UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

SECRETARÍA ACADÉMICA

COORDINACIÓN DE POSGRADO

MAESTRÍA EN DESARROLLO EDUCATIVO

"El conocimiento del profesor de educación primaria sobre el contenido escolar de razón y proporción. Una aproximación desde los procedimientos de resolución a lecciones del libro de texto."

Tesis que para obtener el Grado de
Maestro en Desarrollo Educativo
Presenta

Homero Enríquez Ramírez

Directora de tesis
Mtra. Edda Jiménez de la Rosa y Barrios

México, D.F. Abril, 2014

DEDICATORIAS

A mis compañeros y profesores de la generación de la maestría en Desarrollo Educativo, generación 2004-2006, por su gran aprecio e invaluables enseñanzas a un profesor oaxaqueño que tenía –y aún tiene- el sueño de ser mejor.

A la maestra que siempre me brindó su confianza, su amistad, su aprecio y su apoyo en mi vida personal y profesional. Quien vivió conmigo esta larga, intensa y complicada batalla de la investigación. Quien siempre me impulsa a seguir escalando en los peldaños del ser persona y del ser profesor. A la maestra Edda

A mis colegas, varios de ellos amigos, que me permitieron entrar en la intimidad profesional de su conocimiento y a quienes espero estas páginas aporten a su mejora.

A mi familia: Eva, Edgar e Isaac, que desde que aparecieron en mi vida son un motivo y un apoyo más para ser mejor.

A mis padres, hermanos y al padre Migue por ese gran apoyo y aliento que recibo en los momentos de éxito y de fracaso.

A los lectores la Dra. Mariana, la Mtra. Alicia, la Dra. Ivonne y el Dr. Armando, que con sus comentarios orientaron y enriquecieron mi trabajo.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

El trabajo docente demanda al profesor una gran variedad de conocimientos, actitudes, habilidades, valores y creatividad que le permitan "*decidir en la incertidumbre y actuar en la urgencia*" (Perrenoud, 2004). Adquirir lo necesario para una práctica docente exitosa –entendida como el logro académico esperado de los estudiantes- depende en gran medida de la experiencia, de la vocación y de los conocimientos disciplinarios, pedagógicos, didácticos y de aprendizaje que posea el profesor, según lo plantean diversos autores (Llinares, 1990; Perrenoud, 2004). Y aunque no existe un consenso sobre qué conocimiento es el más importante, sí lo existe sobre el conocimiento inicial, indispensable o mínimo: que el docente sepa de la materia que va a enseñar.

En el presente reporte de investigación, resultado de la inquietud por indagar el conocimiento del profesor de educación primaria sobre las matemáticas que enseña, y asumiendo éste conocimiento como el mínimo que debe poseer el docente para desarrollar su clase, doy cuenta del *conocimiento del contenido* por parte del profesor a través de los procedimientos y estrategias utilizadas para resolver problemas de razón y proporción contenidos en lecciones de los libros de texto de matemáticas (1993).

En el capítulo primero planteo y justifico el objeto de estudio de la investigación. En este apartado describo las razones personales, basadas en mi experiencia y en el estudio del tema, que me hicieron optar por indagar el conocimiento del profesor sobre las matemáticas que enseña, específicamente sobre razón y proporción. Asimismo argumento las razones de importancia del estudio para el estado del conocimiento actual y para la mejora de la formación profesional de los docentes.

En el capítulo segundo, constituido por la fundamentación teórica y conceptual abordo cinco elementos de importancia para el trabajo: en primer lugar, *el conocimiento profesional del profesor*, donde discuto qué debe saber el profesor de matemáticas; en segundo lugar; en segundo lugar, analizo el papel del *libro de texto* en el aula porque es el material de donde se extrajeron los problemas resueltos por los profesores y porque dichos problemas son los que los profesores enseñan debido a que este recurso es el material en torno al cual gira la clase; en tercer lugar, reviso los conceptos de *estrategia y técnica* como procedimientos que utilizaron los profesores; en cuarto lugar, discuto *la resolución de problemas* como marco para comprender qué es un problema y qué se requiere para resolver un problema; por último analizo el tema de *razón, proporción y razonamiento proporcional* con el fin comprender sus propiedades matemáticas, así como identificar los procesos cognitivos vistas a través de las estrategias, técnicas y errores al momento de resolver problemas de razón y proporción.

