dada. |
| 6 | Fracciones equivalentes | Se le pide que identifique las fracciones equivalentes marcándolas con el mismo color. |
| 7 | Fracciones equivalentes | Se le pide que observe una secuencia de ejemplo para continuar con las secuencias faltantes. |
| 8, 9 y 10 | Fracciones en la recta | Se le da un segmento de línea y se le pide que identifique en qué lugar deberían ir las fracciones solicitadas. |
| 11-14 | Operaciones con fracciones (+, -, *, ÷) | Se le pide que resuelva un par de ejercicios por cada tipo de operación. |
| 15 | Razones equitativas | A partir de unas figuras se pide que seleccione la oración que representa la opción verdadera. |
| 16 | Idea de razón | Se le pide que observe una figura y responda con comentarios las preguntas de razón. |
| 17 | Proporcionalidad geométrica | Se le muestra una imagen sobre papel cuadriculado para que dibuje uno similar, pero del doble de tamaño. |
| 18 | Proporcionalidad aritmética | Se le pide resolver un problema en el que debe encontrar la distancia real entre dos lugares de acuerdo a un mapa. |
| 19 | Porcentaje | Se le da un problema donde debe determinar el descuento de varios artículos para saber cuál de ellos tiene el mejor precio final |

Ideas matemáticas utilizadas en cada pregunta del cuestionario inicial de fracciones y la descripción de la actividad que se debía realizar para resolverlas.

6.1.2 Diseño de las entrevistas clínicas piagetianas

Para Delval (2012), una entrevista clínica piagetiana es un instrumento que nos sirve para reconocer la forma en la que las personas piensan o perciben las cosas. Sirven para comprender aquello que es poco evidente de lo que dicen o hacen. En este estudio se utilizaron las entrevistas clínicas piagetianas para indagar sobre las respuestas de los estudiantes en el cuestionario inicial de fracciones. Mediante la interacción de los estudiantes con el entrevistador, se buscó comprender los procedimientos que utilizaron para responder a las preguntas del cuestionario, de tal forma que los estudiantes pudieran explicar el porqué de sus respuestas.

Para realizar las entrevistas, fue necesario que los estudiantes respondieran el cuestionario inicial de fracciones. Posteriormente se hizo el análisis de las respuestas de los estudiantes a los cuestionarios, se seleccionaron algunos estudiantes de acuerdo a los niveles de logro y posteriormente, se los entrevistó, con el objetivo de indagar sobre las respuestas de los estudiantes a dichos cuestionarios.

Una vez seleccionados los cuestionarios y las preguntas de cada cuestionario, se diseñaba un guion para la entrevista, para ahondar en las respuestas dadas en el cuestionario por los estudiantes. Cabe aclarar que el guion de la entrevista era para darle una estructura a la entrevista, sin embargo, se esperaba que cada cuestionario se realizara a partir de las respuestas que dieran los estudiantes al momento de la entrevista.

El formato para la redacción de la entrevista fue el propuesto por Delval (2012), que contempla colocar los datos del entrevistador y entrevistado, utilizar dos columnas para la transcripción de la entrevista, del lado izquierdo las preguntas que realizó el entrevistador y del lado derecho las respuestas dadas por los estudiantes entrevistados. El guion de las entrevistas se realizó en dicho formato. Las entrevistas revisaban solo algunas preguntas y tenían una estructura basada en las respuestas de los estudiantes a dichas preguntas, por lo que se considera que ninguna entrevista es exactamente igual a otra.

En la tabla 4 se presenta el ejemplo de un guion para una entrevista clínica que contempló todas las respuestas dadas por un estudiante al cuestionario.

Tabla n 4

Ejemplo de un guion para la entrevista clínica piagetiana

| | |
|---|--------------------|
| Entrevistador: | <i>Nombre del</i> |
| Fecha de entrevista: | <i>estudiante:</i> |
| Lugar de entrevista | <i>Edad:</i> |
| | <i>Grado:</i> |
| Entrevistador | <i>Estudiante</i> |
| <p>¿Qué tal? Me gustaría hacerte preguntas del examen que hicimos en diciembre, ¿te acuerdas?</p> <p>Las preguntas son para saber algunas cosas de ese cuestionario y por qué respondiste de tal o cual manera, quiero que recuerdes que no es porque esté correcto o incorrecto, es porque quiero saber por qué lo respondiste, porque así puedo comprender mejor tus respuestas.</p> <p>1.</p> <p>En esta pregunta nos piden identificar las imágenes que corresponden a una mitad y tú respondiste que estas lo eran ¿Me podrías explicar por qué consideras que lo son?</p> <p>¿y por qué esta otra no lo es?</p> <p>¿y qué me dices de esta otra que tiene segmentos?</p> <p>¿crees que esas sean las figuras solicitadas, te gustaría revisar de nuevo o ya estás seguro?</p> <p>2.</p> <p>Esta dice que hay que encerrar los enteros ¿me podrías decir por qué esta y no esta otra?</p> <p>Esta está fraccionada, ¿por qué crees que también es un entero?</p> <p>¿Por qué consideras que esta figura no representa un entero?</p> <p>3.</p> <p>En esta pregunta, ¿por qué respondiste que es esa fracción?</p> <p>Y en esta ¿qué fue lo que te indicó que esa era la respuesta?</p> <p>En la C ¿qué fue lo que te llevó a concluir que esa era la respuesta?</p> <p>Fíjate bien, en esta parte están estas dos figuras ¿qué pasa si las encierro en un cuadro? ¿tu respuesta sería la misma?</p> <p>En la D ¿por qué consideras que esa es la fracción?</p> <p>¿y en esta otra? Y qué me dices de la F ¿hiciste algo en especial para llegar a esa respuesta? ¿qué fue? ¿y si encierro de nuevo en un cuadro este grupo?</p> <p>Si respondieras de nuevo esta parte del cuestionario ¿cambiarías alguna [otra] respuesta?</p> | |

En esta tabla se presenta un ejemplo de un guion para una entrevista clínica piagetiana. Cada entrevista se hacía personal, por ello, las preguntas podían cambiar de estudiante a estudiante.

6.1.3 Diseño de la entrevista semiestructurada

El diseño de la entrevista semi-estructurada con la profesora tuvo como objetivo conocer su opinión sobre diferentes aspectos de su práctica pedagógica. Se trató de una entrevista semi-estructurada, contenía una serie de preguntas que se esperaban complementar a partir de las respuestas de la profesora, al realizarle otras preguntas que profundizaran en dichas respuestas. Las preguntas fueron diseñadas a partir de cinco categorías que a continuación se presentan.

- Categoría 1.- Historia de vida relacionada con la elección de su profesión. Esta categoría busca que la profesora proporcione información sobre su desarrollo profesional que la condujo a ser profesora.
- Categoría 2.- Rescate de experiencia docente. En esta categoría, se exploró información referente a su experiencia en el campo de la educación, como los grados en los que ha impartido clase y los retos a los que se ha enfrentado en cada uno de ellos.
- Categoría 3.- Fracciones en el libro de desafíos matemáticos de sexto. En esta categoría se presentaron problemas retomados del libro de desafíos matemáticos proporcionado por la SEP, con la intención de que la profesora nos relatará la forma en que ha abordado dichos problemas y las situaciones con las que se ha enfrentado al trabajarlos en clase con los estudiantes.
- Categoría 4.- Materiales utilizados. En esta categoría la intención fue conocer los materiales que utiliza la profesora además de los propuestos por el libro de desafíos matemáticos, si le han funcionado y la importancia que les da respecto a los que se podrían considerar oficiales.
- Categoría 5.- Evaluación de los conocimientos de fracciones. En esta categoría se buscó indagar sobre los procesos para evaluar a los estudiantes y la importancia que la profesora da a dicha evaluación o a qué elementos de la evaluación le da más peso.

6.2 Aplicación de los instrumentos

En esta parte se describe cómo fueron aplicados los instrumentos de la primera parte del estudio. En principio se describe la aplicación del cuestionario inicial de fracciones, posteriormente, se describe la aplicación de las entrevistas clínicas piagetianas y, por último, se describe la aplicación de la entrevista semi estructurada con la profesora.

6.2.1 Aplicación del cuestionario inicial de fracciones

El cuestionario inicial de fracciones se aplicó en una escuela particular a 30 estudiantes de cuarto, quinto y sexto grado de primaria. Había 10 estudiantes por grado. El instrumento contó con 19 preguntas, por lo que se dividió en dos partes para ser aplicado en dos sesiones.

Para la aplicación del instrumento, inicialmente se solicitó autorización de la escuela y padres de familia. Se acudió a la escuela el día acordado para la aplicación. En la primera sesión se trabajó con el grupo de cuarto y se les distribuyó el cuestionario. Se leyeron las preguntas y se les explicó el instrumento. También se les pidió que utilizaran el material que ellos desearan y si requerían algún otro, se acercaran al aplicador o solicitaran lo que necesitaban. Asimismo, se les dijo que no debían usar goma de borrar, esto con la intención de que se pudiera observar el proceso de resolución de los estudiantes, y que si necesitaban más espacio podían solicitar hojas blancas. En la mesa del frente se colocaron una serie de materiales como reglas, colores, lápices, hojas blancas, sacapuntas y tijeras, disponibles si las requerían, aunque no se dio instrucción específica de que podían utilizarlas. Los estudiantes comenzaron a responder la primera parte del cuestionario y en una segunda sesión respondieron la otra parte.

Cuando un estudiante tenía dudas sobre cómo responder alguna pregunta y pedía apoyo al aplicador, se procuraba explicarle lo solicitado sin darle ayuda o pistas para responder. Este proceso se realizó de la misma forma con los grupos de quinto y sexto. Una vez finalizado el cuestionario se revisaban la hora de inicio y de término del cuestionario de cada estudiante y entonces podían regresar a sus actividades

normales. La primera sesión duró entre los 30 y 40 minutos y la segunda entre 20 y 30 minutos.

6.2.2 Aplicación de las entrevistas clínicas piagetianas

Para poder aplicar las entrevistas se tuvo que pedir autorización a la escuela y a los padres de los estudiantes, porque las entrevistas serían grabadas en video, además debían ser aplicadas en un espacio tranquilo en que se pudiera realizar la entrevista sin interrupciones.

Una vez seleccionado el estudiante a entrevistar, se le citaba en un salón dentro de la misma institución. Se procedía a realizar un *raport*, luego se le explicaba el objetivo de la entrevista y se le mostraba su cuestionario para dar inicio a la entrevista. Se le cuestionaba sobre las respuestas dadas en el cuestionario inicial de fracciones a algunas preguntas previamente seleccionadas. De esta forma, se establecía un diálogo con el estudiante. Independientemente del acierto o error, se indagaba la forma en que había resuelto el cuestionario. A partir de su respuesta se le hacían más preguntas, hasta que el entrevistador estuviera seguro de entender lo que el estudiante decía. Este procedimiento se llevó a cabo con cada uno de los estudiantes entrevistados. Las entrevistas duraban entre 40 y 50 minutos.

6.2.3 Entrevista con la profesora

Se diseñó una entrevista semiestructurada a ser realizada con la profesora de sexto grado de primaria de la escuela donde se llevó a cabo el proyecto y que es la titular del grupo con el que se realizó la investigación.

Para aplicar la entrevista se concretó una cita con la profesora. El lugar de la entrevista fue el salón de clases y se le pidió poder grabar la entrevista. La entrevista duró aproximadamente 50 minutos, con lo que se obtuvo información valiosa acerca de su labor docente y en específico, su trabajo con fracciones. Se utilizó el guion para la entrevista y se pudo ahondar en las respuestas de la profesora al complementar con otras preguntas basadas en sus respuestas. Las aportaciones de la profesora fueron muy extensas por lo que se consideró que la información fue

suficiente. La actitud de la profesora fue excelente, lo que permitió que la entrevista se realizara de la mejor manera posible.

6.3 Análisis de los datos obtenidos en la primera etapa del estudio

En esta parte se muestra el análisis de los datos obtenidos a partir de cada instrumento. Se inicia con la descripción de los datos obtenidos a partir del cuestionario inicial de fracciones, seguido de los datos obtenidos a partir de las entrevistas clínicas piagetianas y, finalmente, la entrevista con la profesora.

6.3.1 Análisis de los datos del cuestionario inicial de fracciones

Una vez aplicado el cuestionario inicial de fracciones a los estudiantes, se decidió trabajar con los estudiantes de quinto grado. Se considera que, en ese grado, los estudiantes ya han estudiado las ideas matemáticas que se abordaron en el cuestionario y los estudiantes de sexto podrían no contar con el tiempo suficiente para realizar las actividades programadas.

Se utilizaron dos niveles de análisis:

- 1.- Niveles de conceptualización matemática y
- 2.- Estrategias de resolución de problemas.

Se entiende por niveles de conceptualización matemática el conocimiento que tienen los estudiantes sobre las diferentes ideas matemáticas, estos niveles van en función de la capacidad de cada estudiante para resolver los diferentes problemas que se les plantearon y la comprensión de los conceptos matemáticos dados. El nivel de dominio que tienen los estudiantes sobre cada idea matemática, puede servir para identificar las áreas que se deben trabajar con ellos, de tal forma que puedan avanzar en su nivel de conocimiento matemático. Las estrategias de resolución de problemas son aquellas herramientas de las que se valen los estudiantes para responder a las preguntas o situaciones que se les plantearon en el cuestionario inicial. Se obtuvieron a partir de las respuestas que dieron en el cuestionario. Se categorizaron en función del contenido matemático que se utilizó en el cuestionario.

6.3.2 Consideraciones sobre los niveles de conceptualización matemática de los estudiantes

A nivel general (ver tabla 5), 36% de las respuestas dadas en el cuestionario corresponden al nivel inicial de conceptualización matemática, 33% al nivel medio y 31% al nivel alto. Los estudiantes que se encuentran en el nivel inicial de conceptualización matemática a menudo tienen dificultad para identificar nociones básicas de fracciones, como las fracciones impropias o las fracciones equivalentes. Conceptos como el de entero o medio los conocen, pero no logran identificarlos en fracciones no canónicas. Los estudiantes que se encuentran en nivel medio, tienen conocimientos sobre las fracciones, pero se les dificulta utilizar esos conocimientos en fracciones no canónicas o confundir procedimientos para resolver las preguntas. Los estudiantes que se encuentran en el nivel alto de conocimiento de fracciones, logran identificar los elementos de las fracciones para dar respuestas adecuadas a las preguntas, tienen ciertas dificultades más cercanas a descuidos.

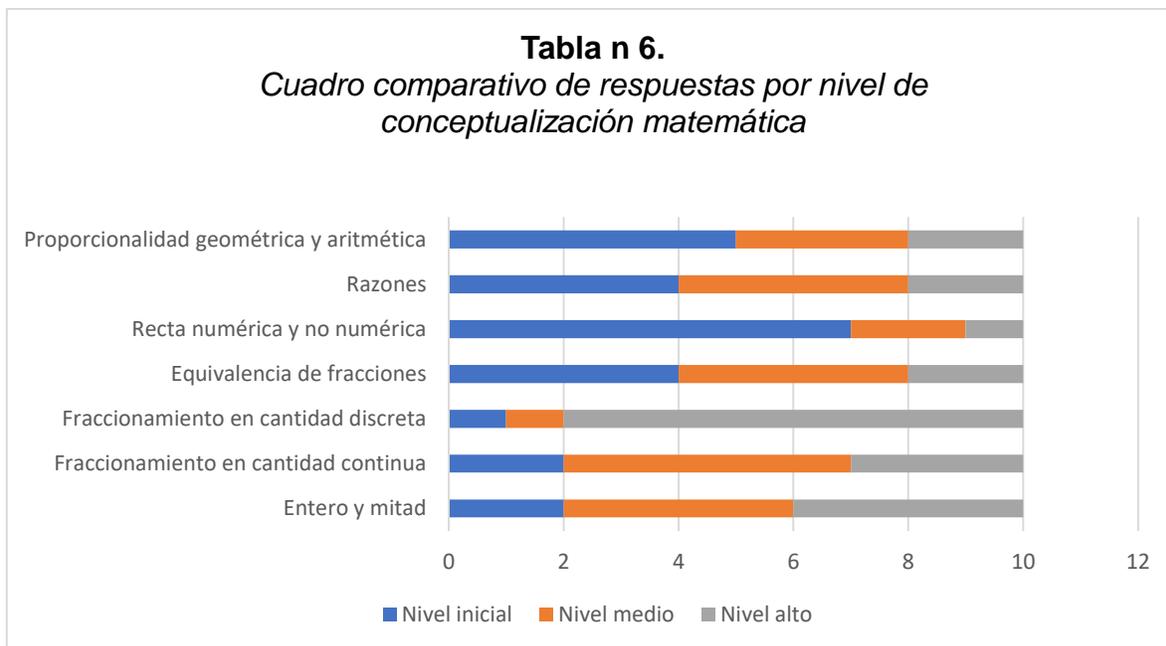


Esta gráfica muestra el porcentaje de respuestas por nivel de conceptualización matemática de todos los cuestionarios. Se observa que la mayoría se encuentra en el nivel inicial.

Los estudiantes que se encuentran en nivel inicial de conceptualización matemática, presentan dificultades para identificar fracciones no canónicas y dificultad con los conceptos matemáticos que se solicitan. Aquellos estudiantes que se encuentran en el nivel medio, logran identificar figuras canónicas, pero se les dificultan las no

canónicas, no logran aplicar sus conocimientos para identificar fracciones no canónicas por sí mismos, aunque, con ayuda pueden hacerlo. Tienen dificultad con aspectos como las divisiones de las figuras, la forma en que se han partido o la forma de la figura. Los estudiantes identificados en el nivel alto de conceptualización matemática de la representación de fracciones en cantidad continua, logran identificar sin dificultades las fracciones que representan las figuras, aplicar sus conocimientos para identificar figuras no canónicas y explicar cómo llegaron a la solución ellos mismos. En la siguiente tabla se puede apreciar mejor las variaciones entre los niveles de conceptualización matemática de los estudiantes por cada pregunta del cuestionario.

En la tabla 6 se puede observar el nivel de conceptualización matemática que tiene el grupo por idea matemática, se observa que, en la idea de entero, mitad, fraccionamiento en cantidad continua y en cantidad discreta, los estudiantes se encuentran entre los niveles medio y alto, pero en las otras ideas se encuentran en los niveles inicial y medio.



En esta tabla se presentan los niveles de conceptualización matemática por idea. Se puede observar las diferencias entre cada nivel y observar las ideas con mayor dificultad.

Las respuestas de nivel inicial en el fraccionamiento en cantidad continua presentaban dificultad para identificar el numerador y denominador, también hubo dificultad para diferenciar entre fracciones propias e impropias. En el nivel medio, la dificultad encontrada fue en las fracciones impropias, los estudiantes utilizaban la lógica de las fracciones propias para identificar las fracciones impropias, además, tenían dificultad para representar fracciones con figuras con partes iguales. Aquellas respuestas ubicadas en el nivel alto de apropiación matemática lograban identificar las fracciones propias y la estructura de la fracción, identificaban conjuntos de figuras que representaban fracciones impropias, con algunas dificultades en el conteo de partes, y la representación de fracciones lo podían hacer satisfactoriamente.

El fraccionamiento en cantidad discreta fue una de las ideas matemáticas en las que la mayoría de los estudiantes lograron respuestas de nivel alto. Solo un estudiante se identificó en el nivel bajo y otro más en el nivel medio, y las principales dificultades fueron en la escritura de las fracciones. Los estudiantes de nivel alto lograban identificar las fracciones que representaban los conjuntos de figuras, además, podían explicar sus respuestas.

En la idea de equivalencia de fracciones, muchas respuestas se ubicaron en el nivel inicial y medio. A menudo, debido al poco repaso de los temas, ya que se observan ciertos conocimientos de las ideas matemáticas, sin embargo, sus respuestas muestran dificultades para reconocer una fracción equivalente o encontrar equivalencias de fracciones en una secuencia. En el nivel medio, la principal dificultad era la identificación de figuras equivalentes, aunque figuras que representaban $\frac{1}{2}$ no presentaban dificultad. En el nivel alto, los estudiantes identifican las figuras que representan fracciones equivalentes y logran realizar secuencias de fracciones.

En la idea matemática de representación de fracciones en la recta numérica, los estudiantes de nivel inicial tuvieron dificultad para ubicar las fracciones en la recta numérica y no numérica, tenían dificultad para identificar la unidad y utilizaban la idea de fraccionamiento en cantidad continua para tratar de resolver la pregunta.

Los estudiantes que se encontraron en el nivel medio lograban identificar fracciones propias en la recta numérica y no numérica, se les facilitaba identificar fracciones como $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$, sin embargo, no lograban identificar las fracciones impropias. Cuando la recta tenía más de una unidad, los estudiantes no lograban ubicar las fracciones, tienen la noción de que ideas que pueden servir en las fracciones unitarias, funcionan en las fracciones impropias, como considerar que las fracciones que se ven más grandes son las más chiquitas. Solo un estudiante se identificó en el nivel alto de conceptualización matemática, él logró identificar la mayoría de las fracciones en la recta numérica y no numérica, como se puede apreciar en la figura 2. Se le dificultaron algunas fracciones impropias, pero utilizó la conversión a fracciones mixtas para solucionarlo.

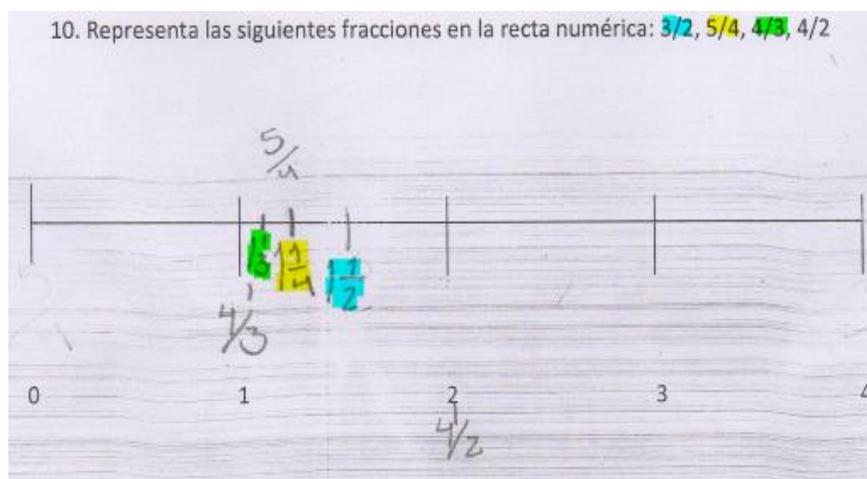


Figura n 2. Respuesta de un estudiante a la representación de fracciones en la recta numérica con fracciones impropias.

En la idea de razón, los estudiantes de nivel inicial tienen dificultad para identificar las respuestas, se identificó a dos estudiantes en ese nivel y no dieron ninguna respuesta. En el nivel medio, los estudiantes tienen dificultad para reconocer la relación entre fracciones y proporcionan respuestas intuitivas, consideran que el sabor del agua a naranja puede ir en función de la cantidad de agua o jugo de naranja, sin considerar la posible relación entre las dos proposiciones. En el nivel

alto, los estudiantes dan respuestas correctas, aunque se les dificulta utilizar operaciones para resolver la pregunta.

En la idea de proporcionalidad aritmética, los estudiantes de nivel inicial, tienen dificultad para identificar algún procedimiento e incluso, la información necesaria para poder resolver la pregunta. En esta idea, la mitad de los estudiantes tuvo respuestas de nivel inicial. Los estudiantes de nivel medio fueron una cuarta parte, con frecuencia, los estudiantes de este nivel entienden que deben seguir un procedimiento para poder resolver la pregunta, sin embargo, no logran utilizarlos adecuadamente. Los estudiantes de nivel alto reconocen el procedimiento que deben utilizar para resolver las preguntas, identifican los datos y entienden los valores que deben encontrar.

En la idea de proporcionalidad geométrica, los estudiantes lograban responder la pregunta en la que se les pedía hacer una figura del doble de tamaño al ejemplo. Por lo regular, contaban los cuadros para saber por cuánto debían aumentar la figura. En algunos casos, los estudiantes solo la hacían más ancha o más alta.

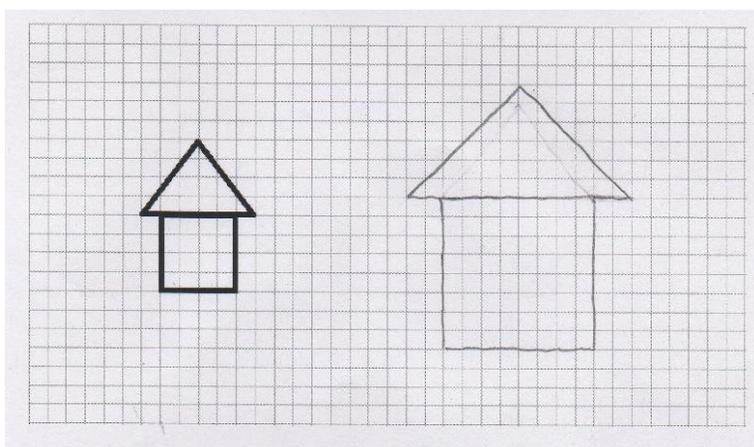


Figura n 3. Respuesta de estudiante a la pregunta de proporcionalidad geométrica.

Las siguientes tablas muestran los niveles de conceptualización matemática a partir de cada idea matemática abordada en el cuestionario, así como la descripción de cada nivel. Se incluyen fragmentos de entrevistas que nos permiten comprender mejor las respuestas de los estudiantes.

Tabla n 7*Niveles de conceptualización matemática por idea*

| Entero y mitad | | |
|---------------------------|---|-------------|
| Nivel de c. matemática | Descripción | Estudiantes |
| Inicial | En este nivel, los estudiantes no identifican ninguna figura que represente enteros o mitades. En las entrevistas hay respuestas como la siguiente. “...esta es una figura que está partida a la mitad, y dice que ‘la parte sombreada representa un entero’ y hay dos partes sombreadas, son dos enteros”. De acuerdo a la entrevista, la alumna al principio considera que los enteros no están partidos por la mitad, que deben ser completos | 2 |
| Medio | En este nivel los estudiantes tienen dificultad para identificar figuras que representan un entero o mitad en figuras no canónicas. Hubo respuestas como la siguiente. “...están partidas en muchas y no se podría marcar la mitad porque está como, separadas y podría ser que tengan que estar juntar para que se pueda hacer la mitad”. Se refiere a una figura dividida en 16 partes, las partes sombreadas no eran consecutivas. Considera que las figuras partidas en muchas no son mitades porque las partes no están juntas. | 4 |
| Alto | En este nivel, los estudiantes identifican mitades y enteros por las partes sombreadas de las figuras. | 4 |

En esta tabla se muestran los niveles de conceptualización matemática para la idea de entero y mitad. Se aprecia que la mayoría de los estudiantes se encuentran entre el nivel medio y alto de conceptualización. Ello muestra que, aunque varios estudiantes comprenden los conceptos de unidad y mitad, algunos más tienen dificultades con estos conceptos básicos de las fracciones. Los estudiantes de nivel inicial tienen dificultad para identificar mitades y enteros, no reconocer cómo podrían encontrarlos. Las dificultades de los estudiantes de nivel medio son con las figuras no canónicas, es decir, figuras que no son familiares para ellos. Los estudiantes en el nivel alto de conceptualización matemática, identifican las partes sombreadas de las figuras para determinar qué fracción es.

Tabla n 8*Niveles de conceptualización matemática por idea*

| Fraccionamiento en cantidad continua | | |
|---|---|---------------------------|
| Nivel de c. matemática | Descripción | Estudiantes en este nivel |
| Inicial | En este nivel los estudiantes tienen dificultad para identificar la fracción que representa a las figuras dadas, ya sean propias o impropias, también tienen dificultad para identificar el numerador y el denominador | 2 |
| Medio | En este nivel, los estudiantes logran identificar las figuras que representan fracciones propias, pero se les dificulta identificar la fracción que representa impropias o mixtas. Una respuesta en la entrevista fue la siguiente. “...8 partes por 3 figuras igual a 24, luego conté las partes sombreadas, 16, 16/24”. De acuerdo a lo mencionado en la entrevista, el estudiante identifica al numerador como la parte sombreada y al denominador como el número total de partes en que se divide la figura o las figuras. | 5 |
| Alto | En este nivel, los estudiantes identifican el denominador como las partes en que se dividió una figura, y el numerador como las partes sombreadas. En la entrevista, un estudiante respondió lo siguiente. “...1/4, este, lo puse porque son 4 partes y solo es una parte coloreada, pasa lo mismo con la otra y son 7 partes y solo coloreé dos”. De acuerdo a lo anterior, el estudiante entiende que el denominador es el número de partes en que se divide una figura y el numerador son las partes sombreadas | 3 |

En esta tabla se muestran los niveles de conceptualización matemática que tienen los estudiantes respecto al fraccionamiento en cantidad continua, se observa que la mayoría de los estudiantes se encuentran en un nivel medio, que muestra que tienen dificultad con la idea de las fracciones impropias. Los estudiantes en nivel bajo presentan dificultad con la relación de las fracciones con las figuras que las representan. Los estudiantes de nivel alto representan fracciones con figuras y comprenden que las partes deben ser iguales.

Tabla n 9*Niveles de conceptualización matemática por idea*

| Fraccionamiento en cantidad discreta | | |
|---|--|-------------|
| Nivel de c. matemática | Descripción | Estudiantes |
| Inicial | En este nivel, los estudiantes muestran dificultad con la representación de fracciones en cantidad discreta, para escribir la fracción que la representa o su representación en conjuntos de figuras. | 1 |
| Medio | En este nivel, los estudiantes presentan dificultad para formar las fracciones que representan conjuntos de figuras. | 1 |
| Alto | En este nivel, los estudiantes identifican la fracción que representa un conjunto de figuras, entienden al denominador como el total de figuras y al numerador como la cantidad que se debe encerrar. Cuando se le preguntó a un estudiante cómo resolvió la pregunta, respondió lo siguiente: "...dos de cuatro, uno de tres dice que uno y aquí son tres, uno, dos, tres, y pinté ese. Aquí uno, dos, tres, cuatro son las que están encerradas y aquí quedaron dos, pero en total aquí son seis, cuatro sextos". A partir de sus respuestas, se considera que este estudiante entiende al numerador como el número de figuras que se toman del denominador, el denominador es el total de figuras del conjunto. | 8 |

En esta tabla se muestran los niveles de conceptualización matemática referentes al fraccionamiento en cantidad discreta. Como puede apreciarse, la gran mayoría de estudiantes no presentan dificultades en esta idea matemática. Los estudiantes identifican en los conjuntos de figuras las fracciones que se representan. También logran identificar la cantidad de figuras que se deben representar a partir de una fracción dada. Se identificó a un estudiante en nivel bajo que no respondió la pregunta y uno más en nivel medio que no escribió las fracciones que representaban los conjuntos.

Tabla n 10*Niveles de conceptualización matemática por idea*

| Equivalencia de fracciones | | |
|-----------------------------------|--|-------------|
| Nivel de c. matemática | Descripción | Estudiantes |
| Inicial | <p>En este nivel, los estudiantes no logran identificar figuras que representen fracciones equivalentes. Un estudiante mencionó lo siguiente.</p> <p>“...En esa me confundí. Cómo eran equivalentes. Yo con los números me complicaba mucho y entonces con las imágenes me compliqué más. Sí lo sabía, pero luego se me fue la idea”.</p> <p>Con esta respuesta, se puede considerar que los estudiantes tienen conocimientos sobre fracciones, pero pueden olvidarlos si no los repasan.</p> | 4 |
| Medio | <p>En este nivel, los estudiantes identifican las fracciones equivalentes en figuras, pero se les dificultan las secuencias de fracciones equivalentes. En la secuencia de fracciones encuentran un patrón a seguir, pero se les dificulta identificar la secuencia adecuada. Durante la entrevista, un estudiante respondió lo siguiente.</p> <p>“...Aquí en el numerador aumentaba de uno y del numerador aumentaba de dos y de ahí me guie. Porque no necesariamente tiene que ser el mismo, sino de aquí sale la respuesta, y aquí le cambias el número, pero va aumentando lo mismo que aquí”.</p> <p>El estudiante explica que utilizó los ejemplos para saber cuánto aumentaba en cada caso. El numerador aumentaba de uno en uno y el denominador de dos en dos, en las secuencias aumentó las fracciones $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$ de uno en uno al numerador y de dos en dos al denominador.</p> | 4 |
| Alto | <p>En este nivel, los estudiantes logran identificar las fracciones equivalentes en secuencias y al comparar imágenes, pueden tener errores con las sumas, pero, en general, la secuencia es la adecuada.</p> | 2 |

En esta tabla se muestran los niveles de conceptualización matemática de los estudiantes respecto a la idea matemática de fracciones equivalentes. En el nivel inicial, no identificaban figuras que representaban fracciones y se les dificultaban las secuencias de fracciones equivalentes. En el nivel medio, se encuentran estudiantes que presentaban dificultades con las secuencias de fracciones. En el nivel alto, los estudiantes que reconocían las equivalencias de las fracciones ya sea en las figuras que representaban fracciones como en las secuencias de fracciones equivalentes.

Tabla n 11*Niveles de conceptualización matemática por idea*

| Representación de fracciones en la recta numérica y no numérica | | |
|--|--|-------------|
| Nivel de c. matemática | Descripción | Estudiantes |
| Inicial | En este nivel, los estudiantes no logran ubicar las fracciones o tienen dificultad para identificar las unidades. Los estudiantes tienen dificultad para comprender el fraccionamiento en la recta, se les dificulta identificar la unidad y las partes que en las que se debe dividir el segmento de recta. | 7 |
| Medio | En este nivel, los estudiantes logran identificar fracciones propias en la recta numérica, y no numérica, pero se les dificulta identificar fracciones impropias. En la entrevista, un estudiante respondió lo siguiente. “...Aquí, porque son la mitad del medio, aquí también puede ser 1/4, su mitad (señala 3/4). Serían... 2 de 4... cuatro balones y dos se poncharon, quedan dos cuartos... entonces 2/4 aquí ya llegó al dos de... de... todos los balones... 2/4. A, porque... 1, 2, 3... aquí el cuarto. 3/2 es más bajo porque aquí dice 1/2 y aquí... es que los que se ven más grandes son los más chiquitos. De menor a mayor, bueno estos se ordenan de menor a mayor, estos son los más grandes”. Se observa que el estudiante utiliza un razonamiento diferente al que debería utilizar para la representación de fracciones en la recta. | 2 |
| Alto | En este nivel, los estudiantes logran identificar la mayoría de las fracciones en la recta, tienen cierta dificultad con fracciones impropias, pero pueden utilizar fracciones mixtas para solucionar las preguntas. | 1 |

En esta tabla se muestran los niveles de conceptualización matemática de los estudiantes correspondientes a la representación de fracciones en la recta numérica y no numérica. La mayoría de los estudiantes se encuentran en el nivel bajo de conceptualización, las dificultades que presentan son principalmente de no reconocer la unidad. Además, se observó que se les dificultaba dividir la unidad en partes para ubicar las fracciones. Las fracciones impropias son representadas en la primera unidad. Los estudiantes de nivel medio lograban ubicar fracciones unitarias con mayor facilidad. Para responder las preguntas, utilizaban la lógica de las fracciones en cantidad continua, lo cual dificulta encontrar el resultado correcto. Los estudiantes de nivel alto identificaban las fracciones propias en la recta, se les dificultan las fracciones impropias, aunque comprenden que pueden utilizar fracciones mixtas en vez de las impropias.

Tabla n 12*Niveles de conceptualización matemática por idea*

| Fracción como razón | | |
|---------------------------------------|---|---------------------------|
| Nivel de conceptualización matemática | Descripción | Estudiantes en este nivel |
| Inicial | En este nivel, los estudiantes no identifican la relación que existe entre las fracciones dadas | 4 |
| Medio | En este nivel, los estudiantes tienen dificultad para reconocer la relación entre fracciones y proporcionan respuestas intuitivas. Un estudiante respondió lo siguiente en la entrevista. <p>“...Porque... aquí me pareció que... que en está, no sé, el sabor a naranja es más que aquí pero como aquí es, como aquí es la mitad y es más poquita el agua, entonces sería, la otra. Aquí hay más agua y se convierte más agua a naranja”.</p> <p>Las respuestas de los estudiantes son intuitivas y no utilizan procedimientos matemáticos para determinar si sus conjeturas son ciertas.</p> | 4 |
| Alto | En este nivel, los estudiantes identifican la respuesta correcta, aunque se les dificulta utilizar un procedimiento para resolver las preguntas dadas. | 2 |

Esta tabla muestra el nivel de conceptualización matemática que los estudiantes presentan sobre las fracciones como razones. Se puede observar que es una idea con varias dificultades, los estudiantes que se encuentran en el nivel alto de esta clasificación, tienen aún dificultad para utilizar un procedimiento matemática para justificar sus respuestas. Los estudiantes en nivel medio solo pueden responder de forma intuitiva y por lo que aprecian de las imágenes. Los estudiantes de nivel bajo no logran identificar la relación que existe entre dos cantidades. En general, los estudiantes no conocen un procedimiento que les ayude a responder las preguntas, este tema se les dificulta porque no lo han estudiado lo suficiente o no han profundizado en él.

Tabla n 13*Niveles de conceptualización matemática por idea*

| Proporcionalidad geométrica y aritmética | | |
|---|---|------------------|
| Nivel de c. matemática | Descripción | # de estudiantes |
| Inicial | En este nivel, los estudiantes no logran utilizar el procedimiento adecuando, o las operaciones necesarias para resolver el problema. | 5 |
| Medio | En este nivel, los estudiantes no identifican del todo el procedimiento o la información necesaria para resolver las preguntas, solo una parte. Un estudiante respondió lo siguiente durante la entrevista. "...Porque me piden calcular la distancia real de cada hotel y para saberlo, yo sentí que era 200 entre 8 y da 25, y este luego lo multipliqué por 5 y salió 115. mmm bueno, estoy pensando que debería ser una multiplicación, 200 por 8 y mejor, que, la división es cuando quieres repartir". El estudiante tiene nociones sobre la fórmula para resolver el problema, sin embargo, tiene dificultad para comprender la naturaleza de los datos. | 3 |
| Alto | En este nivel, los estudiantes reconocen un procedimiento para encontrar la solución. Una de las respuestas en la entrevista fue la siguiente. "...Lo saqué multiplicando esto por eso, entonces, si 5 cm representan 200 m de la realidad, son aquí 200 y como aquí son 8 cm se le suman 120 es casi la mitad, entonces si los sumamos, nos da 320". El estudiante considera que debe encontrar el valor de 8 cm, teniendo en cuenta que ya hay 5 cm, utiliza un procedimiento que le da una respuesta satisfactoria. | 2 |

En esta tabla se muestra el nivel de conceptualización matemática de los estudiantes respecto a la proporcionalidad geométrica y aritmética. Las dificultades que se reconocen en los estudiantes se refieren a los procedimientos que deben utilizar para resolver los problemas. Los estudiantes en el nivel inicial tienen dificultad para reconocer algún procedimiento. Los estudiantes de nivel medio utilizan algún procedimiento, que a veces está incompleto o con dificultad con los datos. Los estudiantes de nivel alto comprenden no solo los datos y lo que se les pide, conocen los procedimientos o tienen nociones de cómo poder resolverlo.

6.3.3 Análisis de resultados a partir de las estrategias de resolución de problemas

En esta parte se muestra el análisis que se realizó a los cuestionarios de los estudiantes, a partir de las estrategias de resolución de problemas que utilizaron. A continuación, se muestra la tabla referente a las estrategias de resolución utilizadas por los estudiantes de acuerdo a las ideas matemáticas planteadas.

Tabla n 14

Estrategias de resolución de problemas por idea matemática

| Idea de entero y mitad | |
|---|---|
| Estrategias de resolución | Descripción |
| Reconocimiento de mitades y enteros o unidades | Reconocen la idea de mitad y entero en figuras canónicas y no canónicas. Pueden identificar lo que representan las figuras por el sombreado. En la entrevista, un estudiante respondió lo siguiente. “... Aquí se dividió a la mitad y aquí dice ‘la parte sombreada’, y aquí está sombreada y aquí no está sombreada”. De acuerdo a lo anterior, se considera que estos estudiantes pueden identificar las figuras de acuerdo a la parte sombreada que representa la fracción dada. |
| Dificultad con la fracción que se representa | En esta categoría, los estudiantes identifican las partes en las que se dividen las figuras, pero se le dificulta expresar la fracción que las representa. |
| Reconocimiento de mitad y entero en figuras canónicas | En esta categoría, los estudiantes identifican las figuras que representan mitades y enteros si son figuras familiares para ellos. Un estudiante respondió lo siguiente en la entrevista. “...Están partidas en muchas y no se podría marcar la mitad porque está como, separadas y podría ser que tengan que estar juntas para que se pueda hacer la mitad”. Para esta estudiante, las partes de una figura deben estar juntas para poder formar una mitad, aunque las partes blancas y las sombreadas sean la misma cantidad. |
| Dificultad para identificar enteros y mitades | En esta categoría los estudiantes no logran identificar las figuras que representan enteros. Un estudiante que se ubica en este nivel respondió lo siguiente durante la entrevista: “...Porque un entero podría decirse que no tiene que estar partido a la mitad, porque un entero nada más, este, es uno completo no hay que separarlo”. |

En esta tabla se muestran las diferentes estrategias de resolución que los estudiantes utilizaron para resolver las preguntas planteadas en el cuestionario inicial de fracciones en las ideas de entero y mitad. Una de las dificultades mostradas en estas ideas es la referente a las figuras no canónicas que se utilizaron en el cuestionario, los estudiantes tienen dificultad con dichas figuras y no las identifican como enteros o mitades según sea el caso.

Tabla n 15*Estrategias de resolución de problemas por idea matemática*

| Fraccionamiento en cantidad continua | |
|---|---|
| Estrategias de resolución | Descripción |
| Reconocimiento de fracciones en cantidad continua | En esta categoría, los estudiantes entienden al numerador como las partes que se deben colorear y al denominador las partes iguales en que se divide la figura. La siguiente es las respuestas de un estudiante en la entrevista: "...1/4, este, lo puse porque son 4 partes y solo es una parte coloreada, pasa lo mismo con la otra y son 7 partes y solo coloreé dos". |
| Reconocimiento de fracciones propias | En esta categoría, el estudiante entiende al denominador como las partes en que está dividida una figura o conjunto de figuras y al numerador como las partes que están sombreadas de esa figura o conjunto de figuras. No diferencia entre fracciones propias e impropias. En la entrevista, se le preguntó a un estudiante sobre un conjunto de figuras que representaban $3/2$ y esta fue su respuesta: "...como vi que dos era una (una, dos, tres de cuatro) tres cuartos". En el conjunto de figuras que representaban $16/8$ dijo: "... (8, 8 por $3= 24$) 24 y luego conté las partes sombreadas, (1-16), $16/24$ ". De acuerdo a su respuesta, el estudiante utiliza la lógica de las fracciones propias para identificar las fracciones impropias. Tal que identifica al numerador como la parte sombreada y al denominador como el número total de partes en que se divide la figura o las figuras. |
| Dificultad con fracciones en cantidad continua | En esta, el estudiante no identifica la fracción que representa a ninguna figura. |
| Dificultad para representar fracciones | Los estudiantes en esta categoría entienden al numerador como las partes que se deben colorear de una figura y al denominador como partes en las que se divide, pero se les dificulta encontrar una figura que puedan dividir en partes iguales. Un estudiante dio la siguiente respuesta durante la entrevista: "...La dividí en círculo, o sea, la pude haber hecho de otra forma. El rectángulo dividido acá y el cuadrado acá, y el círculo acá, la considero más pareja y aquí hubiera quedado mejor". A partir de lo mencionado en la entrevista, se considera que el estudiante entiende que las figuras se dividen de acuerdo al denominador y se colorean de acuerdo al numerador, se da cuenta que el círculo no es la mejor figura para representar una fracción con denominador impar porque la figura no queda bien dividida. |
| Dificultad para diferenciar fracciones propias de las impropias | En ella, los estudiantes entienden al denominador como la cantidad de partes que se deben colorear y al numerador como la cantidad de partes que quedan en blanco, sin diferenciar entre fracciones propias e impropias. |

En esta tabla se muestran las diferentes estrategias de resolución que los estudiantes utilizaron para responder las preguntas del cuestionario inicial. En ella se aprecia que tienen dificultad con las fracciones impropias, al identificar fracciones impropias o al representarlas.

Tabla n 16*Estrategias de resolución de problemas por idea matemática*

| Fraccionamiento en cantidad discreta | | |
|--|-----|---|
| Estrategias de resolución | de | Descripción |
| Identificación de fracciones en cantidad discreta | de | En esta categoría, los estudiantes entienden como el numerador las figuras que se deben encerrar y el denominador la cantidad de figuras. Durante la entrevista, un estudiante mencionó lo siguiente: "...En este modo nos habían enseñado eso, dos de cuatro, uno de tres dice que uno y aquí son tres, uno, dos, tres, y pinté ese. Aquí uno, dos, tres, cuatro son las que están encerradas y aquí quedaron dos, pero en total aquí son seis, cuatro sextos". A partir de sus respuestas, se considera que este estudiante entiende al numerador como el número de figuras que se toman del denominador, el denominador es el total de figuras del conjunto. |
| Identificación de fracciones, dificultad para expresar la fracción | de | En esta categoría, el estudiante entiende que del grupo de figuras se debe encerrar el número que se pide, pero se le dificulta identificar la fracción correspondiente. |
| Dificultad de fracciones en cantidad discreta | con | En esta categoría se considera que a los estudiantes se les dificulta expresar fracciones en cantidad continua o su representación en conjuntos de figuras. |

En esta tabla se muestran las estrategias de resolución que los estudiantes utilizan para responder las preguntas del cuestionario, referentes a la representación de fracciones en cantidad discreta. Esta es una de las ideas en las que los estudiantes tuvieron mejor desempeño. Los estudiantes lograron identificar la fracción que representaba cada uno de los conjuntos de figuras, así como expresar la fracción que representaban. Uno de los estudiantes que no respondió correctamente la pregunta, tuvo dificultad para identificar las fracciones que representaban las figuras.

Tabla n 17*Estrategias de resolución de problemas por idea matemática*

Equivalencia de fracciones

| Estrategias de resolución | Descripción |
|--|--|
| Identificación de fracciones equivalentes | <p>En esta categoría, los estudiantes logran identificar las figuras equivalentes al observar las imágenes en las columnas. La respuesta de un estudiante en la entrevista fue la siguiente.</p> <p>“...Aquí hay un círculo completo y aquí es como de la misma figura y están las dos pintadas y... pero está partida. Aquí igual son círculos, pero no, hay partes que no están pintadas y aquí tampoco”.</p> <p>El estudiante identifica las figuras que son equivalentes al observar que las partes sombreadas son del mismo tamaño.</p> |
| Dificultad para identificar fracciones equivalentes | <p>En esta categoría, los estudiantes tienen dificultad para identificar la figura que representa una fracción equivalente. Un estudiante mencionó lo siguiente en la entrevista.</p> <p>“En esa me confundí. Cómo eran equivalentes. Yo con los números me complicaba mucho y entonces con las imágenes me compliqué más. Sí lo sabía, pero luego se me fue la idea”.</p> <p>Este estudiante se confunde con las figuras que se mostraron en el examen, aunque con una breve explicación logró identificar las figuras que representaban fracciones equivalentes.</p> |
| Identifica equivalencias de entero | <p>En esta categoría, los estudiantes identifican la figura equivalente cuando es un entero, pero se le dificulta identificar otras figuras que representan otras fracciones.</p> |
| Identificación de secuencia de fracciones | <p>En esta categoría, los estudiantes encuentran las secuencias de fracciones al observar el ejemplo.</p> |
| Dificultad para encontrar la secuencia de fracciones equivalente | <p>En esta categoría, los estudiantes tienen dificultad para encontrar la secuencia para las fracciones equivalentes, también pueden identificar las secuencias con el numerador y denominador por separado.</p> |

En esta tabla se presentan las estrategias de resolución de los estudiantes para responder a las preguntas sobre equivalencia de fracciones. Existen estrategias para identificar fracciones equivalentes a partir de imágenes y otras para identificar una secuencia de fracciones equivalentes. Las secuencias de fracciones equivalentes son las que presentaron más dificultades para ser respondidas.

Tabla n 18*Estrategias de resolución de problemas por idea matemática*

| Representación de fracciones en la recta numérica y no numérica | |
|---|---|
| Estrategias de resolución | Descripción |
| Identificación de fracciones en la recta numérica | En esta categoría, los estudiantes identificaron las fracciones en la recta, en algunos casos, se les dificultó identificar las fracciones en la recta numérica con dos unidades, pero en la recta con cinco unidades logaron identificar las fracciones al convertirlas de fracciones impropias a mixtas. |
| Identificación de fracciones propias en la recta numérica | En esta categoría, los estudiantes identifican fracciones propias en la recta numérica y no numérica, pero se le dificulta identificar fracciones impropias en la recta numérica. |
| Dificultad con fracciones en la recta numérica | En esta categoría, los estudiantes no ubican las fracciones correctamente en la recta numérica y no numérica, tienen dificultad para ubicar fracciones propias e impropias. Un estudiante respondió lo siguiente durante la entrevista: <p>“...3/2 es más bajo porque aquí dice 1/2 y aquí... es que los que se ven más grandes son los más chiquitos. De menor a mayor, bueno estos se ordenan de menor a mayor, estos son los más grandes”.</p> <p>Este estudiante utiliza una idea recurrente cuando se enseñan fracciones propias, entre más grande el número más pequeña la fracción. Sin embargo, cuando hay fracciones impropias, es difícil aplicar ese mismo principio.</p> |

En esta tabla se muestran las estrategias de resolución que los estudiantes utilizaron para responder las preguntas sobre representación de fracciones en la recta numérica y no numérica. Dichas estrategias giraron en torno a las dificultades que los estudiantes presentaban para reconocer la unidad y la identificación de las fracciones impropias en la recta.