En el tercer capítulo, referente a la metodología, describo el enfoque de la investigación, las características de la población y describo los instrumentos utilizados. También en este apartado doy cuenta del proceso que se siguió en la investigación: la construcción de instrumentos, la selección y contacto de profesores que participaron, el trabajo de campo y análisis de resultados.

El cuarto capítulo, destinado a la presentación de los resultados de la investigación, está organizado en función de cuatro de los problemas resueltos y de las estrategias, técnicas y soluciones dadas por los profesores. De esta manera cada subapartado del capítulo comienza con la presentación del problema y sus características; posteriormente se muestran la cuantificación de los resultados en base a las estrategias y soluciones y; por último y lo más importante del trabajo, el análisis cualitativo, de casos representativos del total de participantes, sobre las estrategias, procedimientos y soluciones escritas, descritas y explicadas por los docentes.

En el último capítulo hago una síntesis de los resultados de la investigación en función del tipo de problema y su relación con las resoluciones de los profesores, que reafirma y enriquece la investigación que sobre el razonamiento proporcional existe. Por otra parte, con base en los datos obtenidos, analizo la competencia matemática de los profesores, que como lo planteo es lo mínimo que los profesores deben saber. Otra parte del capítulo está relacionado con algunas rutas de próximas investigaciones y con sugerencias para la formación inicial y continua de los profesores.

CAPITULO PRIMERO. EL PROBLEMA OBJETO DE ESTUDIO Y SU JUSFITICACIÓN

Mi experiencia profesional

El trabajo como profesor de educación primaria en diversas comunidades del estado de Oaxaca dio origen a mi objeto de estudio. El salón de clases, los talleres de actualización y los concursos de conocimientos de alumnos fueron los espacios donde diversos indicios hicieron germinar mis inquietudes por saber sobre el conocimiento matemático del profesor, debido a que, según mi parecer, era una de las causas que generaban el bajo nivel en la competencia matemática del alumno.

Los problemas enfrentados con la enseñanza de las matemáticas los pude observar en niños y niñas de quinto y sexto grado principalmente. Las escalas, la conversión de unas unidades a otras, el porcentaje, volumen y áreas eran temas difíciles para los estudiantes. Al resolver problemas relacionados con éstos temas los alumnos presentaban dificultades asociadas a la comprensión del problema, al manejo de conceptos y técnicas, que muchas veces uno espera ya las hayan aprendido en el grado anterior. El echarnos la culpa unos a otros sobre el rendimiento de nuestros alumnos y para justificar los logros al final del ciclo escolar es algo común entre los profesores. El de primer grado se la hecha al de preescolar, el de segundo al de primero, el de sexto al de quinto, y así sigue la cadena, pero lo cierto es que además de las causas externas que afectan el aprendizaje del alumno, hay causas relacionadas con la enseñanza y por lo tanto, con el profesor. Las experiencias y la reflexión hecha me hicieron pensar que el bajo rendimiento de los alumnos no era cuestión de una mala enseñanza por algún profesor en el transcurso de su vida escolar, sino posiblemente de todos o de varios debido a carencias de conocimiento.

En los concursos anuales de conocimientos de sexto grado los promedios en matemáticas eran muy bajos, la puntuación de la mayoría de los participantes apenas si alcanzaba el 50 por ciento o lo superaba mínimamente, a excepción de los alumnos ganadores que obtenías un 70 u 80 por ciento de aciertos. Cuando se daban los resultados del concurso para premiar a la escuela con el mejor promedio, resultaba que el promedio de las ganadoras estaba entre el 50 y 60 por ciento, los cuales no eran resultados muy alentadores, sin embargo, poco nos preocupaba y ocupaba. Los magros resultados de los estudiantes en general me hicieron pensar en un trabajo docente deficiente, algo pasaba con nosotros los profesores y nuestro trabajo que se veía reflejado en el aprendizaje de los alumnos.

El espacio que me permitió tener más evidencias de lo que ocurría con los profesores fue en los Talleres Generales de Actualización (TGA) sobre matemáticas. Aquí observé a varios compañeros que se les dificultaba comprender algunos contenidos de los libros de texto de quinto y sexto grado de matemáticas, pues no podían resolver algunos de los problemas planteados en este material del alumno, por ejemplo, la lección "del maíz a las tortillas" y "los engranes", clásicos problemas de razón y proporción, considerados muy difíciles por los docentes. Además, de las conversaciones suscitadas en el taller se oían comentarios sobre la dificultad para tratar los temas "difíciles" con sus alumnos o bien dejarlos a un lado: "yo me los brinco" "yo los dejo para lo último", aunque ese último en ocasiones no llegaba. Este tipo de comentarios me dieron mayor certeza sobre la existencia de una problemática de los profesores relacionada con el conocimiento de los contenidos de enseñanza de matemáticas y especialmente de razón y proporción.

Estas experiencias configuraron mi objeto de estudio relacionado con el conocimiento del profesor de educación primaria sobre el contenido de enseñanza, porque a mi parecer la ausencia de este conocimiento es una de las causas generadoras del bajo resultado de los estudiantes.

Por otro lado, en el ámbito nacional e internacional, los resultados de evaluaciones (PISA, INEE) en nuestro país me permitieron ver que los resultados bajos en matemáticas no eran un asunto de mi escuela o zona escolar, sino un problema nacional[1] o tal vez mayor donde posiblemente también el conocimiento del profesor sobre el contenido de enseñanza fuera una de las causas.

De esta manera llegué a la conclusión de investigar lo que saben los profesores sobre el contenido de enseñanza de matemáticas, en especial los contenidos de razón y proporción porque fueron en los que observé mayores dificultades, además de darme cuenta en la revisión bibliográfica de la importancia del razonamiento proporcional (Hart,

---

[1] Los resultados PISA 2012, México se ubica en el lugar 53 de los 65 países que participaron. El 55% de ellos no alcanza el nivel de competencias básicas según la prueba PISA 2012 en matemáticas, lengua y ciencias. Los resultados de la prueba ENLACE también reporta un nivel insuficiente y elemental en matemáticas en la mayor parte de los alumnos del país.

1988) por su relación con otros temas, por ser un el punto cumbre de la aritmética y por ser base de próximos aprendizajes como el álgebra.

Propósitos y preguntas de investigación

A partir de las experiencias vividas y los referentes consultados planteé los siguientes propósitos y pregunta de investigación:

Propósitos de la investigación

Indagar el *conocimiento del contenido* por parte del profesor de educación primaria, a partir de la resolución de problemas de razón y proporción, con el fin de identificar rutas para la formación del profesor de matemáticas.

Indagar el *razonamiento proporcional* de los profesores, a partir del análisis de los procedimientos utilizados, con el fin de aportar o ratificar hallazgos de la investigación sobre el tema.

Abundar en la escasa investigación que da cuenta del conocimiento del contenido (especializado) del profesor de matemáticas de educación primaria.

Pregunta de investigación

¿Qué conocimiento del contenido de razón y proporción tienen los profesores de educación primaria?

¿Qué procedimientos heurísticos (estrategias) y algorítmicos (técnicas) utilizan los profesores para resolver problemas de razón y proporción planteados en los libros de texto de quinto grado?