Tabla n 19*Estrategias de resolución de problemas por idea matemática*

| Fracción como razón | |
|---|--|
| Estrategias de resolución | Descripción |
| Identificar que la mezcla tiene sabor similar | En esta categoría, los estudiantes identifican que las mezclas tienen un sabor similar |
| Identificar entre más naranja más sabor tiene | En esta categoría, los estudiantes consideran que entre más naranja más sabor tiene el agua. "Porque... aquí me pareció que... que en está, no sé, el sabor a naranja es más que aquí pero como aquí es, como aquí es la mitad y es más poquita el agua, entonces sería, la otra". Las respuestas de los estudiantes a este tipo de preguntas son intuitivas, no realizan ningún procedimiento que les ayude a verificar sus suposiciones. |
| Identificar que entre menos agua más sabe a naranja | En esta categoría, los estudiantes consideran que entre menos agua sabe más a naranja. Las respuestas de los estudiantes a este tipo de preguntas son intuitivas, no realizan ningún procedimiento que les ayude a verificar sus suposiciones. |
| Sin reconocimiento de razones | En esta categoría, los estudiantes no respondieron con ninguna oración |
| Reconocimiento de razones | En esta categoría, los estudiantes identifican que a las niñas les puede tocar más pizza. Pero no se observa qué procedimiento utilizaron para responder. |
| Dificultad para reconocer razones | En esta categoría, los estudiantes tienen dificultad para identificar a quienes les tocaría más pizza, no utilizan ningún procedimiento para resolver la pregunta. La respuesta de un estudiante sobre cómo resolvió la pregunta fue la siguiente. |

En esta tabla se muestran las estrategias de resolución que los estudiantes utilizaron para responder a las preguntas de fracciones como razón. Se observa que las estrategias son intuitivas y no se utiliza por lo regular algún procedimiento matemático para llegar a la respuesta o para comprobar sus conjeturas.

Tabla n 20*Estrategias de resolución de problemas por idea matemática*

Proporcionalidad geométrica y aritmética

| Estrategias de resolución | Descripción |
|---|---|
| Comprensión de proporcionalidad geométrica | En esta categoría, los estudiantes entienden que una figura del doble de tamaño es a lo largo y ancho. |
| Comprensión de proporcionalidad geométrica en una dimensión | En esta categoría, los estudiantes entienden el doble como el aumento de tamaño en una dirección, a lo largo o a lo ancho. Los estudiantes que dieron respuestas en esta categoría, consideran que el aumento de tamaño es hacia los lados o hacia arriba, pero no en las dos dimensiones. |
| Dificultad con la proporcionalidad | En esta categoría, los estudiantes tienen dificultad para identificar lo planteado en la pregunta y no la responden. |
| Resolución de problemas de proporcionalidad aritmética | En esta categoría, los estudiantes entienden el valor faltante para resolver el problema y reconocen un procedimiento para encontrarlo. |
| Procedimiento con dificultad en utilización de datos | En esta categoría, el estudiante comprende que existe un procedimiento para resolver el problema, pero se le dificulta acomodar los datos para realizar las operaciones. Una de las respuestas en la entrevista fue la siguiente. “...Me piden calcular la distancia real de la playa al hotel y para saberlo, yo sentí que era 200 entre 8 y da 25, y este luego lo multipliqué por 5 y salió 115”. Este estudiante no identifica los datos que debe utilizar durante el procedimiento de resolución de la pregunta. |

En esta tabla se muestran las estrategias de resolución de problemas para responder a las preguntas de proporcionalidad geométrica y aritmética. En la proporcionalidad geométrica, la gran mayoría de estudiantes no tuvo dificultades para responder, sin embargo, en la proporcionalidad aritmética, los estudiantes presentaban dificultad para reconocer el procedimiento que debían utilizar para llegar a la solución.

Las tablas anteriores muestran los niveles de conceptualización matemática que tienen los estudiantes respecto a las diferentes ideas matemáticas trabajadas en el cuestionario inicial de fracciones. Como se puede observar, los estudiantes presentan dificultades en ideas básicas de las fracciones, aunque también presentan habilidades en otras.

6.3.4 Consideraciones sobre las estrategias de resolución de problemas de los estudiantes

Como se muestra en las tablas anteriores, los estudiantes tienen diversas estrategias de resolución de problemas para cada idea matemática abordada en el cuestionario inicial de fracciones. Estas estrategias corresponden también, al nivel de conceptualización matemática que tengan los estudiantes.

De acuerdo a las tablas, los estudiantes entienden la idea de entero y mitad, aunque presentan problemas con las figuras canónicas. La mayoría de los estudiantes se encuentran en los niveles de conceptualización matemática alto y medio, en el inicial solo algunos estudiantes.

En el fraccionamiento en cantidad continua, los estudiantes logran representar figuras a partir de las fracciones proporcionadas, aunque tienen dificultad con las fracciones impropias. La mayoría se encuentra en un nivel medio de conceptualización matemática. Los estudiantes que se encuentran en el nivel inicial son pocos y sus principales dificultades son las de encontrar una figura que represente adecuadamente las fracciones y que pueda ser dividida en partes iguales. Casi todos usan la lógica de las fracciones propias en las impropias.

En el fraccionamiento en cantidad discreta se encontró que los estudiantes tienen pocas dificultades, solo un estudiante tuvo un problema relacionado a la fracción que representan y otro más no respondió la pregunta. Los estudiantes entienden que el conjunto de figuras representa al denominador y las figuras señaladas o encerradas son las que representan al numerador.

En lo referente a las fracciones equivalentes, los estudiantes presentan problemas para identificar las equivalencias a partir de ejemplos, se les dificulta identificar figuras que representan fracciones equivalentes y las secuencias de fracciones les

resultan confusas. Sin embargo, muchos estudiantes se encuentran en un nivel de conceptualización matemática alto, casi la mitad de ellos, logró identificar las fracciones equivalentes.

En las fracciones en la recta (numérica y no numérica) los estudiantes tuvieron varias dificultades. Por ejemplo, al identificar la unidad, así como con las fracciones impropias. Solo un estudiante se identificó en el nivel alto de conceptualización matemática y 8 se encontraron en el nivel inicial. Varios estudiantes solo podían encontrar fracciones unitarias como $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$, las demás se les complicaban.

En las razones de fracciones, los estudiantes tenían dificultad para identificar un procedimiento matemático para resolver las preguntas, en vez de ello, utilizaban la intuición y sus suposiciones. Aunque muchos tenían respuestas satisfactorias, cuando se les cuestionó sobre sus procedimientos, no podían describirlo.

En las preguntas de proporcionalidad, se encontró que los estudiantes tienen dificultades para encontrar los datos necesarios para resolver las preguntas. Principalmente, el procedimiento lo desconocen o realizan solo algunos pasos. Para profundizar en las respuestas de los estudiantes y comprender mejor sus procedimientos, se realizaron entrevistas clínicas piagetianas con algunos de ellos, a continuación, se muestran los resultados.

6.3.5 Análisis de las entrevistas clínicas piagetianas

En esta parte se muestra el análisis que se realizó a partir de las respuestas de los estudiantes en la entrevista clínica piagetiana. La entrevista derivó de las respuestas de los estudiantes al cuestionario inicial de fracciones. En la entrevista se buscó comprender los procedimientos, concepciones, estrategias que utilizaron los estudiantes para resolver las preguntas del cuestionario de fracciones, de tal forma que los estudiantes pudieran explicar el porqué de sus respuestas. Y a partir de los argumentos dados por los estudiantes a las preguntas, se puede indagar sobre las ideas que el estudiante tenía sobre ese contenido escolar.

De acuerdo a Delval (2011) los tipos de respuesta de los estudiantes a la entrevista clínica pueden ser de cinco tipos. En este estudio encontramos algunas de ellas que

a continuación nos referimos. La primera respuesta encontrada se denominada “respuesta espontánea”, ésta refiere a la respuesta que el niño da de manera espontánea sin intervención del entrevistador. La respuesta de tipo desencadenada refiere a las respuestas que se generan a lo largo del interrogatorio, que es resultado de una elaboración de sujeto y está en acorde con su lógica de pensamiento. En este estudio se encontraron esos dos tipos de respuestas que a continuación se describen.

En la siguiente figura, se puede observar la respuesta de un estudiante a la pregunta número 1. Dicho estudiante coloca información debajo de las figuras que considera son las fracciones que representan cada figura. Una primera conjetura fue que el estudiante respondió con el numerador y el denominador invertidos. Las fracciones que colocó debajo de los cuadrados sin sombreado tienen cero en el denominador.

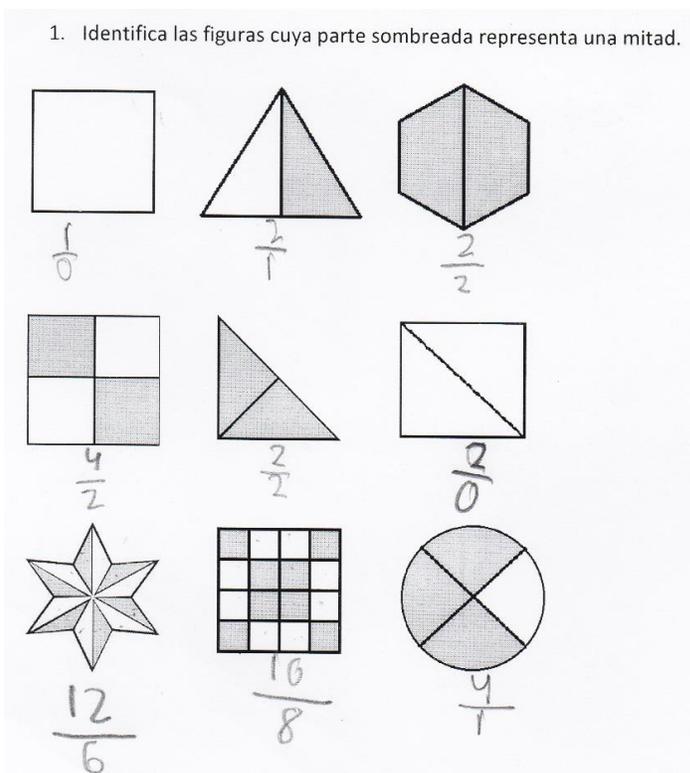


Figura n 4. Respuesta de un estudiante a la primera pregunta del cuestionario inicial de fracciones

En la imagen anterior se observa que el estudiante coloca la fracción que considera que representa cada figura. Sin embargo, la pregunta solicita que se identifiquen las figuras que representan una mitad, al no identificar cuáles figuras él consideró que representan medios, se quedó como una pregunta incompleta.

En la siguiente tabla se muestra un fragmento de la entrevista realizada a ese mismo estudiante. Se puede apreciar el razonamiento que sigue para resolver las preguntas. Este fragmento nos brinda información muy valiosa para comprender los procedimientos que los estudiantes utilizan, las fuentes de información y los modelos que siguen para responder a cada una de las preguntas.

Tabla n 21

Fragmento de entrevista con estudiante

| | |
|--|--|
| Entrevistador: Daniel | <i>Nombre del estudiante: Ale</i> |
| Fecha de entrevista: diciembre | <i>Edad: 11 años</i> |
| Lugar de entrevista: escuela | <i>Grado: 5º</i> |
| Buenas tardes, ¿cómo estás? | <i>Bien ¿y tú?</i> |
| Muy bien. Me gustaría hacerte preguntas sobre tus respuestas al cuestionario. La primera pregunta, en el examen nos decía que identificaríamos las figuras cuya parte sombreada, eh, representara la mitad, ¿Me podrías decir cómo le hiciste? | <i>Emm, yo mmm, yo me guie por mis enseñanzas de los libros, me guie por las páginas y cómo me enseñaron los maestros.</i> |
| Muy bien, entonces aquí ¿cómo le hiciste? | <i>Este, aquí, eh, es un... Esto porque, ah, cómo decirlo, ah...</i> |
| O sea, es una figura | <i>Sí, es una figura, como en este que es un dos, este, aquí está partida a la mitad y en una parte está relleno y en otra no, y es por lo que llegué...</i> |
| Entonces, ¿qué representa por ejemplo el 2? | <i>Emm, 2, 2, 2 partes que fueron partidas en mitades como...</i> |
| ¿y el uno? | <i>Una parte que no está coloreada</i> |
| Ok, muy bien ¿y en esta? | <i>Las dos partes que sí están coloreadas</i> |
| Ok. Y de estas tres figuras ¿tú identificaste alguna que represente 1/2 o una mitad? | <i>Sí, el triángulo, porque representa un dos</i> |

En esta tabla se muestra lo que un estudiante mencionó durante una entrevista clínica piagetiana.

Este estudiante reconoce que las figuras están divididas en partes y las partes representan fracciones, sin embargo, no reconoce la forma correcta para escribir las fracciones, invierte el numerador y denominador. También usa un cero cuando no hay partes sombreadas. Utiliza la forma “un dos” para referirse a “ $\frac{1}{2}$ ”. Tiene la habilidad de reconocer la figura que representa $\frac{1}{2}$ de las otras dos que no. Este estudiante pasó de estar considerado en el nivel inicial de conceptualización matemático al nivel medio. En la siguiente figura se puede apreciar la respuesta de una estudiante cuando se le pidió encontrar figuras equivalentes.

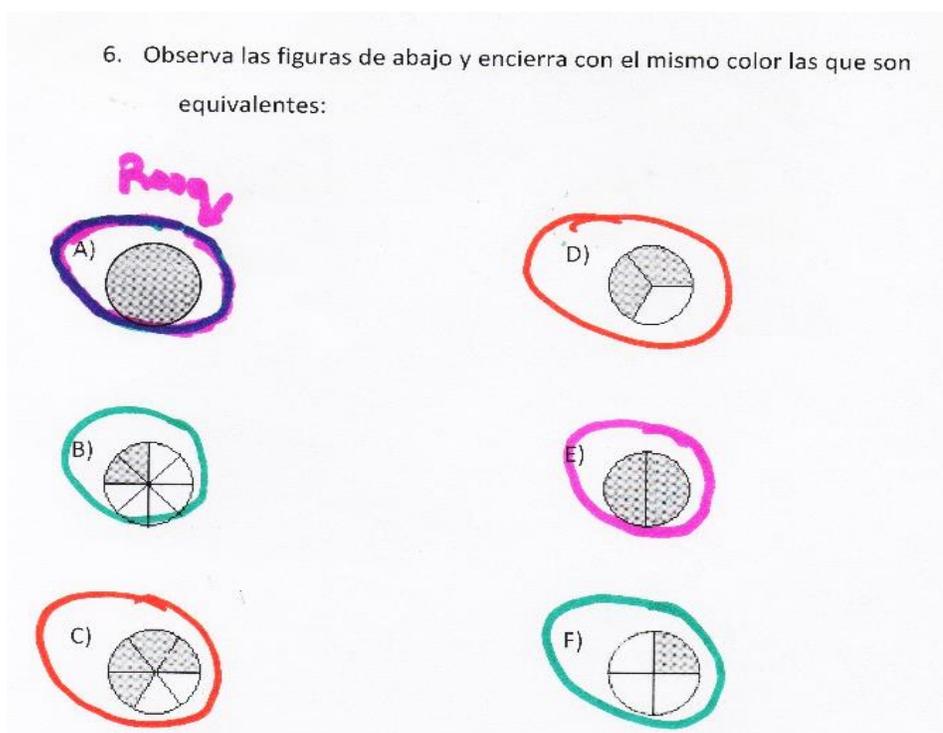


Figura n 5. Respuesta de un estudiante a una pregunta del cuestionario inicial de fracciones

A partir de su respuesta, podemos comprender que este estudiante logra identificar las figuras que representan fracciones equivalentes. En el siguiente fragmento de entrevista se puede observar la lógica que sigue para responder esta pregunta.

Tabla n 22

Fragmento de entrevista con estudiante

| | |
|---|--|
| Entrevistador: Daniel | <i>Nombre del estudiante: Andy</i> |
| Una de tus respuestas fue que “a” con “e” son equivalentes. | Sí. |
| ¿Me podrías decir por qué? | <i>Porque eh, aquí hay un círculo completo y aquí es como de la misma figura y están las dos pintadas y, pero está partida.</i> |
| Ok, ¿y esta otra? Con esta otra. | Sí |
| ¿Por qué? | <i>Porque aquí igual son círculos, pero no, hay partes que no están pintadas y aquí tampoco.</i> |
| Y es más o menos lo mismo, ¿y esta otra? | <i>Ahí la parte, así, eso como si las chiquitas no existieran y las demás, estaría esta, esta y esta, y estas como si estuvieran sombreadas.</i> |
| Ok ¿y esta otra? | <i>Esa porque también es como si estuviera nada más así y hay una parte que es blanca y las otras dos que están sombreadas</i> |

Esta tabla muestra las respuestas de un estudiante durante una entrevista clínica piagetiana sobre la idea de equivalencia de fracciones.

Esta estudiante toma las partes sombreadas y aquellas en blanco para determinar cuáles son equivalentes, considera más importante el espacio sombreado o blanco que las líneas de división de las partes. Se puede apreciar que no utilizan números fraccionarios para responder las preguntas, en vez de eso, utilizan las áreas de las figuras para compararlas. En el fragmento de entrevista, la estudiante no menciona ninguna fracción o alusión a medios, tercios o cuartos.

6.3.6 Análisis de la entrevista con la profesora

Se entrevistó a la profesora de sexto grado de la escuela donde se llevó a cabo la investigación y que está a cargo del grupo de estudiantes participantes del estudio. La entrevista se realizó a partir de una serie de preguntas preestablecidas, que guiaron la sesión. Se utilizaron cinco categorías para las preguntas realizadas.

- Categoría 1.- Historia de vida relacionada con la elección de su profesión.
- Categoría 2.- Rescate de experiencia docente.
- Categoría 3.- Fracciones en el libro de desafíos matemáticos de sexto.
- Categoría 4.- Materiales utilizados.
- Categoría 5.- Evaluación de los conocimientos de fracciones.

En las siguientes líneas se describe lo que la profesora respondió en cada categoría.

6.3.6.1 Categoría 1.- Historia de vida relacionada con la elección de su profesión

La profesora mencionó que una de las razones para ser profesora fue su experiencia con las maestras que no daban las clases como ella hubiera esperado. Considera un estímulo para su trabajo a los adolescentes porque quisiera guiarlos en su camino a los estudios más avanzados. Considera que la labor del profesor es facilitar el camino de los estudiantes. Ha observado que la Secretaría de Educación Pública coloca muchas barreras institucionales para utilizar métodos diferentes y que el libro de texto no sirve para abordar los temas propuestos.

Considera que las fracciones en este grado deben abordarse más tiempo porque hay muchos temas que se les dificultan a los estudiantes. Los temas con los que los estudiantes observó que tienen más dificultades, son el mínimo común denominador, escalas, porcentajes y recta. En este último tema menciona que la dificultad radica en que no conceptualizan la recta como una unidad.

6.3.6.2 Categoría 2.- Rescate de experiencia docente

La profesora mencionó en esta categoría, que cada grado es un reto por las características de los estudiantes. Asegura que prefiere trabajar con estudiantes más grandes por su carácter y la forma de comunicarse con ellos. Considera que los temas que revisa en la materia de matemáticas deben ser vistos desde lo básico para que se puedan desarrollar métodos de trabajo más eficientes para los estudiantes.

6.3.6.3 Categoría 3.- Fracciones en el libro de desafíos matemáticos de sexto

Para la profesora, la mejor forma de enseñar las fracciones a los estudiantes es darles una introducción de cómo resolver los problemas que se les plantearán. Así, los temas como las escalas, no se les dificultarán tanto. Se le mostró una lección del libro donde se pedía que realizaran una tarea de escalas. El contenido a aprender es el cálculo de distancias reales a través de la medición aproximada de un punto a otro en un mapa. La actividad se presenta con la consigna de trabajar en equipo para determinar la distancia entre puntos de una imagen. Se presentan los puntos a identificar, luego se presenta un mapa con los lugares marcados. No

se dan más herramientas. El libro pide que el profesor utilice ejemplos de equivalencias con metros y kilómetros. A partir de eso se espera que el estudiante encuentre un método para responder las preguntas. La profesora mencionó que para esta lección tuvo que explicarles qué datos se buscaba obtener y cómo se debían encontrar.

Considera que utilizar material manipulable es una muy buena forma para que los estudiantes comprendan los temas trabajados. Una razón para que los estudiantes no logren responder adecuadamente se relaciona con la falta de lectura de lo que se pide realizar, además de que los estudiantes no observan los verbos operativos. En el tema de porcentajes, la profesora reconoció que los estudiantes logran obtener los porcentajes, pero se les dificulta restarlos del total para obtener precios con descuento.

En la representación de fracciones en la recta, la profesora observó que se les dificulta identificar la unidad, debido al cambio de concepto, es decir, pasar de fracciones en cantidad continua a fracciones en la recta. En general, una dificultad que los estudiantes tienen es que ven a las fracciones como dos números separados y no como uno solo.

6.3.6.4 Categoría 4.- Materiales utilizados

La profesora, además del libro de texto de la SEP, utiliza un libro de apoyo en el que se encuentran otras actividades y ejemplos con mejores explicaciones a su parecer. Para trabajar los temas, pide a los estudiantes que respondan los problemas del libro por ellos mismos, entonces, les explica aquello que no comprendieron o les muestra otro método que sea menos complicado.

Respecto al libro de desafíos de la SEP, la profesora considera que dicho libro es una buena idea, sin embargo, los problemas no están planteados de una manera adecuada, no se entiende la información o viene incompleta. No sirven para que el estudiante aprenda por sí solo. Considera necesarios más ejemplos en los libros de texto, además de ejercicios porque las fracciones son cuestión de práctica. Opina que los libros deberían ser más claros y que los temas deberían llevar una mejor secuencia. La profesora considera que trabajar las fracciones es tarea en el aula y

los ejercicios del libro le sirven para que los estudiantes los hagan en casa. Menciona que un material muy útil para aprender fracciones es el estambre, por su flexibilidad y fácil manejo. Menciona importante el uso de materiales y de colores para poder trabajar las fracciones. Considera que llevar a lo concreto los ejemplos matemáticos es muy práctico.

6.3.6.5 Categoría 5.- Evaluación de los conocimientos de fracciones.

La profesora menciona que las evaluaciones las lleva con trabajo en clase, tareas no muy extensas, pequeños exámenes los viernes que abordan los temas vistos en la semana, el cual tiene valor para su calificación bimestral. Menciona que, para poder evaluar a los estudiantes debe trabajar con los temas revisados en clase y con ejemplos similares a los utilizados. Ella no evaluaría temas que no han visto. Quiere decir que los estudiantes no son capaces de responder a problemas que requieran de sus conocimientos e intuición, solo a aquellos temas revisados en clase y con ejemplos similares.

6.3.6.6 Consideraciones sobre la entrevista a la profesora

De acuerdo a lo revisado en la entrevista, se puede considerar que la profesora está interesada en que los estudiantes avancen en sus conocimientos sobre matemáticas, ya que reconoce que existen dificultades para enseñarlas.

Las dificultades para una enseñanza efectiva de las matemáticas y de las fracciones más específicamente, se encuentran no solo en la forma de enseñarlas, también se encuentran en la forma en la que aprenden los estudiantes, en los materiales con los que se cuenta, así como de las barreras que la misma institución le pone. Sin embargo, ella hace su labor de la mejor manera posible. Trata que los métodos les sean de lo más simples y útiles para que no se les compliquen las matemáticas.

Aun así, reconoce que los estudiantes tienen dificultades en diversas ideas matemáticas sobre fracciones, como en el tema de proporcionalidad, en los porcentajes y en la representación de fracciones en la recta. Estas ideas fueron identificadas con dificultades en el cuestionario inicial de fracciones aplicado a los estudiantes. Aunque la profesora considera que las dificultades de los estudiantes

para responder correctamente, se deben a que no leen bien lo que se les pide hacer. Considera que deben entender lo que se les pide para poder responderlo, es decir, las dificultades no derivan de sus niveles conceptuales, sino de su comprensión de lo que se solicita.

La evaluación de los conocimientos se observa ligada a lo aprendido, es decir, desde una visión cuantitativa del aprendizaje. Considera que no puede evaluar el conocimiento de los estudiantes sobre cosas que no ha enseñado, es decir, que los estudiantes, menciona la profesora, no podrían utilizar sus conocimientos y resolver de forma “intuitiva” (como lo menciona en la entrevista) problemas en diferentes contextos y situaciones, más que las planteadas en clase.

Con lo anterior, se cierra la parte de los resultados de la primera etapa de este estudio. A partir de ellos, se planteó la necesidad de realizar una secuencia de actividades que apoye a los estudiantes a avanzar en sus conocimientos sobre fracciones. En el siguiente capítulo se puede observar el trabajo realizado para lograr dicho objetivo.

Capítulo VII

Resultados de la segunda etapa del estudio

En este capítulo se presentan los resultados de la segunda etapa del estudio, correspondientes a la secuencia de actividades de fracciones aplicada a estudiantes de sexto grado de primaria. Se inicia con el diseño y descripción de las actividades, seguida de su aplicación, finalmente, se presenta el análisis de los resultados obtenidos.

7.1 Diseño de la secuencia de actividades

La secuencia de actividades se diseñó a partir de los resultados obtenidos en el cuestionario inicial de fracciones y de acuerdo al modelo recursivo de Kieren (1976). Se consideró el modelo de Kieren porque, este autor propone revisar las fracciones como conceptos interconectados. Es decir, las relaciones que guardan los diferentes conceptos entre ellos. Considera dichos conceptos como constructos y los conocimientos de base sub-constructos. Dichos sub-constructos son: parte-todo, medida, operador, cociente y razones. Menciona que estos conceptos deben aprenderse primero para poder comprender conceptos más complejos de las fracciones y los racionales en general. Desde esta perspectiva, consideramos que los estudiantes deben avanzar en sus conocimientos de los conceptos básicos de fracciones, pero deben comprender que existen diferentes tratamientos de las fracciones y que se encuentran relacionados entre ellos.

A continuación, se mencionan las actividades que fueron exploradas en esta etapa.