Antecedentes de investigaciones sobre el tema

La investigación aquí reportada me parece relevante y novedosa porque, aunque aborda un tema muy estudiado, razón y proporción, su propósito ha sido el comprender el razonamiento proporcional en niños, jóvenes y adultos; sin embargo, el propósito de esta investigación es acercarse al conocimiento del profesor sobre los contenidos de enseñanza. También puedo decir que es novedosa porque la investigación con profesores ha estado enfocada a sus creencias, concepciones o representaciones y algunas veces su relación con la práctica, pero al parecer, no hay investigaciones que indaguen el conocimiento del profesor sobre el contenido que enseña -razón y proporción- a través de la resolución de problemas planteados en los libros de texto del alumno, es decir, los problemas con los que el profesor enseña y el alumno aprende. Por último, me parece relevante la investigación porque, aunque se coincide que el profesor para enseñar matemáticas debe saberlas, poca investigación ha indagado ese saber matemático del profesor.

Aquí presento un panorama de la investigación con el fin de dar cuenta de lo que existe y como razones más de la relevancia del trabajo.

La investigación sobre el razonamiento proporcional

Algunos de los primeros trabajos sobre razonamiento proporcional señalados por Karplus, Stage y Pulos (1981) fueron los de Lovell (1961) y Lovell y Butterworth (1966), Lunzer y pumfrey (1966). Posteriormente Piaget e Inhelder (1978) también dedican parte de su trabajo a la comprensión del razonamiento proporcional cualitativo y cuantitativo.

Otros trabajos de importancia para comprender el razonamiento proporcional señalados por Hart (1988) son el de Karplus (1972) donde clasificó el tipo de respuestas a un problema de razón y proporción (Mr. Short y Mr. Tall). El trabajo de Bryant (1974), el de Van Den Brink y Streeefland (1978) centrados en los métodos cualitativos de los niños.

El trabajo de Noelting (1978), el de Karplus, Pulos y Stage (1981) también son un referente importante en la investigación sobre el tema, estos investigadores analizan el razonamiento proporcional a partir de problemas en un contexto de mezclas de agua de sabor. Por otra parte, la investigación de Lesh (1988) y el de Hart (1988) y Lamon (1996) dan cuenta de las estrategias y errores al resolver problemas de razón y proporción.

En México los trabajos sobre el razonamiento proporcional son varios, según el estado del conocimiento del COMIE (1992-2002), en esta recopilación a cargo de Avila, A., Block, D. y Carvajal, A. (2003), se nombran el trabajo de Jiménez (1996a y b) centrado en el análisis de procedimientos intuitivos de niños de 6 y 8 años a partir de la resolución de problemas de proporcionalidad. Muñoz (1996) y Gómez (1996), hacen un análisis evolutivo de los estudiantes al enfrentar tareas de proporcionalidad, concluyendo que a mayor escolaridad es mejor su desempeño. La investigación de Hoyos (1994) hace un análisis de los recursos (tablas y gráficas) de se valen los estudiantes que finalizan la educación primaria en la resolución de problemas de razón y proporción.

El trabajo de Block (2000), analiza procedimientos y estrategias sobre diversas actividades de razón y proporción puestas a alumnos de educación primaria de cuarto a sexto grados.

Algunos trabajos sobre el razonamiento proporcional han sido con adultos. Uno de ellos es el de Lawton (1993), quien analiza la influencia del contexto en el razonamiento proporcional de estudiantes universitarios; un estudio más es de Alatorre y Figueras (2004) quienes analizan el razonamiento proporcional en adultos de escasa escolarización a partir de tareas de comparación de tazas y razones.

La investigación sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas

En el estado del conocimiento 1992-2002, Avila, *et al*. (2003), mencionan, dentro de la investigación con profesores, el trabajo de Ávalos y Fuenlabrada (1999), Sáiz (2001) y Sáiz y Figueras (2000) sobre concepciones, creencias y conocimientos de geometría; el de De León y Fuenlabrada (1997) y el de Aguilera (2001) sobre las concepciones sobre fracciones y; el de Moreno (1997 y 1998) sobre las concepciones de Medición.

Dos fueron los trabajos identificados que más se aproxima al tema de estudio de esta tesis: el de López Rueda y Figueras (1999, en Avila, *et. al.* 2003) consistente en observar el razonamiento proporcional que favorece la comprensión de los procesos de resolución de problemas con estudiantes de normal superior y; el estudio de Lo (2004) con profesores en formación para evaluar las estrategias y razonamiento matemático puestos en juego al resolver tareas de razón y proporción.