- Relación parte-parte y parte-todo,
- Idea de partición,
- Idea de mitad,
- Idea de entero o unidad,
- Fracciones en cantidad continua,
- Fracciones en cantidad discreta,
- Representación de fracciones en la recta numérica y
- Representación de fracciones propias e impropias.

- Suma de fracciones.
- Representación de fracciones en la recta numérica y
- Fracciones impropias.

Las actividades se diseñaron para aplicarse en sesiones de una hora con los estudiantes. Los estudiantes trabajaron en parejas y en total fueron 12 sesiones con 4 parejas. A continuación, se describen las actividades propuestas.

7.1.1 Actividades con modelos de área

En las actividades de fraccionamiento en cantidad continua se utilizaron las regletas de *cuisenaire*. Para que los estudiantes se familiarizaran con el material, se propusieron tres actividades de reconocimiento de las regletas. Las demás actividades exploraban la idea de entero, mitad, representación de fracciones en cantidad continua, equivalencia de fracciones, suma de fracciones y fracciones impropias.

Tabla n 23

Descripción de las actividades de fraccionamiento en cantidad continua

| Actividad | Propósito |
|------------------------------|--|
| Juego libre | Identificar las regletas |
| Juego dirigido | Reconocer la forma y tamaño de las regletas |
| Colorear las regletas | Diferenciar las regletas |
| Representación de fracciones | Representar fracciones con las regletas |
| Fracciones equivalentes | Equivalencias con la unidad, $\frac{1}{2}$, tercios, etc. |
| Fracciones impropias | Representar fracciones impropias con las regletas |
| Suma de fracciones | Resolver sumas de fracciones con las regletas |

En esta tabla se muestran las actividades realizadas en dos sesiones de trabajo con fraccionamiento en cantidad continua.

Las actividades se plantearon en dos momentos: el trabajo con el material, y el trabajo con lápiz y papel. Se trabajaban los conceptos matemáticos de fracciones con el material, se les pedía a los estudiantes realizar algunas tareas que los

llevaran a comprender y representar fracciones, una vez trabajados estos conceptos con el material, se les pedía responder algunas preguntas en papel, que correspondían a los conceptos trabajados con el material.



Figura n 6 Trabajo con material y con lápiz y papel.

En las imágenes anteriores podemos observar del lado izquierdo el trabajo con las regletas y las representaciones de fracciones que los estudiantes realizaban. Del lado derecho, se observa las respuestas de los estudiantes a las preguntas sobre representación de fracciones equivalentes.

7.1.2 Actividades con modelos de conjunto

Las actividades de fraccionamiento en cantidad discreta se realizaron con el apoyo de fichas que representaban fracciones. Las ideas matemáticas trabajadas fueron, la idea de unidad o entero, medios, representación de fracciones en cantidad discreta, equivalencia de fracciones y fracciones impropias.

La propuesta de trabajo fue similar a la utilizada en la actividad anterior. Se presentaba el material, se realizaban tareas de representación de fracciones y otros conceptos. Posteriormente, se les pedía responder algunas actividades con lápiz y papel sobre los conceptos trabajados con las fichas y con ejemplos similares a los trabajos con el material. De esta forma, los estudiantes podían repasar los conceptos trabajados y nosotros observar si los habían entendido.

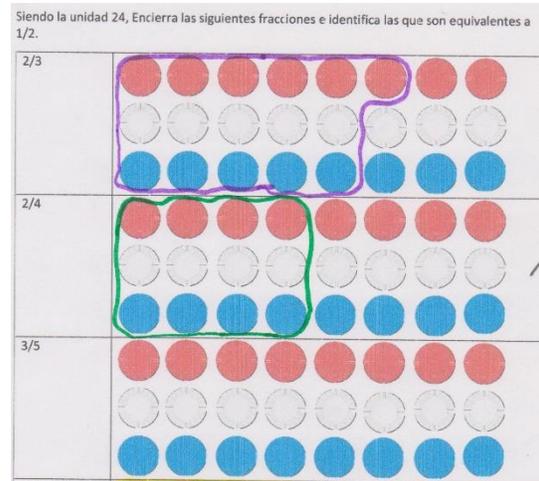


Figura n 7 Trabajo con fichas y con lápiz y papel.

Como se puede apreciar en las imágenes anteriores, los estudiantes realizaron dos tipos de tarea, con material para trabajar los conceptos de fracciones y con lápiz y papel para responder preguntas relacionadas a las ideas trabajadas con el material. Las actividades se plantearon como se muestra en la tabla 24.

Tabla n 24

Descripción de las actividades de fraccionamiento en cantidad discreta

| Actividad | Propósito |
|------------------------------|--|
| Repaso | Revisar las ideas matemáticas trabajadas anteriormente |
| Representación de fracciones | Representación de fracciones con fichas (conjuntos) |
| Equivalencias de fracciones | Identificar equivalencias de fracciones |
| Fracciones impropias | Representación de fracciones con fichas |

En esta tabla se muestran las actividades realizadas en la tercera sesión, que se refieren al fraccionamiento en cantidad discreta.

7.1.3 Actividades con un modelo lineal

Para trabajar esta sesión, se retomaron los conceptos trabajados en las sesiones anteriores. Se les presentaron materiales que representaban fracciones en cantidad continuo y discreta, se les hicieron preguntas sobre fracciones y cómo se podían representar con dichos materiales. Una vez realizado el repaso, se conectó con las actividades de representación de fracciones en la recta numérica y no numérica.

Las actividades para la representación de fracciones en la recta se realizaron con lápiz y papel. Se les presentaban segmentos de recta para representar fracciones en la recta numérica y no numérica, identificación de la unidad, representación de medios en la recta, fracciones equivalentes y representación de fracciones impropias en la recta numérica, que los estudiantes debían responder de acuerdo a lo que se pedía en las hojas de trabajo. Finalmente, se realizó una actividad de cierre, que se apoyó en la utilización de un dominó de fracciones. En las siguientes imágenes, se muestran las actividades realizadas en la sesión de trabajo.

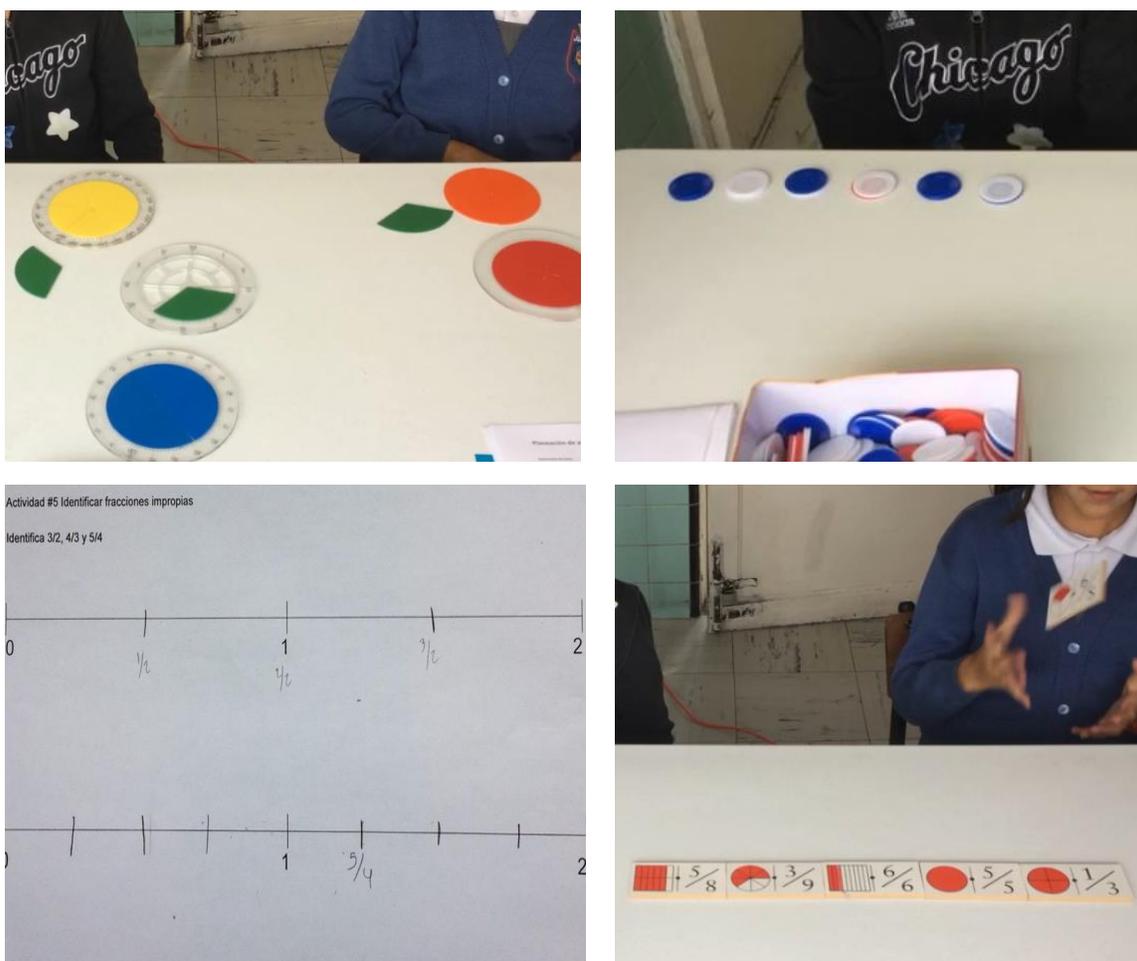


Figura n 8 Actividades realizadas en la cuarta sesión de trabajo

En las imágenes anteriores se observan las actividades realizadas en la sesión de trabajo con los diferentes materiales utilizados en la sesión. En la figura superior de la izquierda se observa el material que representaba fracciones en cantidad

continua. En la figura superior derecha se observan las fichas que representaban fracciones en cantidad discreta. En la imagen de inferior izquierda se observar un ejemplo del trabajo con lápiz y papel para trabajar la representación de fracciones en la recta. Finalmente, en la figura inferior derecha, se muestra la actividad de cierre que se propuso, un juego de dominó con fracciones. En la tabla 25 se muestran las actividades realizadas durante la sesión de trabajo con los estudiantes.

Tabla n 25

Descripción de las actividades de representación de fracciones en la recta

| Actividad | Propósito |
|---|---|
| Repaso | Repasar los temas tratados en las sesiones anteriores |
| Unidad en la recta | Identificar qué segmento de recta representa la unidad |
| Identificar $\frac{1}{2}$ y cuartos en la recta | Dividir en partes iguales la recta y encontrar las fracciones solicitadas |
| Identificación de tercios | Dividir en tres partes iguales la recta y ubicar $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{3}$. Identificar equivalencias con el entero. |
| Identificar sextos y doceavos | Representar fracciones e identificar fracciones equivalentes. |
| Identificar fracciones impropias | Representar fracciones impropias en la recta |
| Cierre | Actividad para cerrar. Juego de dominó de fracciones |

En esta tabla se muestran las actividades correspondientes a la representación de fracciones en la recta, realizadas en la cuarta sesión de trabajo.

7.2 Descripción de la secuencia de actividades

Las actividades se realizaron dentro de la escuela en espacios proporcionados por la directora. Los estudiantes se sentaban frente a una mesa y se les explicaban las actividades a realizar. Se mostraba el material y se les pedía realizar las actividades, que se presentaron de dos formas, con material y lápiz y papel. Primero debían utilizar el material que servía para representar fracciones y después responder preguntas en papel y lápiz. En la siguiente tabla se muestran algunas actividades de la primera sesión.

Tabla n 26

Descripción de las actividades realizadas por los estudiantes en fracciones en cantidad continua

| Idea matemática | Estudiante | Actividades | Interacción |
|----------------------------|-------------------|---|--|
| Equivalencia de fracciones | Jim | Los estudiantes deben construir con las regletas fracciones equivalentes al entero, $1/2$, $1/3$, $2/3$. | Se le facilitan las actividades y se muestra segura en sus respuestas. Termina primero que su compañero y por lo regular es quien tiene una respuesta adecuada a la actividad. Mientras su compañero termina, utiliza el material para hacer figuras. Combina fracciones para hacer equivalencias, $1/2 = 2/4$, $1/2 = 1/3$ y $2/12$. |
| Fracciones impropias | Josh | Se les pide que representen la fracción $3/2$ con las regletas. | Se le da la instrucción de representar $3/2$. Coloca la unidad y al lado dos medios, pero no está seguro de cómo podría colocar $3/2$, decide colocar un medio más. Al escuchar la respuesta de su compañera sobre por qué colocó otro medio después de tener dos medios, afirma que está de acuerdo con la respuesta de la compañera. Se les pide que representen $4/3$, pero no consigue representar, al observar lo que su compañera realiza se da cuenta de que debía ser con las mismas fracciones. No está seguro de lo que debe responder. Se le explica la unidad y que las fracciones deben ser representadas a partir de esa unidad. |
| Suma de fracciones | Ang | Se dan varias sumas de fracciones que los estudiantes deben resolver con ayuda de las regletas. | Se les pide que intenten representar con las regletas la suma de $1/2 + 1/2$, Ang toma el entero que se utiliza y luego coloca dos medios al lado del entero. Luego se les pide completar el entero con un medio y las demás fracciones, tomó diferentes regletas que representaban fracciones del entero y las colocó al lado del entero para hacer diferentes "sumas de fracciones" con las regletas. Explica su primer ejemplo, $1/3 + 2/6 + 1/12 + 1/4$. Considera que es una suma de un entero porque todas esas regletas miden lo mismo que el entero. En la instrucción "haz una suma de fracciones equivalente a $3/2$ ", tomó diferentes regletas que representaban fracciones para realizar la equivalencia y al preguntarle qué fracciones tomó las mencionó. |

En esta tabla se presentas algunas actividades realizadas por los estudiantes en las sesiones de trabajo con modelos de área.

Las actividades anteriores se realizaron en dos sesiones. Las actividades de fraccionamiento en cantidad discreta se realizaron en una sesión de una hora. A continuación, se presentan algunos datos obtenidos.

Tabla n 27

Descripción de las actividades con fracciones en cantidad discreta

| Idea matemática | Estudiante | Actividades | Interacción |
|---|-------------------|--|--|
| Representación de fracciones en cantidad discreta | Kev | Identificar la unidad, representar fracciones con fichas | Se les pidió que tomaran 24 fichas como entero y representar $\frac{1}{2}$. El estudiante tomó cierta cantidad de fichas que consideró representaban $\frac{1}{2}$, al preguntarle cuántas fichas eran, dijo que $\frac{1}{2}$. También podía decir cuántas fichas representaban otras fracciones como $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$ y $\frac{1}{24}$. Responde bien las preguntas, no duda de la cantidad de fichas que representan las fracciones solicitadas. Reconoce las partes que debe contener el entero de acuerdo al denominador, |
| Equivalencia de fracciones | Jack | Identificar fracciones equivalentes | Se pidió representar $\frac{6}{24}$, tomó el material y respondió que eran 12 fichas las que representaban dicha fracción. Cuando se le preguntó a qué fracción era equivalente, mencionó que a $\frac{1}{2}$, se le pidió encontrar otra fracción equivalente y dijo en un principio que $\frac{2}{3}$, pero reflexionó y mencionó que $\frac{2}{4}$. Aunque responde rápido, su atención se encuentra en las fichas, que las toma mientras se dan instrucciones o al terminar una tarea. |
| Fracciones impropias | San | Representar fracciones impropias con fichas | Duda sobre la forma de representar fracciones impropias, espera que su compañera responda para recordar las características de las fracciones impropias, dice estar de acuerdo con su compañera y retoma lo que ella dijo para responder. Se les pide representar la fracción $\frac{3}{2}$, toma las fichas y comienza a hacer montones de fichas, se da cuenta que las que tiene (24) no le alcanzan. Pide tomar más fichas y acomoda tres montones de 12 fichas cada uno. Reconoce que $\frac{4}{2}$ se puede expresar como 1 entero y $\frac{2}{2}$ |

En esta tabla se muestran las actividades realizadas por los estudiantes durante la sesión de trabajo con modelos de conjuntos.

En la sesión de trabajo con la representación de fracciones en la recta numérica y no numérica, se realizó un repaso de las actividades anteriores, para explicar las diferencias entre los tres modelos de representación de fracciones utilizados.

Posterior a eso, se trabajó con la representación de fracciones en la recta. En la siguiente tabla se presenta el trabajo realizado por un estudiante en las actividades

Tabla n 28

Descripción de las actividades de representación de fracciones en la recta

| Idea matemática | Estudiante | Actividades | Interacción |
|--|-------------------|--|---|
| Entero o unidad | San | Se les pide identificar la unidad en un segmento de recta | Se nota tímido y poco participativo. Duda de las respuestas y tarda al responder. Se les pide que identifiquen la unidad en la recta, escribe "1" en la parte derecha del segmento de recta, menciona que es lo que vale la recta. |
| Representación de fracciones en la recta | San | Se les pide representar $1/8$ y $1/6$ en segmentos de recta con dos unidades | En una hoja con un segmento de recta que tiene dos unidades, se le pide identificar $1/8$. Pero toma las dos unidades como una unidad, y coloca $1/8$ donde van $2/8$. Se le dificulta comprender que la recta tiene dos unidades y que debe dividir solo una unidad en ocho partes para obtener los octavos. Su compañera que logró realizar la actividad le explica cómo debe dividir la unidad, pero aún se le dificulta encontrar el segmento que representa $1/8$. Se le explica desde el principio la unidad y los segmentos y logra identificar $1/8$ en la recta, luego logra identificar $1/6$ y $3/6$ en otra recta sin ayuda. |
| Fracciones impropias | San | Se les pide ubicar $3/2$ en un segmento de recta con dos unidades. | Duda y participa poco, espera a que su compañera responda para solo asentir con la cabeza, pero cuando se le pide que explique no está seguro de cómo hacerlo. Se le pide que identifique $3/2$, se les comenta que deben ubicar la unidad y luego dividirla en dos como lo pide el denominador, pero él divide en cuatro la unidad, observa lo que hace su compañera y borra los dos segmentos que dibujó, se queda solo con el de $1/2$, ahí identifica que va $1/2$. Se le pide que identifique $2/2$, pero se le dificulta identificarlo, al observar lo que hace su compañera se da cuenta de donde debe ir $2/2$ y a partir de ello, identifica $3/2$ en su lugar, pero aún no está seguro de por qué. Luego de observar lo que hizo su compañera logró identificar $4/3$ y $5/4$ en la recta |

En esta tabla se muestra el trabajo realizado por es un estudiante durante la sesión de trabajo de representación de fracciones en la recta.

El trabajo de este último estudiante es especialmente relevante porque permite observar el proceso que llevan los estudiantes para comprender ciertos conceptos. Inicia con dudas sobre sus conocimientos, al permitirle participar y encontrar las

fracciones por él mismo, comprende lo que se le pide y lo que se está buscando. Con ayuda del aplicador o de su compañera, llega a las respuestas, pero no es sino con su trabajo que ha logrado comprender por qué se representan las fracciones en ciertos lugares de la recta.

Otro elemento a destacar en el trabajo de los estudiantes durante las actividades, es el apoyo que toman de sus compañeros que reconocen las ideas trabajadas en las sesiones. Estudiantes como Josh tienen conocimientos suficientes para realizar las tareas sin ayuda, sin embargo, en ocasiones no están seguros de estar en lo correcto, entonces, observar que sus compañeros hacen algo similar, les da herramientas para responder con mayor facilidad.

7.2.1 Trabajo con lápiz y papel

Después de trabajar con el material, los estudiantes debían responder algunas preguntas sobre las actividades realizadas en papel. El trabajo con lápiz y papel tenía como objetivo trabajar los conceptos revisados con el material en un espacio que nos permitiera revisar cómo entendieron los conceptos los estudiantes y analizar si hubo un avance conceptual a partir del trabajo de la secuencia de actividades. A continuación, se describen las respuestas de los estudiantes en las actividades con lápiz y papel.

7.2.2 Modelos de área

Como se mencionó anteriormente, Los modelos de área son aquellos que utiliza la representación de fracciones en cantidad continua. Para trabajar dichos modelos se utilizaron las regletas de *cuisenaire*. A continuación, se describe el trabajo de algunos estudiantes con dicho modelo.

Jim es una de las estudiantes que se encuentra en el nivel alto de conceptualización matemática. En la figura 5 se puede observar lo que respondió sobre equivalencia de fracciones.

Fracciones equivalentes

Identifica las fracciones equivalentes de acuerdo al entero

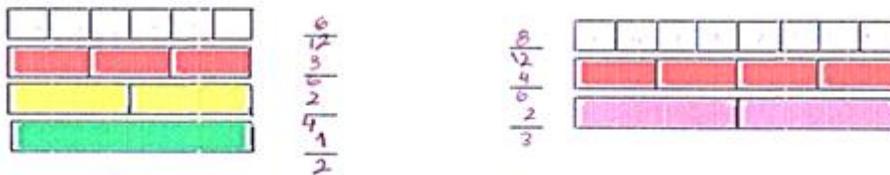


Figura n 9 Respuestas de un estudiante a las preguntas durante las actividades con modelos de área

Sus conocimientos aplicados a las actividades con las regletas, permitieron que Jim respondiera correctamente las preguntas. Su compañero, aunque siempre se apoyó en su compañera, logró responder también las preguntas de las actividades en papel. La respuesta a la pregunta sobre fracciones impropias fue la siguiente.

Fracciones impropias

¿De cuántas maneras puedes representar la fracción impropia $3/2$?

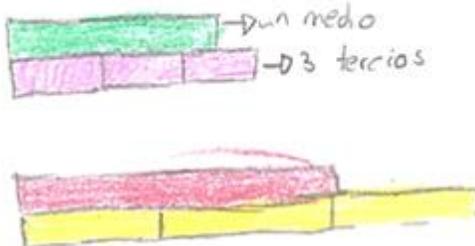


Figura n 10 Respuesta de un estudiante a una pregunta en la sesión con modelos de área

En la figura anterior se puede observar la combinación de fracciones que utiliza para representar $3/2$, en la imagen de arriba, coloca $1/2$ y lo complementa con $3/3$. En la segunda imagen, toma el entero que está representado por la figura roja y toma tres medios representados por las figuras amarillas. En la primera figura el entero está representado por una regleta de 12 cm de largo, en la segunda figura, el entero está representado por una regleta de 10 cm de largo. Es decir, este estudiante utilizó dos unidades diferentes para representar $3/2$.

7.2.3 Modelos de conjunto

En los modelos de conjuntos, podemos observar las respuestas de los estudiantes a las preguntas sobre representación de fracciones en cantidad discreta. En la siguiente figura se puede apreciar la respuesta de un estudiante a la pregunta sobre representación de fracciones y equivalencia de fracciones. Las respuestas al cuestionario corresponden en general a un nivel medio de apropiación matemática. Durante las actividades con material, se mostraba participativo. Su compañero y él respondían cada uno las preguntas de las actividades por separado, aunque, en ocasiones se preguntaban entre ellos lo que hacían para llegar a la respuesta.

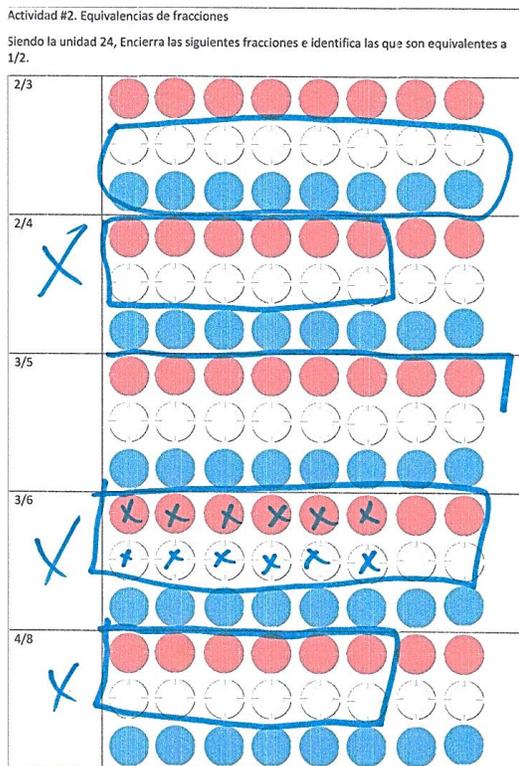


Figura n 11 Respuesta de un estudiante a las preguntas sobre representación de fracciones y equivalencia con modelos de conjunto

En la figura anterior se puede observar la forma en que respondió un estudiante a la pregunta sobre representación de fracciones e identificación de fracciones equivalentes. La unidad con la que se trabajó durante las actividades con el material fue 24 fichas. Es por eso que estas preguntas pudieron facilitarse. Observaban la

fracción y encerraban las fichas que correspondían. En $2/3$ y $2/4$ no pareció presentar ningún problema. Pero en $3/5$, que fue una pregunta de prueba, intentó responder, aunque no había forma de representar esa fracción con la unidad de 24 fichas. En $3/6$ tuvo dificultad al principio para contar las fichas, pero al observar de nuevo, corrigió tachando las fichas que correspondían a dicha fracción. $4/8$ no tuvo tampoco mayor dificultad. Una vez encerradas las fracciones, debían decidir cuáles eran las equivalentes a $1/2$, al contar las fichas, el estudiante entendió que la relación que guardaban las equivalentes a $1/2$ era la cantidad de fichas. De esa forma encontró las tres equivalencias. Sin embargo, una pregunta que requería de mayor trabajo y concentración fue la referente a fracciones impropias.

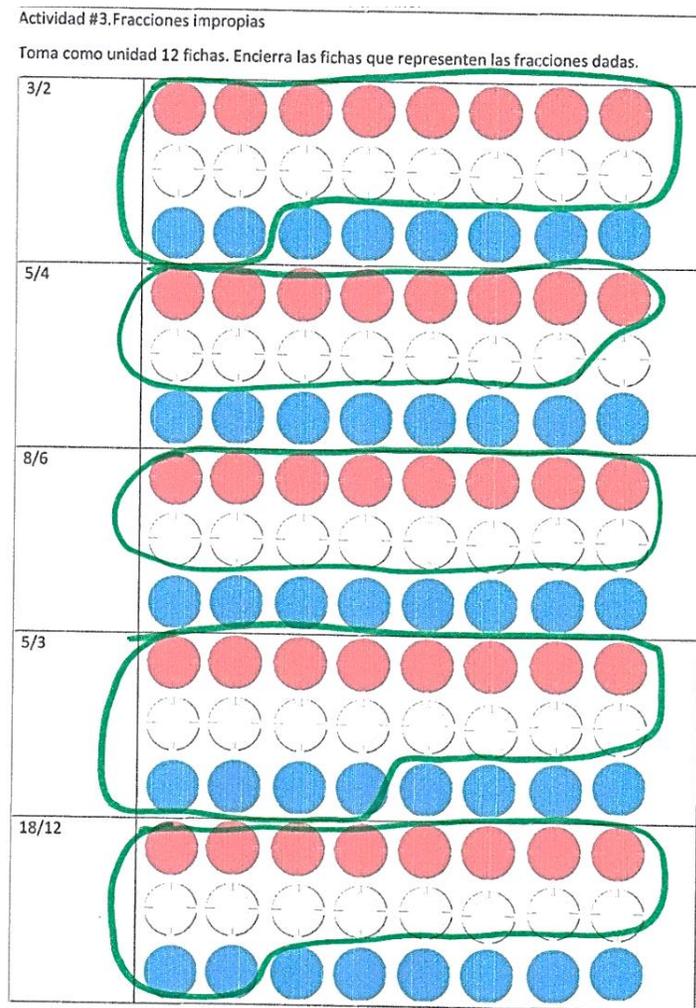


Figura n 12 Respuestas de un estudiante a una pregunta sobre representación de fracciones impropias en modelos de conjuntos.

La forma para encontrar las respuestas a esta pregunta fue utilizar multiplicaciones. El estudiante mencionó que en la primera debía saber cuántas fichas representaban $\frac{1}{2}$, entonces debía multiplicarlas por 3 y así tenía la cantidad de fichas que representaban $\frac{3}{2}$. Algo similar hizo con las siguientes fracciones impropias. Encontrar la fracción unitaria y la cantidad de fichas que representan dicha fracción, entonces multiplicar por el numerador. Esa fue la estrategia que utilizó para encontrar las fracciones solicitadas.

7.2.4 Modelos lineales

El trabajo en las sesiones con modelos lineales permitió observar las respuestas de los estudiantes y los procedimientos que utilizaron para responder las actividades. Una de las dificultades presentadas por los estudiantes en la representación de fracciones en la recta, es la de identificar la unidad. Consideramos que lo primero que se debe reconocer al trabajar con modelos lineales es identificar la unidad o unidades. En la siguiente figura se presentan las respuestas a las actividades de los estudiantes.

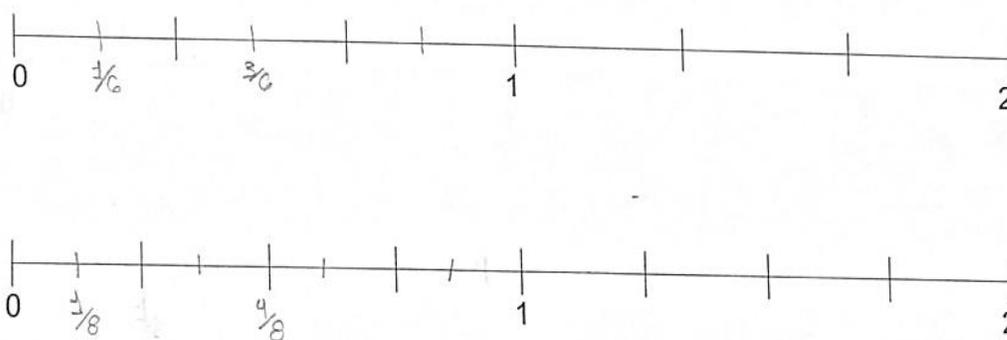


Figura n 13 Representación de fracciones en la recta con dos unidades

En la figura anterior podemos observar la respuesta que realizó un estudiante cuando se le pidió encontrar $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{1}{8}$ y $\frac{4}{8}$. Empezó por buscar los octavos, se observa que en principio colocó $\frac{1}{8}$ en el segmento $\frac{2}{8}$. Cuando se le preguntó por qué había colocado ahí la fracción, respondió que había tomado el segmento de recta y se encontró dividido en ocho partes y tomó una. Lo que hizo fue tomar el segmento de recta sin considerar que estaban marcadas dos unidades.

Se le pidió que señalara cuál era la unidad, cuando reconoció que la unidad se representa con el número 1, comprendió que había dos unidades y que debía dividir la primera unidad en ocho partes y así encontrar las fracciones solicitadas. Cuando realizó esto con los octavos, se le facilitó hacer lo mismo con los sextos. Entonces sus respuestas fueron más precisas.

Las respuestas a las preguntas sobre fracciones impropias mostraron la dificultad que tienen para representar ese tipo de fracciones. Los estudiantes presentaban dificultad para representar las fracciones impropias porque consideraban que debían ubicarse dentro de la primera unidad. En la siguiente figura se muestran las respuestas de una estudiante cuando se le pidió representar las fracciones impropias $3/2$, $4/3$ y $5/4$ en la recta con dos unidades.

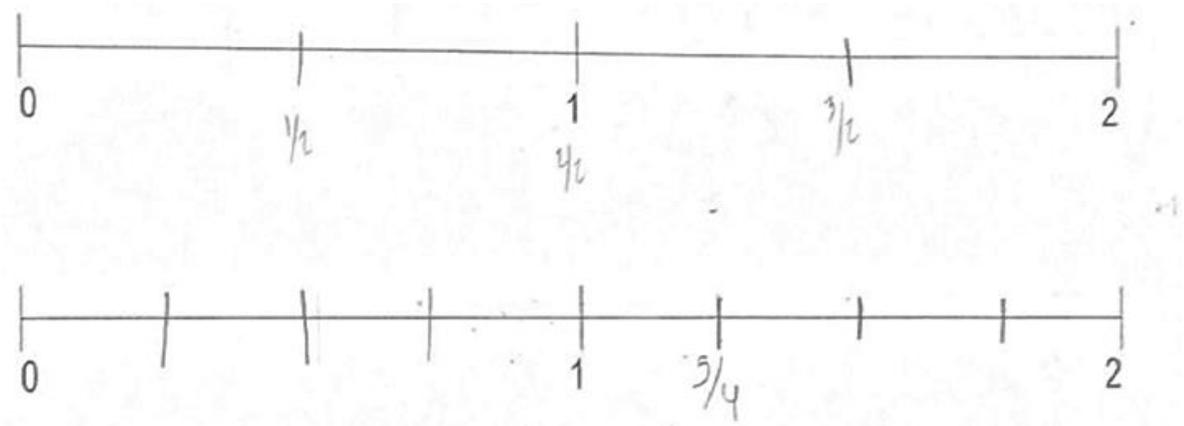


Figura n 14 Respuestas de una estudiante a la representación de fracciones en la recta

En la figura se observa que la estudiante identifica con facilidad $3/2$, su estrategia es ubicar las demás fracciones, ubica $1/2$, luego $2/2$ y en seguida $3/2$. Sin embargo, en un principio, se le dificultó identificar $3/2$ al no comprender que dicha fracción se encontraba fuera de la primera unidad. Cuando se les recordó que una fracción impropia es más grande que una unidad, comprendió que la fracción $3/2$ se encuentra en otra unidad. Es decir, que reconoció que la recta representaba dos unidades.

7.3 Consideraciones finales sobre el trabajo con la secuencia de actividades

A partir de las sesiones descritas anteriormente, se reporta que los estudiantes trabajaron con las ideas matemáticas propuestas en las actividades, lo que permitió que avanzaran en sus conocimientos sobre los conceptos de fraccionamiento en cantidad continua, cantidad discreta, representación de fracciones en la recta numérica, con la idea de medio y entero, la relación parte-parte y parte-todo y con la equivalencia de fracciones.

Las sesiones descritas anteriormente permiten observar el trabajo que realizaron los estudiantes para abordar diferentes conceptos de las fracciones, lo que les permitirá continuar avanzando en sus conocimientos sobre fracciones. Los conocimientos previos les permitieron reconocer las ideas trabajadas durante las actividades. Aquellos que se encontraban en niveles medios o bajos de conceptualización matemática, se apoyaron en sus compañeros más expertos y en la ayuda del aplicador para realizar las actividades. A partir del trabajo con material, los estudiantes obtenían herramientas que les permitieron responder a las preguntas en lápiz y papel. Por lo que se considera que hubo un avance en sus conocimientos sobre fracciones.

El trabajo con las diferentes ideas matemáticas en la secuencia de actividades, permite a los estudiantes avanzar en sus conocimientos de fracciones. Ya que, de acuerdo al modelo recursivo de Kieren (1976), para poder comprender los diferentes conceptos de los números racionales, se deben entender primero conceptos básicos y avanzar hacia otros conceptos más complejos. Como se pudo apreciar a partir del cuestionario inicial de fracciones, los estudiantes tienen dificultades con conceptos básicos de fracciones. Las ideas trabajadas en las sesiones forman parte de dichos conceptos básicos que los estudiantes deben conocer, porque en los siguientes cursos escolares deberán aprender otros conceptos más complejos. Para observar con mayor claridad el avance logrado por las actividades, en la siguiente etapa del estudio se realizó un cuestionario final que nos permitió comparar los conocimientos que tenían al momento de realizar el cuestionario inicial de fracciones y los conocimientos obtenidos a partir de la secuencia de actividades.

Capítulo VIII

Tercera etapa del estudio: Cuestionario final

En este capítulo se presentan los resultados de la tercera etapa del estudio correspondiente a la aplicación de un cuestionario final de fracciones. Inicialmente, se describe el diseño del cuestionario, en seguida, su aplicación y finalmente, los resultados obtenidos.

8.1 Diseño del cuestionario final de fracciones

El cuestionario final de fracciones se diseñó a partir de dos elementos; el cuestionario inicial de fracciones y la secuencia de actividades con fracciones. La intención fue comparar los resultados de cada cuestionario y poder verificar si los estudiantes avanzaron en sus conocimientos sobre fracciones.

El cuestionario final de fracciones constó de 14 preguntas que abordaban las ideas matemáticas de mitad, representación de fracciones en cantidad continua, representación de fracciones propias e impropias, representación de fracciones en cantidad discreta, suma de fracciones, representación de fracciones en la recta numérica y no numérica y equivalencia de fracciones. Las preguntas, 2,3, 6, 7, 8, 12, 13 y 14 fueron diseñadas con base en el trabajo con la secuencia de actividades, las otras preguntas son similares a las presentadas en el cuestionario inicial de fracciones.

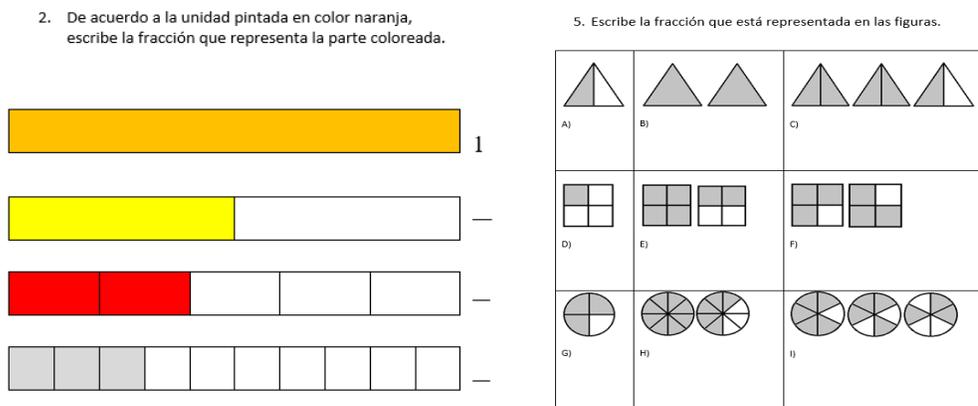


Figura n 15 Preguntas del cuestionario final, en el que se muestran ejemplos de fracciones en cantidad continua.

8.2 Descripción del cuestionario final de fracciones

En la siguiente tabla se muestran las ideas matemáticas trabajadas en el cuestionario final, se aprecia el número de pregunta correspondiente por idea trabajada y lo que se solicitaba que hicieran para responder las preguntas planteadas.

Tabla n 29

Ideas matemáticas trabajadas en el cuestionario final de fracciones

| Pregunta | Idea matemática | Solicitud de la pregunta |
|------------------|--|---|
| 1 | Idea de mitad | Se le presentan diferentes figuras al estudiante y se le pide que identifique las figuras que representan una mitad. |
| 2,3, 5, 6, 7 y 8 | Representación de fracciones en cantidad continua (fracciones propias e impropias) | Se le pide al estudiante que identifique la fracción que representan las figuras. |
| 4 | Representación de fracciones en cantidad discreta | De conjuntos de imágenes, se le pide que identifique la fracción que representan las figuras encerradas. |
| 9 | Sumas de fracciones | Se le pide al estudiante que resuelva las sumas de fracciones. |
| 10 y 11 | Representación de fracciones en la recta | Se le da al estudiante un segmento de línea y se le pide que identifique en qué lugar deberían ir las fracciones solicitadas. |
| 12, 13 y 14 | Representación de fracciones equivalentes | Se le pide al estudiante que identifique la parte que representa la misma cantidad de una fracción dada. |

En esta tabla se pueden observar las ideas matemáticas trabajadas en el cuestionario final de fracciones.

8.3 Aplicación del cuestionario final de fracciones

El cuestionario final de fracciones se aplicó en la misma escuela a ocho de los diez estudiantes que participaron en el cuestionario final y en la secuencia de actividades. El procedimiento para su aplicación fue similar al primer cuestionario. Se leyeron las preguntas y se les explicó el instrumento. También se les pidió que utilizaran el material que ellos desearan y si requerían algún otro, se acercaran al aplicador o solicitaran lo que necesitaban. Asimismo, se les dijo que no debían usar

goma de borrar y, si necesitaban más espacio podían solicitar hojas blancas. En la mesa del frente se colocaron una serie de materiales como reglas, colores, lápices, hojas blancas, sacapuntas y tijeras, disponibles si las requerían, aunque no se dio instrucción específica de que podían utilizarlas.

Los estudiantes respondieron a las preguntas por ellos mismos y no solicitaron ayuda como había sucedido en el primer cuestionario. La duración del cuestionario fue de entre 15 y 20 minutos. Una vez que terminaron todos los estudiantes, se les agradeció su participación y apoyo en las actividades.

8.4 Análisis de los datos del cuestionario final de fracciones

Como se mencionó con anterioridad, este cuestionario tiene como finalidad revisar el avance en el conocimiento de fracciones de los estudiantes. Para ello, se compararon los datos del cuestionario inicial con el final. Es por ello que se utilizaron los mismos dos niveles de análisis: niveles de conceptualización matemática y estrategias de resolución de problemas.

8.4.1 Niveles de conceptualización matemática

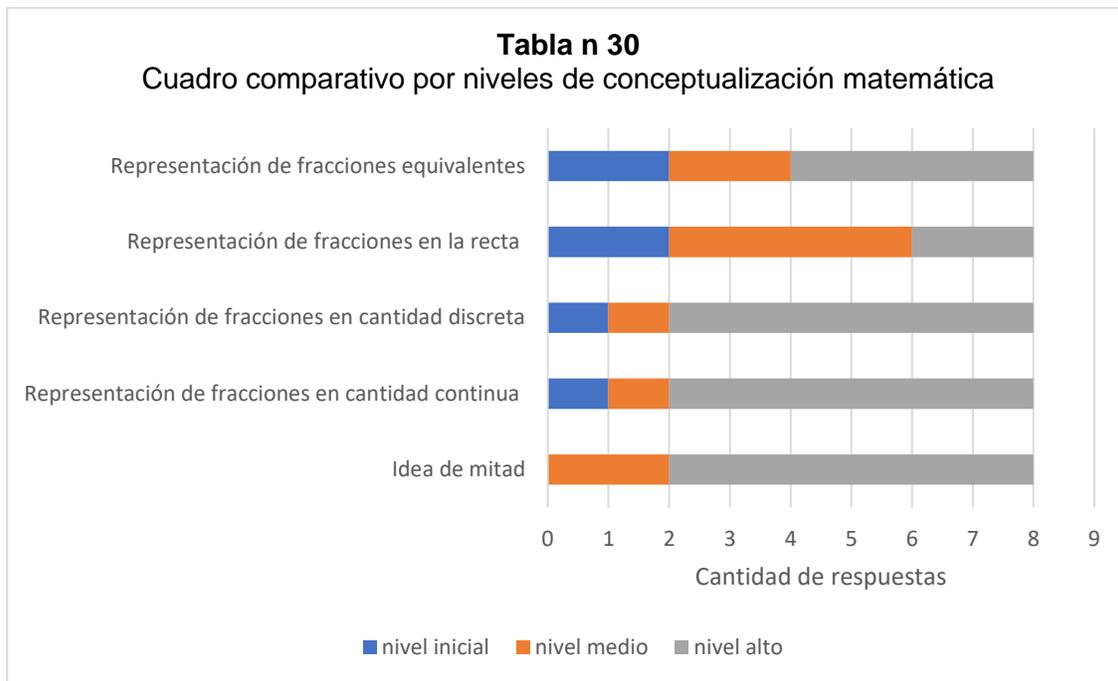
A continuación, se muestran los resultados comparativos de los dos cuestionarios aplicados a los estudiantes de sexto grado. Cabe aclarar que no se recuperaron todas las ideas matemáticas abordadas en el cuestionario inicial, sino las que se trabajaron en las secuencias de fracciones. Las cuales se encuentran explícitas en la tabla 28. Los niveles de conceptualización matemática son los que se utilizaron para analizar el primer cuestionario como se muestra a continuación.

Nivel inicial. Los estudiantes tienen algún conocimiento o habilidad para responder la pregunta, pero se les dificultan las ideas y los procedimientos.

Nivel medio. Los estudiantes reconocen procedimientos e ideas, pero se les dificultan conceptos más complejos.

Nivel alto. Los estudiantes reconocen la mayoría de los procedimientos e ideas para realizar las actividades.

En la tabla 29 se observan los niveles de conceptualización matemática por idea matemática de acuerdo al cuestionario final de fracciones.



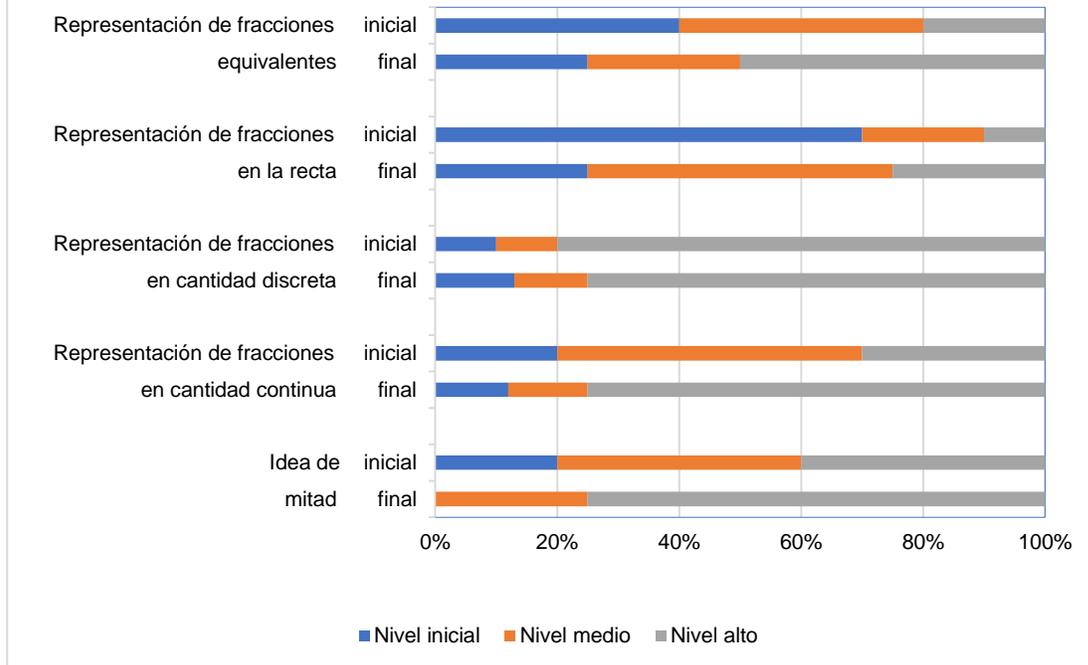
En esta tabla se muestran los niveles de conceptualización de los estudiantes por cada idea matemática trabajada en el cuestionario final. Se observa que tuvieron como mayoría, respuestas de nivel alto.

Como se puede observar, las respuestas mayoritariamente se encuentran en el nivel alto de conceptualización matemática. Una proporción menor en el nivel medio y con menos presencia, el nivel bajo. Se observa que en las ideas de representación de fracciones equivalentes y en la representación de fracciones en la recta siguen presentando dificultades. En las ideas de representación de fracciones en cantidad discreta, cantidad continua y en la idea de mitad, los estudiantes lograron avanzar en sus conocimientos.

Esas ideas fueron comparadas con las ideas del primer cuestionario. En la siguiente tabla se muestra dicha comparación con los niveles de conceptualización entre los dos cuestionarios.

Tabla n 31

Comparación de resultados de los cuestionarios inicial y final



Esta tabla ilustra la diferencia que hubo entre los niveles de conceptualización matemática de los estudiantes respecto a las ideas matemáticas trabajadas en el cuestionario inicial y el final.

De acuerdo a la información anterior, podemos observar que existe una diferencia entre el nivel de conceptualización matemática que tenían los estudiantes al principio y la que poseen después del cuestionario final. En la idea de mitad, los estudiantes se encuentran en los niveles alto mayoritariamente y medio, sin ninguno que se encuentre en nivel inicial.

En la representación de fracciones en cantidad continua, por lo regular, los estudiantes presentaban problemas con las fracciones impropias y con las representaciones de fracciones con figuras no canónicas. El cuestionario final permite observar que se avanzó en esas dificultades. En la representación de fracciones en cantidad discreta, que es uno de las ideas matemáticas en la que no presentan muchas dificultades, notamos que los estudiantes mantuvieron el mismo nivel.

En la representación de fracciones en la recta, se puede observar que los estudiantes, en el primer cuestionario, se encontraban en el nivel inicial, en el cuestionario final, se ubica a la mayoría en un nivel medio. Las fracciones equivalentes tuvieron un ligero avance. En la siguiente tabla se presenta una comparación del nivel de conceptualización de los estudiantes a ideas específicas.

Tabla n 32

Comparación de cuestionarios inicial y final por estudiante

| Idea matemática | Niveles de conceptualización | Cuestionario inicial | Cuestionario final |
|---|--|--|--|
| Estudiante: Andy | | | |
| Idea de mitad | Inicial En este nivel, los estudiantes no identifican ninguna figura que represente enteros o mitades. | Se le dificultó reconocer las fracciones que representaban las figuras, | |
| | Alto En este nivel, los estudiantes identifican mitades y enteros por las partes sombreadas de las figuras. | | Identificó todas las figuras que representaban mitades, ya sea figuras canónicas y no canónicas. |
| Estudiante: Kev | | | |
| Representación de fracciones en cantidad continua | Medio Los estudiantes logran identificar las figuras que representan fracciones propias, con dificultad para identificar fracciones impropias o mixtas. | En el cuestionario inicial se le dificultó identificar figuras que representaban fracciones impropias. Logró identificar las figuras que representaban fracciones propias. | |
| | Alto En este nivel, los estudiantes identifican el denominador como las partes en que se dividió una figura, y el numerador como las partes sombreadas. | | En el cuestionario final logró identificar tres de las seis figuras que representaban fracciones impropias. Con las figuras que representaban fracciones propias no tuvo dificultad. |

En esta tabla se muestra la comparación de respuestas del cuestionario inicial con el final, respecto al nivel de conceptualización matemática. Las ideas matemáticas son la idea de mitad y la representación de fracciones en cantidad continua.

Tabla n 33

Comparación de cuestionarios inicial y final por estudiante

| Idea matemática | Niveles de conceptualización | Cuestionario inicial | Cuestionario final |
|---|---|---|--|
| Estudiante: Samy | | | |
| Representación de fracciones en cantidad discreta | Alto En este nivel, los estudiantes identifican la fracción que representa un conjunto de figuras. | Identificó la fracción que representaba el conjunto de figuras dado. Además, identificó las figuras que representaban la fracción dada. | Identificó la fracción que representaban los conjuntos de figuras dados. Solo la fracción $\frac{3}{4}$ la escribió $\frac{4}{3}$. |
| Estudiante: Jack | | | |
| Representación de fracciones en la recta | Medio Los estudiantes logran identificar fracciones propias en la recta numérica, y no numérica, pero se les dificulta identificar fracciones impropias. | En el cuestionario inicial logró identificar la mayoría de fracciones propias en la recta numérica y no numérica. Su dificultad se encontraba en identificar la unidad. | |
| | Alto Los estudiantes logran identificar la mayoría de las fracciones en la recta numérica y no numérica. | | En el cuestionario final, logró identificar las fracciones propias en la recta con una o dos unidades. Además, identificó las dos fracciones impropias en la recta con dos unidades. |
| Estudiante: Alin | | | |
| Representación de fracciones equivalentes | Medio Los estudiantes identifican las fracciones equivalentes en secuencias de figuras, con dificultad en secuencias de fracciones. | Identificó las figuras que representaban fracciones equivalentes, pero se le dificultaron las secuencias de fracciones equivalentes | |
| | Alto Los estudiantes logran identificar las fracciones equivalentes en secuencias y al comparar imágenes | | En el cuestionario final, logró identificar todas las fracciones equivalentes que se le solicitaron. |

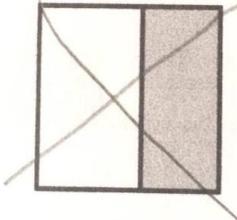
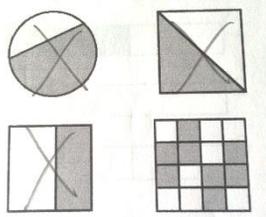
En esta tabla se presentan la comparación del nivel de conceptualización matemática en el cuestionario inicial con el final de tres estudiantes sobre las ideas matemáticas de representación de fracciones en cantidad discreta, representación de fracciones en la recta y fracciones equivalentes.

8.4.2 Estrategias de resolución de problemas

En las siguientes tablas se presenta el análisis que se hizo de acuerdo a las estrategias de resolución de los cuestionario inicial y final.

Tabla n 34

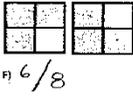
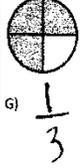
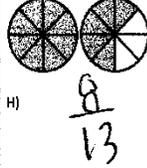
Comparación de estrategias de resolución de los cuestionarios inicial y final

| Idea de entero y mitad | | |
|--|---|--|
| Estrategias de resolución | Cuestionario inicial | Cuestionario final |
| Reconocimiento de mitades y enteros | Reconocen la idea de mitad y entero en figuras canónicas y no canónicas. Pueden identificar lo que representan las figuras por el sombreado. Los estudiantes reconocen la fracción que representa la figura por medio de la parte sombreada | Los estudiantes identifican las figuras que representan mitades en figuras canónicas y no canónicas, con algunas excepciones. Como en el ejemplo de la derecha, se puede apreciar que un lado no es del mismo tamaño del otro, aún así, esta fue la única respuesta de dicho estudiante que no marcaba una figura que representara $\frac{1}{2}$ |
| | |  |
| Dificultad con la fracción que se representa mitades y enteros | En esta categoría, los estudiantes identifican las partes en las que se dividen las figuras, pero se le dificulta expresar la fracción que las representa. | No hubo estudiantes que utilizaran esta estrategia |
| Reconocimiento de mitad y entero en figuras canónicas | En esta categoría, los estudiantes identifican las figuras que representan mitades y enteros si son figuras familiares para ellos. Cuando las figuras representadas no eran canónicas les costaba más trabajo identificarlas | Los estudiantes marcaron solo figuras canónicas, pero se les dificultó identificar la mitad en figuras no canónicas o señalaban figuras que no representaban mitades, como en el ejemplo de la derecha. |
| | |  |
| Dificultad para identificar enteros y mitades | En esta categoría los estudiantes no logran identificar las figuras que representan enteros. | No hubo estudiantes que utilizaran esta estrategia |

en esta tabla se muestran las estrategias de resolución utilizadas por los estudiantes en el cuestionario inicial y final respecto a la idea matemática de mitad y entero.

Tabla n 35

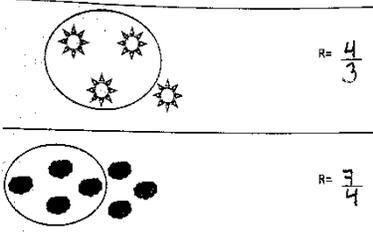
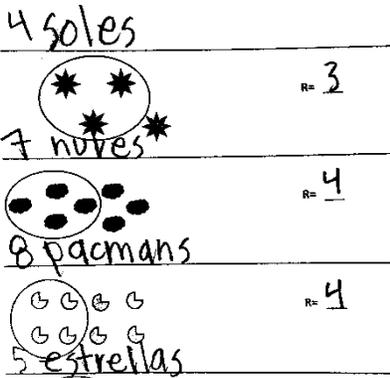
Comparación de estrategias de resolución de los cuestionarios inicial y final

| Fraccionamiento en cantidad continua | | |
|---|---|---|
| Estrategias de resolución | Cuestionario inicial | Cuestionario final |
| Reconocimiento de fracciones en cantidad continua | En esta categoría, los estudiantes entienden al numerador como las partes que se deben colorear y al denominador las partes iguales en que se divide la figura. | En el cuestionario final, los estudiantes que utilizaron esta estrategia, identificaron figuras que representaban fracciones propias e impropias |
| Reconocimiento de fracciones propias | En esta categoría, el estudiante entiende al denominador como las partes en que está dividida una figura o conjunto de figuras y al numerador como las partes que están sombreadas de esa figura o conjunto de figuras. No diferencia entre fracciones propias e impropias. | Los estudiantes que respondieron utilizando esta estrategia, no reconocen que el denominador representa las partes de una unidad. <div style="display: flex; align-items: center; margin-top: 10px;">  </div> <div style="display: flex; align-items: center; margin-top: 10px;">  </div> |
| Dificultad con fracciones en cantidad continua | En esta, el estudiante no identifica la fracción que representa a ninguna figura. | Los estudiantes en esta categoría tienen dificultad para reconocer la fracción que representan las figuras propias e impropias. <div style="display: flex; align-items: center; margin-top: 10px;">   </div> |
| Dificultad para representar fracciones | Los estudiantes en esta categoría entienden al numerador como las partes que se deben colorear de una figura y al denominador como partes en las que se divide, pero se les dificulta encontrar una figura que puedan dividir en partes iguales. | No hubo este tipo de estrategia |
| Dificultad para diferenciar fracciones propias de las impropias | En ella, los estudiantes entienden al denominador como la cantidad de partes que se deben colorear y al numerador como la cantidad de partes que quedan en blanco, sin diferenciar entre fracciones propias e impropias. | No hubo estudiantes en esta categoría |

En esta tabla se presentan las estrategias de resolución utilizadas por los estudiantes en los cuestionarios inicial y final de la idea matemática de representación de fracciones en cantidad continua, con fracciones propias e impropias. Aunque los estudiantes siguen presentando dificultades para reconocer las fracciones impropias, se nota un avance respecto al cuestionario inicial.

Tabla n 36

Comparación de estrategias de resolución de los cuestionarios inicial y final

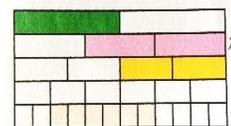
| Fraccionamiento en cantidad discreta | | |
|--|--|---|
| Estrategias de resolución | Cuestionario inicial | Cuestionario final |
| Identificación de fracciones en cantidad discreta | En esta categoría, los estudiantes entienden como el numerador las figuras que se deben encerrar y el denominador la cantidad de figuras. | Los estudiantes en su mayoría respondieron correctamente esta pregunta. |
| Identificación de fracciones, dificultad para expresar la fracción | En esta categoría, el estudiante entiende que del grupo de figuras se debe encerrar el número que se pide, pero se le dificulta identificar la fracción correspondiente. | En el cuestionario final, el estudiante del ejemplo de la derecha, tiene dificultad para expresar la fracción correspondiente al conjunto de figuras. |
| | |  |
| Dificultad con fracciones en cantidad discreta | En esta categoría se considera que a los estudiantes se les dificulta expresar fracciones en cantidad continua o su representación en conjuntos de figuras. | En el cuestionario final, el estudiante del ejemplo de la derecha, no logró identificar la fracción que representaba la parte encerrada, no expresó ninguna fracción. |
| | |  |

En esta tabla se presenta la relación entre las estrategias de resolución que los estudiantes utilizaron en el cuestionario inicial y el final. Así como en el primer cuestionario, la gran mayoría de estudiantes no tiene dificultad para reconocer las fracciones que representan los conjuntos de imágenes presentados en los cuestionarios.

Tabla n 37

Comparación de estrategias de resolución de los cuestionarios inicial y final

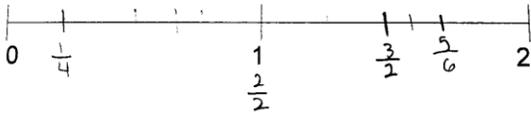
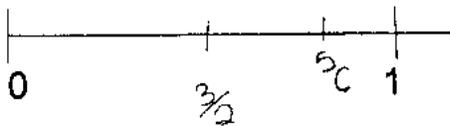
| Equivalencia de fracciones | | |
|---|--|--|
| Estrategias de resolución | Cuestionario inicial | Cuestionario final |
| Identificación de fracciones equivalentes | En esta categoría, los estudiantes logran identifica las figuras equivalentes al observar las imágenes en las columnas. | Una parte significativa de los estudiantes respondió usando esta estrategia de resolución |
| Dificultad para identificar fracciones equivalentes | En esta categoría, los estudiantes tienen dificultad para identificar la figura que representa una fracción equivalente. | En el ejemplo de la derecha, el estudiante debía señalar las partes equivalentes al modelo de color verde, sin embargo, señala todos los modelos |
| Identifica equivalencias de entero | En esta categoría, los estudiantes identifican la figura equivalente cuando es un entero, pero se le dificulta identificar otras figuras que representan otras fracciones. | No hubo este tipo de estrategia |



En esta tabla se presentan las estrategias de resolución que los estudiantes utilizaron para responder las preguntas de equivalencia de fracciones en los cuestionario inicial y final. De acuerdo a los resultados obtenidos en el cuestionario, en esta idea, los estudiantes siguen presentando dificultades para reconocer las equivalencias de fracciones en distintas representaciones. Las fracciones equivalentes presentadas en el cuestionario final fueron similares a como se trabajaron en la secuencia de actividades.

Tabla n 38

Comparación de estrategias de resolución de los cuestionarios inicial y final

| Representación de fracciones en la recta numérica y no numérica | | |
|--|---|--|
| Estrategias de resolución | Cuestionario inicial | Cuestionario final |
| Identificación de fracciones en la recta numérica | En esta categoría, los estudiantes identificaron las fracciones en la recta numérica y no numérica, con fracciones propias e impropias | Los estudiantes utilizan marcas en la recta para ubicar las fracciones. En el ejemplo de abajo, se observa que el estudiante ubica la fracción impropia $\frac{3}{2}$ adecuadamente, sin embargo, la fracción propia $\frac{5}{6}$ no. |
| | |  |
| Identificación de fracciones propias en la recta numérica | En esta categoría, los estudiantes identifican fracciones propias en la recta numérica y no numérica, pero se le dificulta identificar fracciones impropias en la recta numérica. | Los estudiantes identificaron las fracciones propias, pero se les dificultó identificar las fracciones impropias En el ejemplo de abajo, el estudiante no ubicó la fracción impropia $\frac{3}{2}$, pero la fracción propia $\frac{5}{6}$ sí la ubicó correctamente. |
| | |  |
| Dificultad con fracciones en la recta numérica | En esta categoría, los estudiantes no ubican las fracciones correctamente en la recta numérica y no numérica, tienen dificultad para ubicar fracciones propias e impropias. | En el cuestionario final, se observó que a la mayoría de los estudiantes se les dificultó identificar las fracciones impropias y a otros más fracciones propias e impropias. |

En esta tabla se presentan las estrategias de resolución correspondientes a la representación de fracciones en la recta numérica, de los cuestionarios inicial y final. En ella se observan las similitudes para responder las preguntas solicitadas. Se considera que los estudiantes siguen presentando dificultades con esta idea matemática.

8.5 Consideraciones finales sobre el cuestionario final de fracciones

Las ideas matemáticas trabajadas en las sesiones de la secuencia de actividades, permitieron a los estudiantes de este estudio, avanzar en sus conocimientos sobre fracciones. Al comparar los resultados de los cuestionarios inicial y final de fracciones, se puede observar dicho avance. Como la idea de mitad, en la que el grupo se encontraba al inicio del estudio en los niveles de conceptualización matemática inicial y medio, los resultados del cuestionario final de fracciones mostraron que avanzaron al nivel alto en su mayoría y algunos en nivel medio de conceptualización matemática.

En la idea de representación de fracciones en cantidad continua, al momento de realizar el cuestionario inicial, los estudiantes tenían dificultad con las fracciones impropias. En el cuestionario final, varios de los estudiantes mostraron avances en sus conocimientos y se identificaron en el nivel alto, que muestra un avance en la representación de fracciones en cantidad continua con fracciones impropias.

En la idea de la representación de fracciones en cantidad discreta, los estudiantes se identificaron en el nivel alto de conceptualización matemática en su mayoría. Se identificó a dos estudiantes con respuestas de nivel medio y bajo respectivamente, tanto en el cuestionario inicial de fracciones como en el final. Por lo anterior, se considera que no hubo avance o retroceso en los conocimientos.

En la representación de fracciones en la recta, en el cuestionario inicial de fracciones los estudiantes se encontraban en un nivel bajo de conceptualización matemática. Podían representar fracciones unitarias o identificar la fracción $\frac{1}{2}$ a lo sumo. En el cuestionario final de fracciones, los estudiantes, en su mayoría, avanzaron al nivel medio de conceptualización matemática. Avanzaron en sus conocimientos y lograron identificar la unidad representada y las fracciones propias, sin embargo, con las fracciones impropias seguían presentando dificultad.

En la representación de fracciones equivalentes tuvieron un ligero avance en sus conocimientos de dicho concepto, sin embargo, se considera que falta trabajar con esa idea matemática para tener un avance significativo en ella.

Capítulo IX

Conclusiones

En este capítulo se presentan las conclusiones del estudio. Se inicia presentando los objetivos del estudio, seguido de los resultados generales de la investigación, y resultados por etapas. Finalmente se presentan las consideraciones finales para la investigación en educación.

9.1 Resultados generales

Este estudio indagó sobre los conocimientos de los estudiantes de quinto grado de primaria sobre fracciones. Una vez identificados los temas con los que los estudiantes tenían mayores dificultades, se propuso una secuencia de actividades que les permitiera avanzar en sus conocimientos sobre fracciones. Con la aplicación de un cuestionario inicial de fracciones, se encontró que, a pesar de que las fracciones son enseñadas en la primaria, como parte del currículo de matemáticas, los estudiantes presentan dificultades con conceptos básicos de estos temas. Ello dificulta que aprendan nuevos conceptos, propuestos en niveles educativos superiores. Con la secuencia de actividades se mostró que los estudiantes tienen disposición a trabajar cuando se utiliza material didáctico que ellos puedan manipular.

La secuencia de actividades permitió a los estudiantes avanzar en sus conocimientos sobre fracciones, como en el caso de la idea de mitad en la que identificaron fracciones que representaban mitades con figuras canónicas y no canónicas. En el cuestionario inicial, los estudiantes lograban identificar fracciones propias en la representación de fracciones en cantidad continua, después de la secuencia de actividades, lograban identificar también, fracciones impropias. En la representación de fracciones en la recta numérica, se identificó en el cuestionario inicial que los estudiantes presentaban dificultad para identificar la unidad, en el cuestionario final, lograban identificar la unidad y representar fracciones propias en rectas con dos unidades. Identificaron algunas fracciones impropias, aunque seguían presentando dificultad en esa parte. Por ejemplo, al tratar de identificar

fracciones impropias, las ubican en la primera unidad. Por lo que se considera que los estudiantes siguen presentando dificultad con las unidades en la representación de fracciones en la recta.

9.1.1 Resultados de la primera etapa

En la primera etapa del estudio se utilizó un cuestionario inicial de fracciones que nos permitiera identificar en qué nivel de conceptualización matemática se encontraban los estudiantes en dicho tema. Se encontró que el grupo en general, tiene dificultad con conceptos básicos de fracciones, desde la idea de mitad y entero, la representación de fracciones en cantidad continua cuando son fracciones impropias, las secuencias de fracciones equivalentes, fracciones impropias, representación de fracciones en la recta.

Se observó que los estudiantes tienen dificultad para reconocer enteros y mitades cuando las figuras no son canónicas, por lo que se considera que existe una dependencia con los objetos que representan fracciones, como lo menciona Butto (2013). En la representación de fracciones, se observó que tienen dificultad para identificar fracciones impropias en figuras, así como para representarlas. Con la idea de equivalencia de fracciones, se les dificultan las secuencias de fracciones equivalentes, sus secuencias no consideran que las fracciones deben ser equivalentes. En la representación de fracciones en la recta, se les dificulta identificar la unidad, representan solo fracciones unitarias y las fracciones impropias las ubican en la primera unidad.

También se encontró que tienen habilidad con la representación de fracciones en cantidad continua con fracciones propias, lograban representar fracciones con figuras como cuadrados y círculos. En la representación de fracciones en cantidad discreta, lograban identificar la fracción que se representaba en un conjunto de imágenes, así como representar una fracción dada en un conjunto de imágenes. En la representación de fracciones equivalentes, identificaban las figuras que representaban fracciones equivalentes. Al utilizar fracciones unitarias, en general, no tenían dificultad, ya sea con los modelos de área, de conjunto o en la recta.

Con las entrevistas clínicas piagetianas, se observó que los estudiantes utilizan diferentes procedimientos para resolver las fracciones. Como en el caso del estudiante que escribió las fracciones que representaban las imágenes dadas en la pregunta número uno, que pedía identificar figuras que representaran medios, pero no resaltó aquellas que representaban medios.

9.1.2 Resultados de la segunda etapa

En la segunda etapa del estudio, se llevó a cabo una secuencia de actividades, con los estudiantes que trabajaron en la primera etapa. Se abordaron conceptos básicos de fracciones con los que los estudiantes presentaban dificultades en la primera etapa del estudio. Se utilizó material para representar conceptos matemáticos, con el que se pudieran trabajar las ideas propuestas. Las sesiones eran en parejas, una a la vez. Las actividades se presentaron en dos formas, con material didáctico y con lápiz y papel. Primero se trabajaba con el material, los diferentes conceptos propuestos, una vez abordados, se les pedía responder algunas preguntas, relacionadas con los conceptos y en la forma como fueron presentados con el material, en papel. Los estudiantes participaban en las actividades y lograban responder lo que se les pedía. Los estudiantes de niveles altos que tenían mayores conocimientos de los temas, lograban responder las preguntas planteadas durante las actividades. Los estudiantes de niveles menores a ellos, esperaban a escuchar la respuesta de su compañero para responder o para guiarse y entonces responder.

9.1.3 Resultados de la tercera etapa

En la tercera etapa del estudio, se realizó un segundo cuestionario de fracciones, que abordó conceptos de fracciones con los que los estudiantes presentaban dificultades en la primera etapa del estudio y que fueron trabajados en la secuencia de actividades de la segunda. El objetivo era analizar si la secuencia de actividades permitió a los estudiantes avanzar en sus conocimientos de fracciones. Contó con 14 preguntas, unas similares a las utilizadas en el cuestionario inicial de fracciones y otras similares a las presentadas en las secuencias de actividades. Los resultados mostraron que los estudiantes avanzaron en sus conocimientos sobre fracciones, en los conceptos presentados, como en la representación de fracciones en cantidad

continua, en la que lograban identificar figuras que representaban fracciones impropias.

En la idea de mitad, los estudiantes lograban identificar mitades en figuras canónicas y no canónicas, a diferencia del primer cuestionario. En la representación de fracciones en la recta numérica, avanzaron en la identificación de la unidad y en la ubicación de la fracción impropia $3/2$. Sin embargo, no todos los estudiantes lograban identificar fracciones impropias, porque se les dificultaba reconocer que había más de una unidad. Por lo anterior, no lograban ubicar otras fracciones impropias propuestas. En la idea de fracciones equivalentes, se les dificultó identificar figuras que representaban equivalencias, en el primer cuestionario, lograban identificar equivalencias en figuras canónicas, pero en las secuencias de fracciones equivalentes tuvieron dificultades. Por lo anterior, se considera que el avance en la idea de equivalencia de fracciones no fue significativo.

9.2 Conclusiones

9.2.1 Conclusiones de la primera etapa del estudio

A partir de la aplicación del cuestionario inicial de fracciones, se observó que los estudiantes presentan dificultades con conceptos básicos de fracciones. Los estudiantes utilizan diversas herramientas y procedimientos aprendidos en la escuela y en casa, para resolver los diferentes planteamientos propuestos en el cuestionario inicial. Presentan dificultades con ideas matemáticas, que, de acuerdo al modelo recursivo de Kieren, se encuentran en la base de los conceptos del campo de los racionales. Dado que los temas enseñados en primaria sobre fracciones son variados, los conceptos trabajados deberían ser abordados desde diferentes perspectivas y utilizando diferentes aproximaciones conceptuales, no solo las referidas al modelo parte-todo. Kieren propone trabajar las fracciones como partes de un todo, como razones, cocientes, la fracción como medida y como operador. De esa forma se tiene una perspectiva más amplia y se permite la comprensión de los diferentes enfoques que pueden tener las fracciones.

Dado lo anterior, se considera que la enseñanza con el modelo parte-todo no permite que los estudiantes comprendan los conceptos trabajados en clase

correctamente, o que tengan dificultad para reconocer las diferencias con otros conceptos, como las fracciones impropias, o los diferentes modelos de enseñanza de las fracciones, como la representación de fracciones en la recta.

Para poder avanzar en sus conocimientos, es importante que se les enseñen dichos conceptos con los que presentan dificultades, con alternativas al modelo parte-todo, y con actividades que permitan que los estudiantes reconozcan por ellos mismos los conceptos, como, por ejemplo, al trabajar con materiales, que representen conceptos de fracciones, que puedan ser manipulados por ellos.

Es importante mencionar que la información que aportó la realización de las entrevistas clínicas piagetianas fue de gran valor para el estudio, pues sirvió para analizar las respuestas dadas por los estudiantes al cuestionario de fracciones, ésta fue de vital importancia para el estudio, pues otorgó información detallada sobre los procesos cognoscitivos que los estudiantes desarrollan cuando se enfrentan a cualquier contenido escolar. Esta información es fundamental para que el profesor conozca las concepciones de los estudiantes sobre los contenidos que enseña y pueda además dirigir el proceso de enseñanza y aprendizaje de contenidos escolares, no solamente partir de su concepciones, sino a partir de las concepciones e ideas intuitivas que desarrollan los niños sobre las fracciones, además deja entrever las propias concepciones de los profesores sobre fracciones, dificultades de tipo conceptual y procedimental que los estudiantes enfrentan en cuando aprenden cualquier contenido escolar.

9.2.2 Conclusiones de la segunda etapa del estudio

La propuesta de trabajo con las secuencias de actividades, permitió que los estudiantes trabajaran conceptos de fracciones que se les dificultan. Se observó que, cuando se presentan actividades con materiales manipulativos, que representan conceptos matemáticos, además de una propuesta de trabajo con modelos alternativos a los utilizados en la escuela, como el modelo parte-todo, los estudiantes participan mejor en las actividades.

Los estudiantes tienen mayor interés cuando se presenta material y no solo al trabajar con conceptos en lo abstracto. Brousseau y Warfield (2014), reportaron que,

al utilizar materiales manipulables, los estudiantes comprendían mejor los conceptos. Zhang, Clements y Ellerton (2015), consideran importante el uso de modelos alternativos para lograr una comprensión mejor de los conceptos.

Además, es considera importante que las actividades se planteen a partir de los conocimientos previos de los estudiantes, para que puedan seguir avanzando en dichos conocimientos.

Una vez realizadas las actividades, es importante reconocer si los estudiantes tuvieron un avance conceptual en las ideas matemáticas trabajadas. Es por ello que se propuso un cuestionario final que permitiera observar el avance de los estudiantes respecto al cuestionario inicial de fracciones aplicado al inicio del estudio.

9.2.3 Conclusiones de la tercera etapa del estudio

Para poder observar los avances que pudieron haber presentado los estudiantes a partir de la secuencia de actividades, se aplicó un cuestionario final de fracciones. Al comparar los resultados del cuestionario inicial con el cuestionario final, se observó que, en los conceptos trabajados en el segundo, hubo un avance conceptual de los estudiantes respecto a varias de las ideas matemáticas abordadas en la secuencia de actividades, como la idea de mitad, la representación de fracciones en cantidad continua, con las fracciones impropias específicamente. Aunque seguían teniendo dificultades con conceptos como las fracciones equivalentes y la representación de fracciones en la recta cuando se trabaja con fracciones impropias. Se puede decir que, trabajar los conceptos a partir de actividades personalizadas, que utilicen material manipulable, permite que los estudiantes avancen en sus conocimientos de fracciones. Sin embargo, es necesario que se dediquen más horas al trabajo con dichos conceptos y se revisen aquellos con los que los estudiantes tienen mayores dificultades.

Referencias bibliográficas

- Ávila Storer, A. (2006). Prácticas cotidianas y conocimiento sobre las fracciones. Estudio con adultos de escasa o nula escolaridad. *Educación Matemática*, vol. 18, núm. 1, México: Grupo Santillana, pp. 5-35.
- Brousseau, G., Brousseau, N. y Warfield, V. (2014). *Teaching Fractions through Situations: A Fundamental Experiment* (1st ed.). New York: Springer.
- Block, D. (2008). El papel de la noción de razón en la construcción de las fracciones en la escuela primaria. En R. Cantoral Uriza, et al, *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte iberoamericano*. México: Ediciones Díaz de Santos (pp. 495-512).
- Butto, C. (2013). El aprendizaje de fracciones en educación primaria: una propuesta de enseñanza en dos ambientes. *Horizontes pedagógicos*. Volumen 15. N° 1, México: iberoamericana, pp. 33-45.
- Campo, R. y Llinares, S. (2015). Características en la construcción de la fracción impropia en estudiantes de 9-12 años. *Jornal Internacional de Estudos em Educação matemática*, 8(4), 1-20.
- Castro, E. y Torralbo, M. (2001). Fracciones en el currículo de la Educación Primaria. En E. Castro. (Ed.), *Didáctica de la matemática en educación primaria* (pp. 285-314). Madrid: síntesis educación.
- Charalambous, C. y Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a Theoretical Model to Study Students' Understandings of Fractions. *Educational Studies in Mathematics*, Volume 64, Number 3, (pp. 293-316).
- Cobb, P., Zhao, Q. y Visnovska, J. (2008). Learning from and Adapting the Theory of Realistic Mathematics education. *Éducation Et Didactique*, vol. 2 (núm 1), 105-124. doi: <http://dx.doi.org/10.4000/educationdidactique.276>
- Cortina, J., Cardoso, E. y Zúñiga, C. (2012). El significado cuantitativo que tienen las fracciones para estudiantes mexicanos de 6º. de primaria. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 14(1), 70-85. Recuperado de: <http://redie.uabc.mx/vol14no1/contenido-cortinacardozo.html>

- Cortina, J., Zúñiga, C. y Visnovska, J. (2013). La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones. *Educación Matemática*, 25 (pp. 7-29). Recuperado de: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40528961002>
- Delval, J. (2012). *Descubrir el pensamiento de los estudiantes. Introducción a la práctica del método clínico*. México: Siglo Veintiuno Editores.
- Enríquez Ramírez, H. (2014). *El conocimiento del profesor de educación primaria sobre el contenido escolar de razón y proporción. Una aproximación desde los procedimientos de resolución a lecciones del libro de texto*. Tesis maestría. UPN, México.
- Escolano, R. y Gairín, J. (2005). Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. *Revista Iberoamericana De Educación Matemática*, número 1, (pp. 17-36).
- Fazio, L. y Siegler, R. (2011). *Enseñanza de las fracciones*. Brúcelas, Bélgica: Academia Internacional de Educación, Oficina Internacional de Educación. Recuperado de: <https://en.unesco.org/>
- Fernández Verdú, C. y Llinares Cisca, S. (2010). Relaciones entre el pensamiento aditivo y multiplicativo en estudiantes de educación primaria. El caso de la construcción de la idea de razón. Chillán, Chile: *Horizontes educacionales*, sin mes, 11-22.
- Figueras, O. (1988). *Dificultades de aprendizaje en dos modelos de enseñanza de los racionales*. Tesis Doctorado. Cinvestav, México.
- Flynn, M. (2017). Who wants pancakes? *Teaching Children Mathematics*, 23(9), 522-525. doi:10.5951/teacchilmath.23.9.0522
- Fuentes Fuentes, R. (2010). Enseñanza de fracciones. Una experiencia didáctica en quinto año de enseñanza primaria. *Unión Revista Iberoamericana De Educación Matemática*, Número 22, pp. 169-182. Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3735344>
- González Rodríguez, E. (2006). *Las tareas extraescolares de Matemáticas en la educación primaria*. Tesis. México: Universidad Pedagógica Nacional.
- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, M. (2014). *Metodología de la investigación* (6th ed., pp. 3-119). México: McGraw-Hill/Interamericana.

- Kieren, T. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In R. Lesh (Ed.), *Number and measurement: papers from a research workshop* (pp. 101-144). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.
- Kieren, T. (1980). The rational number construct. Its elements and mechanisms. En T. H. Kieren (Ed.), *Recent Research on Number Learning* (pp. 125-150). Columbus, Ohio: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education University of Alberta.
- Kieren, T. (1993). Rational and fractional numbers: from quotient fields to recursive understanding. En T. P. Carpenter, E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 49-84). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- King, B. y Smith C. (2017). A fraction activity to understand sorting algorithms. *Teaching Children Mathematics*, 23(9), 560-563. doi:10.5951/teacchilmath.23.9.0560
- Lewis, R., Gibbons, L., Kazemi, E. y Lind, T. (2015). Unwrapping Students' Ideas about Fractions. *Teaching Children Mathematics*, 22(3), 158-168. doi: 10.5951/teacchilmath.22.3.0158
- Llinares, S. y Sánchez, M. (1997). Aprender a enseñar, modos de representación y número racional. En Sierra, Modesto; Rico, Luis (Eds.), *Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 13-24). Zamora: Universidad de Granada.
- McCormick, K. (2015). Making Fractions Meaningful. *Teaching Children Mathematics*, 22(4), 230-238. doi:10.5951/teacchilmath.22.4.0230
- Montuy García, C. (2012). *La importancia de la tarea escolar en el aprovechamiento de los estudiantes de la escuela primaria*. Tesina. Campeche: UPN (P 11).
- Morrow-Leong, K. (2016). Evidence-Centered Assessment. *Teaching Children Mathematics*, 23(2), 82-89. doi:10.5951/teacchilmath.23.2.0082
- Perera Dzul, P. y Valdemoros Álvarez, M. (2009). *Enseñanza experimental de las fracciones en cuarto grado*. México: Santillana (pp. 29-61). Recuperado de: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40516761003>
- Pisa. (2012). *Programa para la evaluación internacional de estudiantes*. Recuperado de: <http://www.oecd.org/pisa/data/>

- Ramírez, M. y Block, D. (2009). La razón y la fracción: un vínculo difícil en las matemáticas escolares. *Educación Matemática*, vol. 21, núm. 1, abril, 2009, pp. 63-90. Recuperado de: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40516761004>
- Rosas, R. y Christian, S. (2008). *Piaget, Vigotski y Maturana. Constructivismo a tres voces*. Buenos Aires: Aique. Recuperado de: <http://preguntalealprofesor.blogspot.mx/2016/04/piaget-vigotski-y-maturana.html>
- Perera Dzul, P. y Valdemoros Álvarez, M. (2007). Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones en cuarto de educación primaria. *Investigación En Educación Matemática*, vol. XI, pp. 209-218.
- Ruiz Cruz, C. (2013). *La fracción como relación parte-todo y como cociente: Propuesta Didáctica para el Colegio Los Alpes IED* (Tesis de maestría). Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- SEP. (2011). *Plan de Estudios 2011*. Educación Básica. México: Secretaría de Educación Pública.
- SEP. (2011). *Programas de estudio 2011*. Guía para el Maestro. Educación Básica. Primaria. Quinto grado. México: Secretaría de Educación Pública.
- SEP. (2015). *Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Quinto grado*. México: Secretaría de Educación Pública.
- SEP. (2017). *Aprendizajes clave para la educación integral. Educación Primaria. 6º. Plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación*. México: Secretaría de Educación Pública.
- Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 26(2), 114-145.
- Tobias, J. (2014). Mixing Strategies to Compare Fractions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 19(6), 376-381. doi:10.5951/mathteachmidscho.19.6.0376
- Vinogradova, N. y Blaine, L. (2013). Sweet Work with Fractions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 18(8), 484-491. doi:10.5951/mathteachmidscho.18.8.0484
- Wilkerson, T., Bryan, T. y Curry, J. (2012). An Appetite for Fractions. *Teaching Children Mathematics*, 19(2), 90-99. doi:10.5951/teachmath.19.2.0090

- Zhang, X., Clements, M. y Ellerton, N. (2014). Conceptual mis(understandings) of fractions: From area models to multiple embodiments. *Mathematics Education Research Journal*, vol. 27 (núm. 2), pp. 233-261. <http://dx.doi.org/10.1007/s13394-014-0133-8>
- Zhang, X., Clements, M. y Ellerton, N. (2015). Engaging Students with Multiple Models of Fractions. *Teaching Children Mathematics*, 22(3), 138-147. <http://dx.doi.org/10.5951/teacchilmath.22.3.0138>

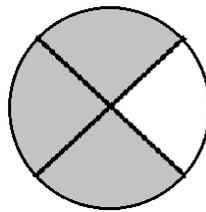
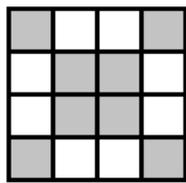
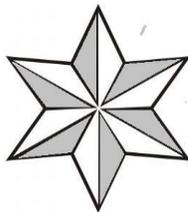
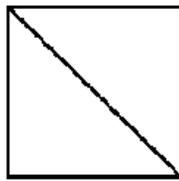
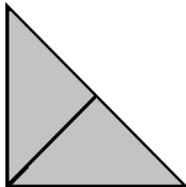
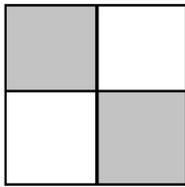
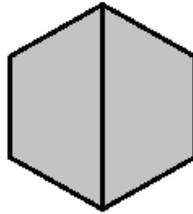
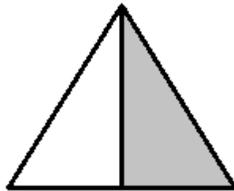
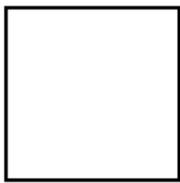
Anexos

Anexo 1
Cuestionario inicial de fracciones

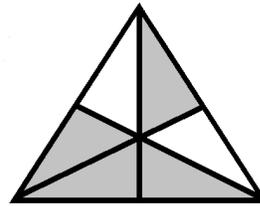
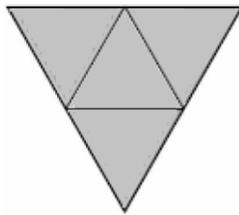
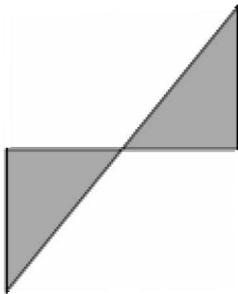
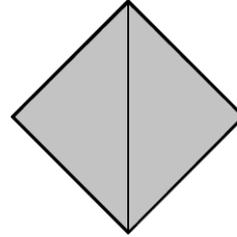
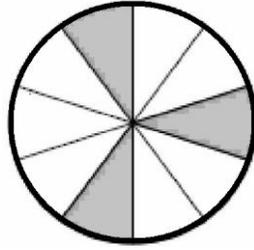
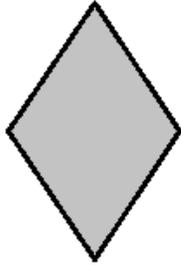
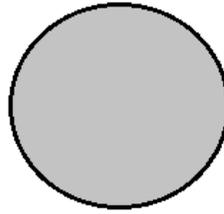
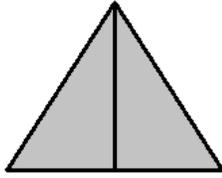
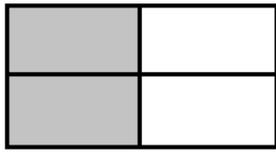
Cuestionario inicial de fracciones

Lee con atención las preguntas y responde como se te indica. En caso de alguna duda preguntar al instructor.

1. Identifica las figuras cuya parte sombreada representa una mitad y márcalas con una X.

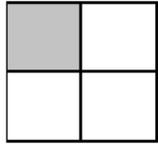


2. Encierra las figuras cuya parte sombreada representa un entero.

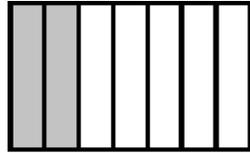


,

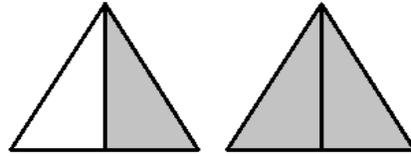
3. Escribe la fracción que representa la parte sombreada.



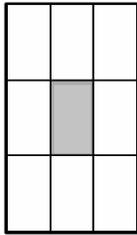
A) _____



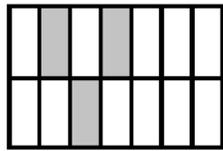
B) _____



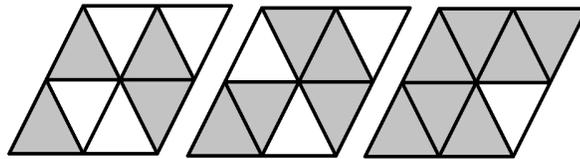
C) _____



D) _____



E) _____



F) _____

4. Representa con una figura las siguientes fracciones:

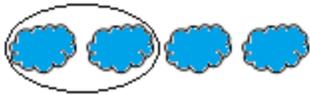
$$\frac{1}{4}$$

$$\frac{2}{7}$$

$$\frac{5}{2}$$

$$\frac{18}{8}$$

5. Observa los siguientes grupos de figuras y responde como se te indica.



Del total de nubes, ¿qué fracción representa la parte encerrada? _____



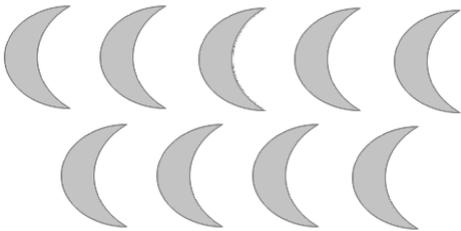
Del total de flechas, encierra en un círculo $\frac{1}{3}$



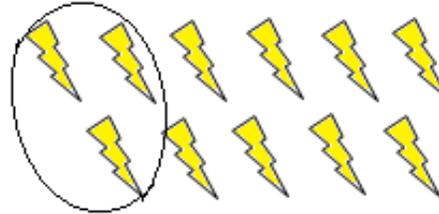
Del total de estrellas, ¿qué fracción representa la parte encerrada? _____



Del total de corazones, encierra $\frac{3}{8}$

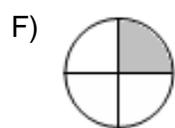
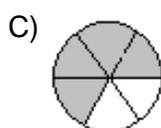
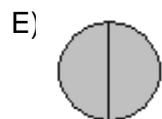
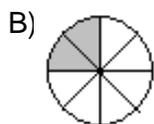
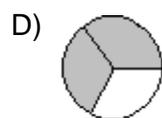
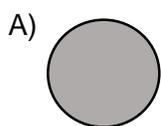


Del total de lunas, encierra en un círculo $\frac{4}{9}$



Del total de rayos, ¿qué fracción representa la parte encerrada? _____

6. Observa las figuras de abajo y encierra con el mismo color las que son equivalentes:



7. De acuerdo al ejemplo que se te da, continua con la secuencia de las fracciones equivalentes:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}$$

$$\frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{9}{15}, \frac{12}{20}$$

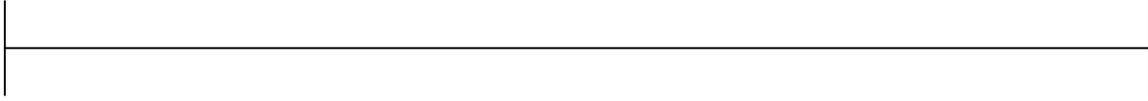
$$\frac{1}{3} \text{ _____, _____, _____}$$

$$\frac{3}{4} \text{ _____, _____, _____}$$

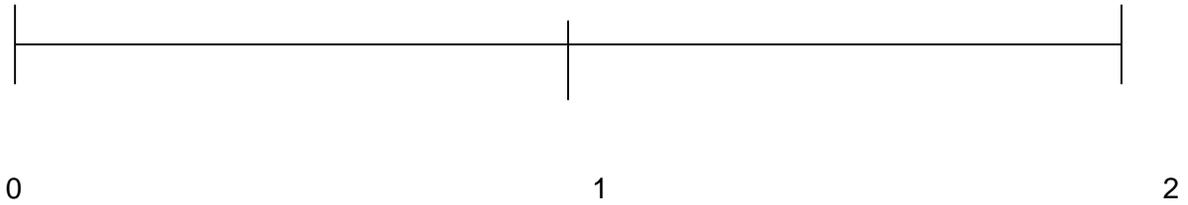
$$\frac{1}{4} \text{ _____, _____, _____}$$

$$\frac{3}{6} \text{ _____, _____, _____}$$

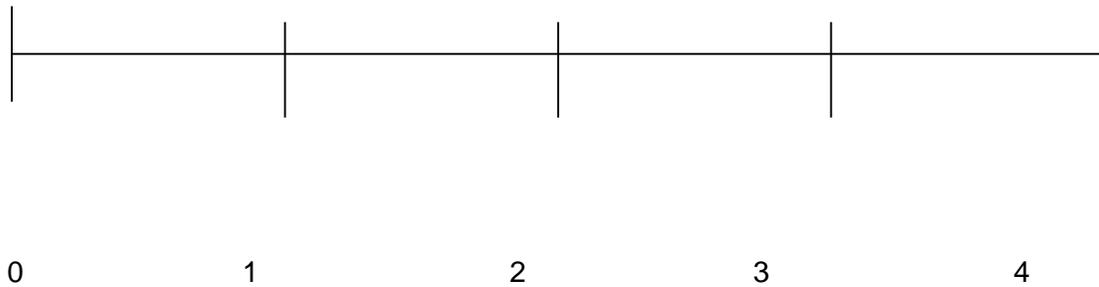
8. Representa las siguientes fracciones en la recta: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$.



9. Representa las siguientes fracciones en la recta numérica: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{3}$.



10. Representa las siguientes fracciones en la recta numérica: $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{4}{2}$.



11. Resuelve las siguientes operaciones de suma de fracciones:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} =$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} =$$

12. Resuelve las siguientes restas de fracciones:

$$\frac{4}{3} - \frac{2}{3} =$$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{4} =$$

13. Resuelve las siguientes multiplicaciones de fracciones.

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} =$$

$$\frac{3}{6} \times \frac{2}{3} =$$

14. Resuelve las siguientes divisiones de fracciones:

$$\frac{2}{6} \div \frac{1}{2} =$$

$$\frac{2}{9} \div \frac{1}{7} =$$

15. Imagina que se te pide hacer una mezcla de jugo de naranja y agua en una jarra. En las figuras de abajo, los vasos anaranjados representan el jugo de naranja concentrado y los azules el agua. De acuerdo a las imágenes, selecciona la oración que creas que es verdad.



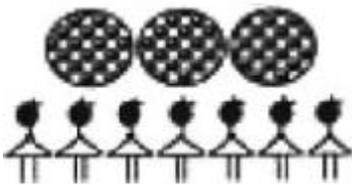
A



B

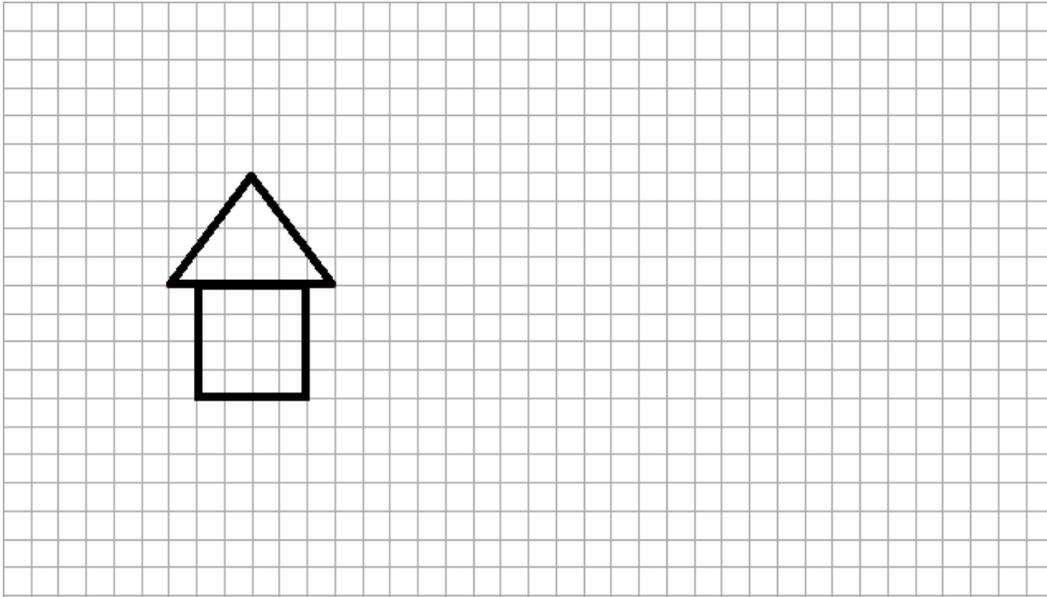
- 1) La mezcla A tiene un sabor más fuerte a naranja que la mezcla B.
- 2) La mezcla B tiene un sabor más fuerte a naranja que la mezcla A.
- 3) La mezcla A y la mezcla B tienen el mismo sabor a naranja.
- 4) No sé qué mezcla tiene el sabor más fuerte a naranja.

16. En una fiesta, separan a los estudiantes de las niñas para repartir unas pizzas como se muestra en la siguiente imagen:



¿En qué grupo le toca más pizza a cada persona, en el de niñas o en el de estudiantes?
Explica tu respuesta y tu procedimiento.

17. Dibuja una casa similar a la de abajo, pero del doble de tamaño.



18. Nos vamos de vacaciones a un hotel que ofrece varias actividades. En la recepción nos dieron un mapa en el que se muestran los lugares de interés, y nos dijeron que 5 centímetros del mapa representaban 200 metros de la realidad. La playa se encuentra a 8 centímetros del hotel en el mapa. ¿Cuál es la distancia real entre la playa y el hotel?

19. En una tienda de celulares se encuentran varias ofertas:



Precio: \$2000.00

Descuento: 20%



Precio: \$3000.00

Descuento: 70%



Precio: \$1500.00

Descuento: 10%

¿Qué celular tiene el mejor precio con el descuento?

Anexo 2

Entrevista semiestructurada

Guion para la entrevista semiestructurada Quinto Grado

Entrevistador: Daniel Domínguez Sosa

Nombre

Edad:

Género: M F

Adscripción institucional:

Años de experiencia docente en educación primaria

Grado que imparte actualmente:

Años de experiencia en dicho grado:

Formación docente

Nivel académico: Licenciatura Especialidad Maestría Otra

Experiencia docente:

Categoría 1.- Historia de vida relacionada con la elección de su profesión

1.- ¿Por qué escogió dedicarse a la profesión docente?

2.- ¿Qué factores lo han estimulado en el desarrollo de su profesión docente?

3.- ¿Qué factores lo han decepcionado en el desarrollo de su profesión docente?

4.- ¿Cómo se siente usted en el manejo de los contenidos?

5.- Específicamente, en fracciones, ¿Considera que los contenidos que se enseñan en ese grado son fáciles, difíciles?

¿Por qué?

¿Me podría dar un ejemplo de un contenido que haya sido fácil, uno difícil y cómo lo resolvió?

Categoría 2: Rescate de experiencia docente

1.- ¿Cuántos años lleva impartiendo clases en esta escuela?

2.- ¿En qué grados ha impartido clases y cuántas veces a cada grado?

3.- ¿Qué grado escolar se le ha hecho más difícil impartir clases?
¿Por qué?

4.- ¿Qué grado escolar se le ha hecho más fácil impartir clases?
¿Por qué?

5.- ¿Está haciendo una revisión del libro de quinto o ya está utilizando el libro de sexto?

6.- ¿Cómo ha sido el trabajo con el libro de texto desafíos matemáticos de sexto?

Categoría 3.- Fracciones en el libro de desafíos matemáticos de sexto

A) En el desafío 18, titulado “Distancia a escala”, ¿Los estudiantes comprenden la relación escalar 1:1 para identificar distancias?

¿Utilizan la escala adecuadamente para encontrar la distancia entre dos puntos?

¿En qué unidad de medida dan sus respuestas? ¿Qué unidad de medida le dan al 1?

¿y a 1000000? ¿A qué cree que se debe que usen esa unidad?

¿Qué hace en caso de que la mayoría no encuentre el valor adecuado en la escala? Cuando un estudiante tiene una respuesta equivocada,

¿Qué procedimiento utiliza en dicha situación?

¿Me podría dar un ejemplo?

B) En el desafío 20, titulado “Mercancía con descuento”, ¿Los estudiantes logran completar los datos en la tabla?

¿Qué procedimientos realizan para llenar la tabla?

¿Entienden el valor que representa el 10% para cada precio?

¿Qué valor restan del precio inicial?

¿Identifican el precio rebajado?

¿A qué cree que se debe que no resten la cantidad adecuada?

¿Qué hace en caso de que la mayoría no identifique el valor del 10%?

¿Logran identificar los descuentos del 5% y 40%? Cuando se les piden que identifiquen el porcentaje que se descontó, ¿Lo reconocen?

¿Cuáles son los errores que los estudiantes cometen regularmente? ¿A qué atribuye usted los errores que los estudiantes cometen?

C) En el desafío 23, titulado “Sobre la recta”, ¿los estudiantes logran identificar la unidad en la recta?

¿Representan de manera adecuada las fracciones en la recta numérica? ¿A qué cree que se debe?

¿Qué hace usted frente a los errores que comenten los estudiantes?

¿Por qué cree que los estudiantes dan esa respuesta en el cuestionario de fracciones?

A) En el desafío 50, titulado “¿Cuál está más concentrado?”

Los estudiantes ¿Logran resolver las preguntas? ¿Qué dificultades presentan con esa pregunta?

¿Cómo resuelven lo solicitado? ¿Utilizan la relación entre las dos cantidades para resolverlo? ¿Qué estrategias utilizan? ¿A qué cree que se debe que utilicen esa estrategia?

Cuando la mayoría de los estudiantes no logra utilizar alguna estrategia adecuada para llegar a la solución ¿Qué hace usted en esa situación? ¿Qué propuesta de solución les enseñaría?

En el cuestionario de fracciones que aplicamos en diciembre del año pasado, algunas de las respuestas de los estudiantes fueron las siguientes.

Fracciones equivalentes

¿Por qué cree que los estudiantes respondieron de esa forma?

¿Qué elementos considera que tomaron en cuenta para responder?

Porcentaje

¿Por qué considera que utilizan esa estrategia para resolver la pregunta?

Categoría 4.- Materiales utilizados

¿Utiliza usted algún otro libro u otro material en su clase? ¿Cuál y cómo lo utiliza? ¿Me podría mostrar algún ejemplo de una actividad?

¿Qué opina de las actividades del libro de desafíos matemáticos para aprender fracciones?

¿Me podría dar un ejemplo, por favor?

Si usted no tuviera el libro de texto de desafíos matemáticos, ni ningún otro libro de apoyo, ¿Qué ideas matemáticas trabajaría y por qué? ¿Me podría mencionar tres actividades que estén relacionadas entre sí?

Categoría 5.- Evaluación de los conocimientos de fracciones

1.- ¿Cómo evalúa el aprendizaje de los contenidos de fracciones?

2.- ¿Qué es lo que considera más importante cuando usted evalúa el conocimiento de fracciones? ¿Por qué?

¿Desea usted añadir algo que no se le haya preguntado?

Anexo 3

Secuencia de actividades

Actividad 1

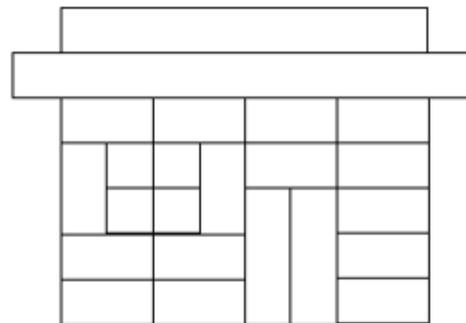
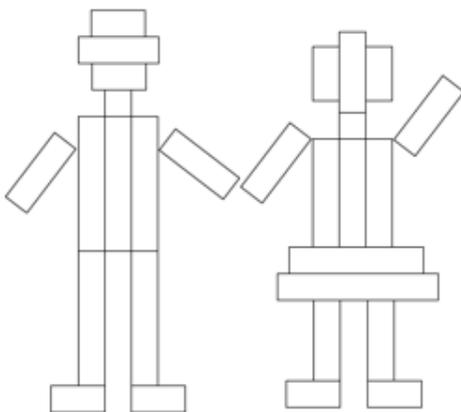
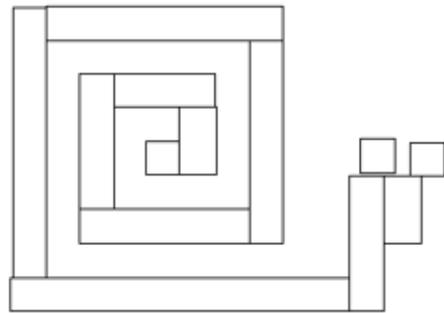
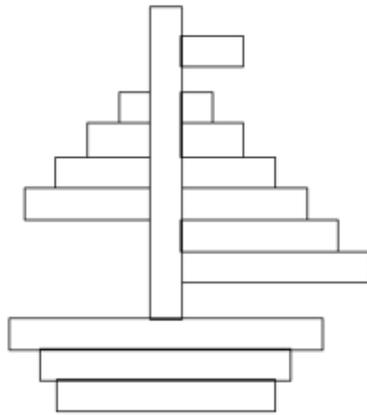
| | |
|----------------|-----------------|
| Nombre (s) | |
| Fecha | |
| Escuela | |
| Hora de inicio | Hora de término |

Actividad #1. Juego libre

Utiliza las regletas para formar las figuras que te agraden.

Actividad #2. Juego dirigido

Realiza las siguientes figuras con las regletas.



| | |
|----------------|-----------------|
| Nombre (s) | |
| Fecha | |
| Escuela | |
| Hora de inicio | Hora de término |

Actividad #3. Reconocer las regletas

Colorea las regletas de acuerdo a su tamaño y color

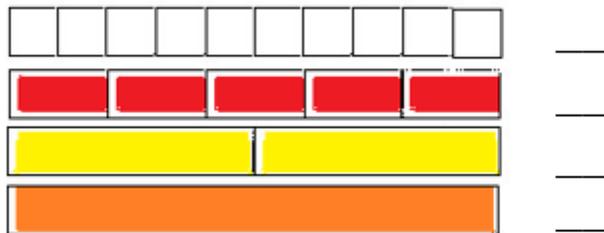
| Regletas | Tamaño o valor | Color |
|---|----------------|-------|
|  | | |
|  | | |
|  | | |
|  | | |
|  | | |
|  | | |
|  | | |
|  | | |
|  | | |
|  | | |

| | |
|----------------|-----------------|
| Nombre (s) | |
| Fecha | |
| Escuela | |
| Hora de inicio | Hora de término |

Actividad #4.

Fracciones, unidad, representación de fracciones

Identifica la fracción que representan en cada situación las regletas

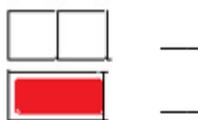
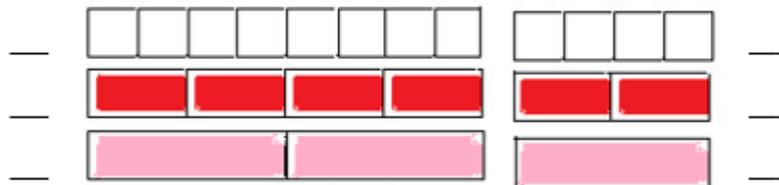


| | |
|----------------|-----------------|
| Nombre (s) | |
| Fecha | |
| Escuela | |
| Hora de inicio | Hora de término |

Actividad #5.

Fraciones equivalentes

Identifica las fracciones equivalentes de acuerdo al entero



| | |
|----------------|-----------------|
| Nombre (s) | |
| Fecha | |
| Escuela | |
| Hora de inicio | Hora de término |

Actividad #6

Fracciones impropias

¿De cuántas maneras puedes representar la fracción impropia $3/2$?



| | |
|----------------|-----------------|
| Nombre (s) | |
| Fecha | |
| Escuela | |
| Hora de inicio | Hora de término |

Actividad #7. Suma de fracciones

Realiza las siguientes sumas de fracciones con ayuda de las regletas.

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{6}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{4}{6}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{6} + \frac{1}{3}$$

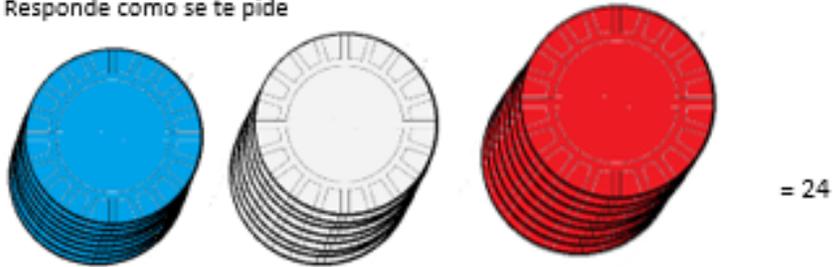
$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$$

Actividad 2

| | |
|-----------------|------------------|
| Fecha: | |
| Escuela: | |
| Hora de inicio: | Hora de término: |

Actividad #1. Representación de fracciones

Responde como se te pide



Si la unidad que se utiliza es de 24 fichas, ¿A cuántas fichas equivalen las siguientes fracciones? Puedes responder con números o con figuras.

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{6}$$

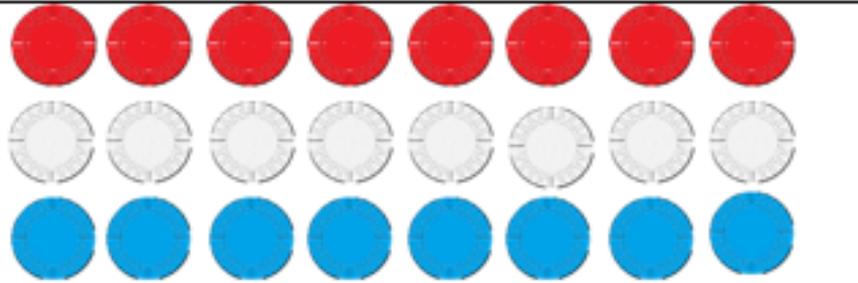
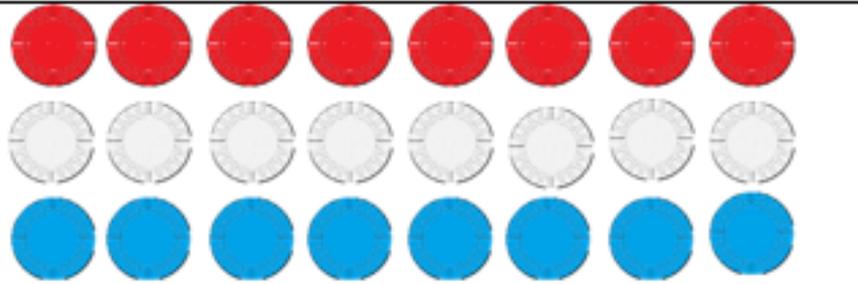
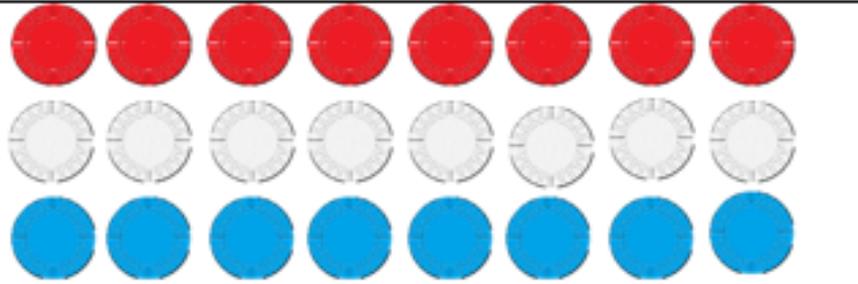
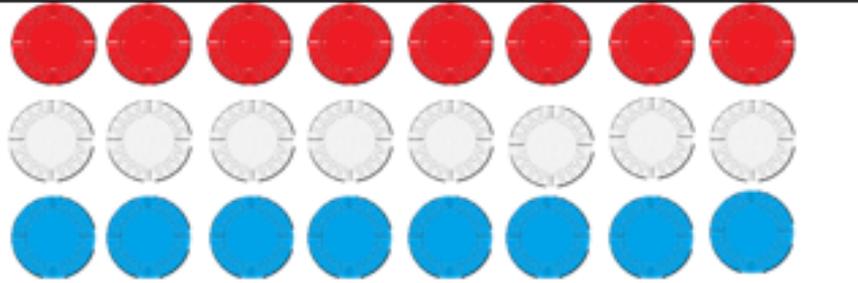
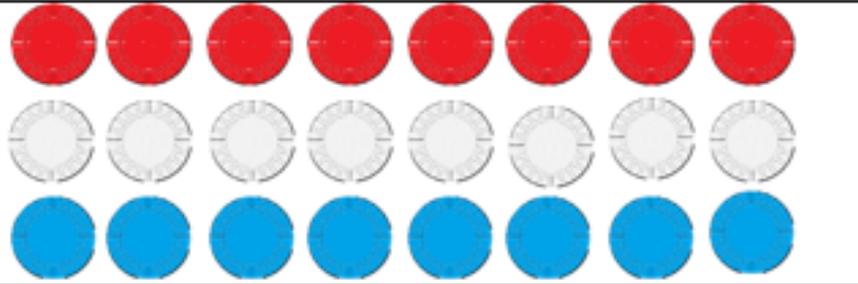
$$\frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{24}$$

Actividad #2. Equivalencias de fracciones

Siendo la unidad 24, Encierra las siguientes fracciones e identifica las que son equivalentes a $\frac{1}{2}$.

| | |
|---------------|--|
| $\frac{2}{3}$ |  |
| $\frac{2}{4}$ |  |
| $\frac{3}{5}$ |  |
| $\frac{3}{6}$ |  |
| $\frac{4}{8}$ |  |

Actividad 3



| | |
|----------------|-----------------|
| Nombre (s) | |
| Fecha | |
| Escuela | |
| Hora de inicio | Hora de término |

Actividad #1 Identificación de la unidad en la recta.

Identifica la unidad que se representa en la recta.



| | |
|----------------|-----------------|
| Nombre (s) | |
| Fecha | |
| Escuela | |
| Hora de inicio | Hora de término |

Actividad #2. Identificar $\frac{1}{2}$ y cuartos en la recta.

Identifica $\frac{1}{2}$ en la recta. Identifica $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$ y $\frac{4}{4}$ en la recta.



| | |
|----------------|-----------------|
| Nombre (s) | |
| Fecha | |
| Escuela | |
| Hora de inicio | Hora de término |

Actividad #3. Identificación de tercios.

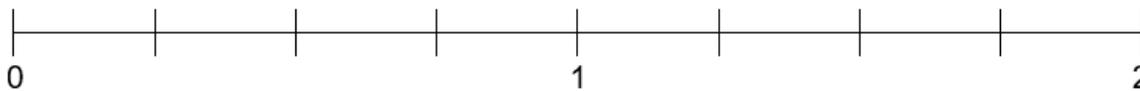
Identifica $1/3$, $2/3$ y $3/3$ en la recta.



| | |
|----------------|-----------------|
| Nombre (s) | |
| Fecha | |
| Escuela | |
| Hora de inicio | Hora de término |

Actividad #4. Identificar sextos y doceavos

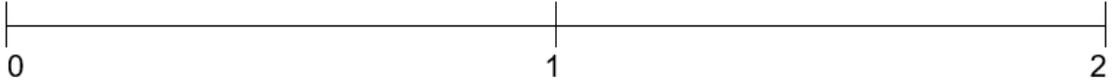
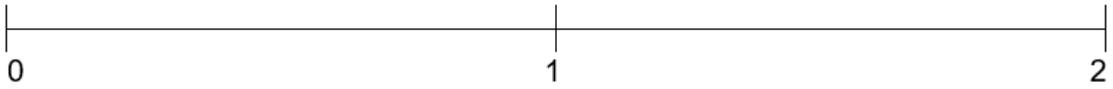
Identifica los sextos y octavos en la recta numérica.



| | |
|----------------|-----------------|
| Nombre (s) | |
| Fecha | |
| Escuela | |
| Hora de inicio | Hora de término |

Actividad #5 Identificar fracciones impropias

Identifica $3/2$, $4/3$ y $5/4$



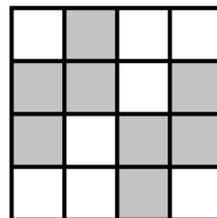
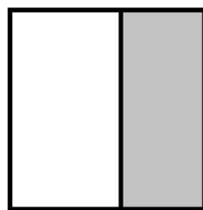
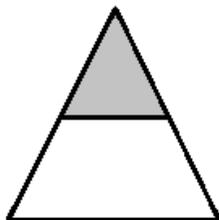
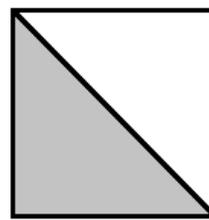
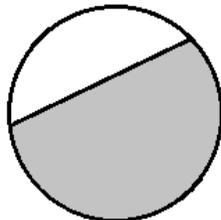
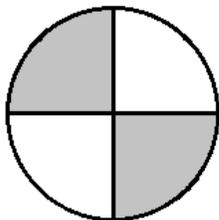
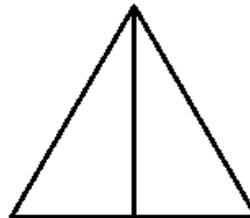
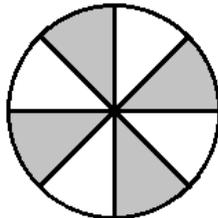
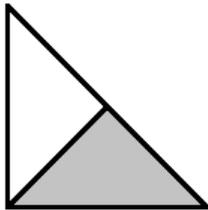
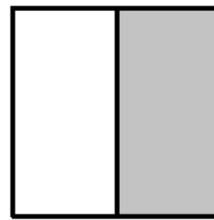
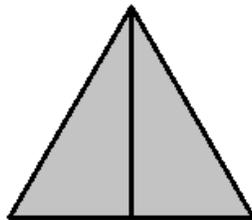
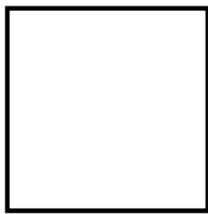
Anexo 4

Cuestionario final

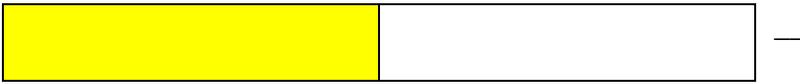
Questionario de fracciones

Instrucciones: Lee con atención las preguntas y responde como se te indica. En caso de alguna duda pregúntale al aplicador.

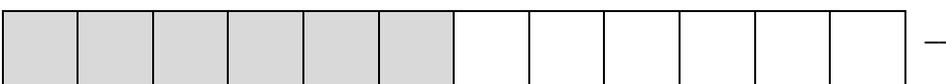
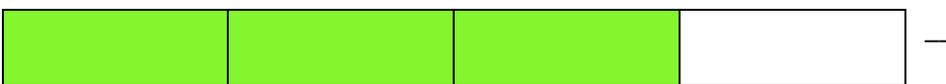
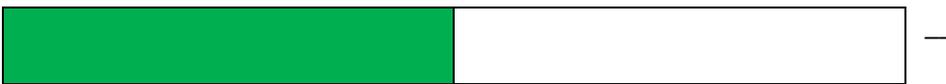
1. Marca con una X las figuras que representen una mitad.



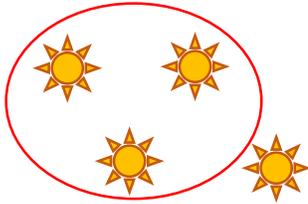
2. De acuerdo a la unidad pintada en color naranja, escribe la fracción que representa la parte coloreada.



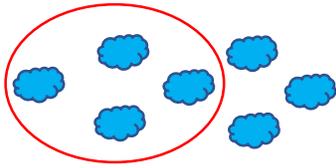
3. De acuerdo a la unidad pintada en color café, escribe la fracción que representa la parte coloreada.



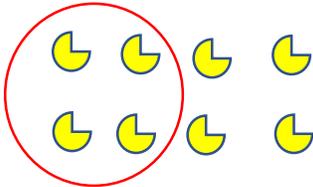
4. Del total de figuras, escribe la fracción que representa la parte encerrada.



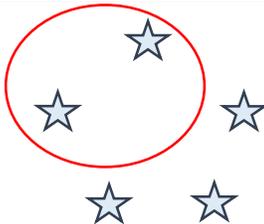
R=



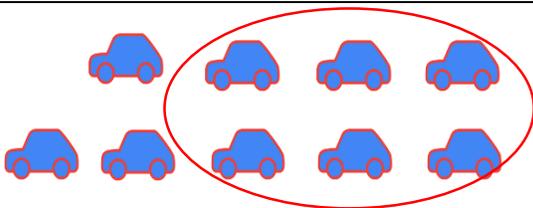
R=



R=

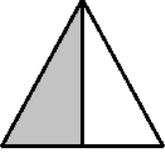
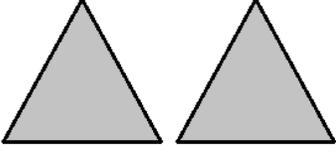
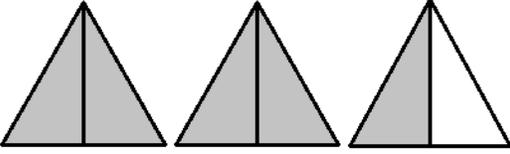
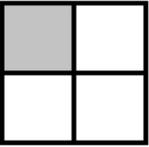
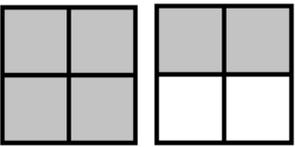
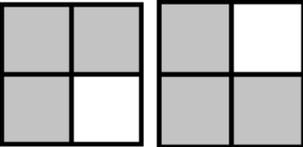
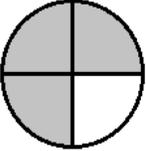
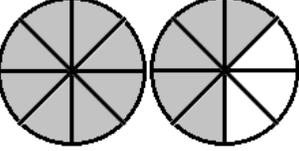
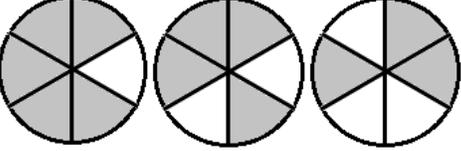


R=



R=

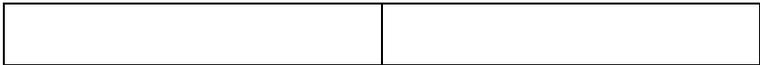
5. Escribe la fracción que está representada en las figuras.

| | | |
|---|---|--|
|  <p>A)</p> |  <p>B)</p> |  <p>C)</p> |
|  <p>D)</p> |  <p>E)</p> |  <p>F)</p> |
|  <p>G)</p> |  <p>H)</p> |  <p>I)</p> |

6. De acuerdo a la unidad sombreada, colorea la fracción que se te indica en cada figura.



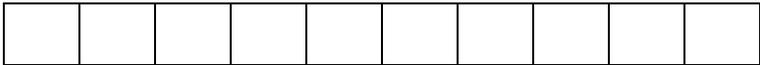
Entero



$1/2$



$2/5$



$3/10$

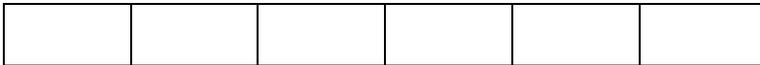
7. De acuerdo a la unidad sombreada, colorea la fracción que se te indica en cada figura.



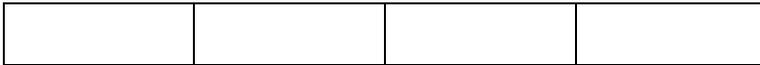
Entero



$2/3$



$5/6$



$3/4$

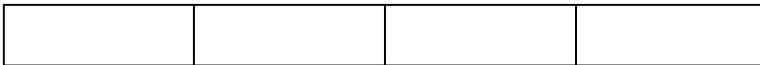
8. De acuerdo a la unidad sombreada, colorea la fracción que se te indica en cada figura.



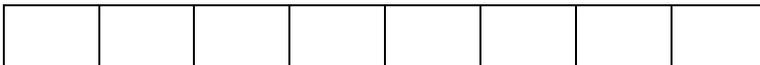
Entero



$2/2$



$2/4$



$5/8$

9. Resuelve las siguientes sumas de fracciones.

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} =$$

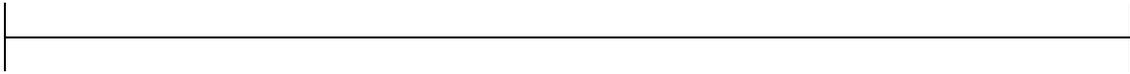
$$\frac{1}{4} + \frac{3}{8} =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} =$$

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} =$$

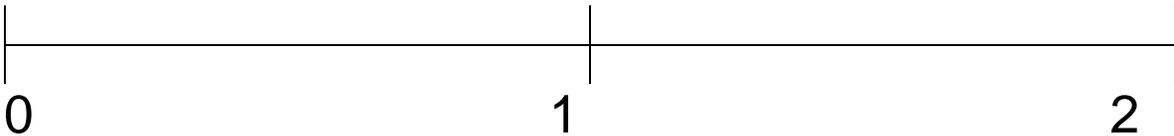
10. Representa las siguientes fracciones en la recta.

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{5}$$

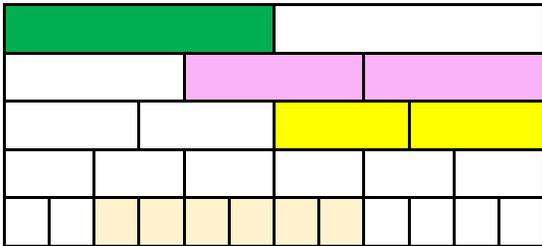


11. Representa las siguientes fracciones en la recta numérica.

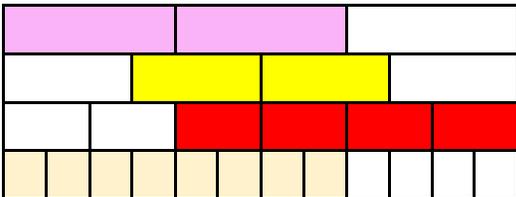
$$\frac{3}{2}, \frac{1}{4}, \frac{2}{2}, \frac{5}{6}$$



12. Marca con una X las figuras que representen la misma cantidad del modelo de color verde.



13. Marca con una X las figuras que representen la misma cantidad del modelo de color Rosa.



14. Marca con una X las figuras que representen la misma cantidad del modelo de color amarillo.