Como es posible observar en esta breve revisión, la presente investigación aporta elementos para acercarse al conocimiento profesional del profesor de matemáticas desde una perspectiva diferente al de las concepciones y creencias sobre algún contenido curricular, sino desde sus conocimientos para resolver los problemas que se plantean en el aula de clases para abordar los contenidos –en este caso de razón y proporción-, con lo que se indaga ese conocimiento indispensable para enseñar, el de la materia que se enseña. Además aporta elementos a la investigación existente sobre razonamiento proporcional en adultos y sobre las estrategias ya planteadas por los investigadores sobre el tema.

Para concluir, en la revisión del estado del conocimiento relacionado con el tema de razón y proporción, se identifica que el tema de este trabajo, orientado a la indagación del conocimiento que movilizan y las estrategias que emplean los profesores para resolver las tareas que tendrían que enseñar a sus alumnos, no ha sido abordado. Por ello considero que este estudio, resulta novedoso y original. Otro aspecto importante de este trabajo es que a partir de los resultados que se presentan, se identifican algunos problemas en la enseñanza del contenido de razón y proporción, que limitan la práctica del maestro. Considero que estos hallazgos requieren ser considerados en el diseño de propuestas para la mejora de la formación docente.

De la importancia de las matemáticas para el individuo y para la sociedad

La importancia de formar individuos con las herramientas necesarias para afrontar las necesidades matemáticas de cada individuo en su vida diaria, así como para potencialmente poder aportar a las necesidades científicas y tecnológicas de la sociedad, son razones de peso del presente estudio. Sugerir elementos para la formación del profesor de matemáticas en la escuela primaria representa también mejoras en el aprendizaje de los estudiantes y por lo tanto a las necesidades matemáticas de los individuos y de la sociedad. En este sentido, señalo lo que algunos estudiosos escriben sobre la importancia de las matemáticas.

Respecto a la importancia social de las matemáticas Moreno y Waldegg (2004) señalan que la sociedad de la información y del conocimiento en la que nos encontramos depende en gran medida del avance tecnológico y científico, a su vez condicionado por los avances de las matemáticas aplicadas. Por otra parte, Morgens Niss (1996) señala que la enseñanza de las matemáticas es necesaria porque la sociedad demanda trabajadores cualificados para un mayor desarrollo económico/tecnológico. Otra razón de la importancia social de las matemáticas la plantea Romberg (en Martínez, 2006) quien dice que se necesitan ciudadanos bien informados para el ejercicio de la ciudadanía.

En el ámbito de la importancia de las matemáticas para el desarrollo individual de los sujetos, Moreno y Waldegg (2004) señalan sus beneficios en dos sentidos, una como sujeto intelectual y otra como sujeto social:

> Desde un punto de vista del beneficio intelectual que otorga al individuo la posibilidad de explicar y explicarse el mundo que le rodea con bases racionales. Desde el punto de vista de la formación integral del individuo que favorece el desarrollo de habilidades, hábitos, destrezas y valores. Desde el punto de vista de la utilidad práctica que supone para el ciudadano poder intervenir, con conocimiento de causa, en temas que afectan de manera directa sus relaciones con el entorno físico, económico y social (p. 21).

En este sentido, Niss (1996) señala que las matemáticas son importantes para el bienestar socioeconómico y profesional; vida privada diaria; vida social y ciudadanía. Por su parte, Romberg (en Martínez, 2006) argumenta que el fin utilitario de las matemáticas está relacionado a las necesidades matemáticas de la vida adulta, respecto al trabajo y a la interpretación de la información mediática circulante alrededor para la toma de decisiones. Asimismo, señala que la enseñanza de las matemáticas conlleva a un mejoramiento de la capacidad de pensamiento porque desarrolla las aptitudes para explorar, conjeturar y razonar lógicamente.

Creo que el desarrollar individuos competentes matemáticamente es una necesidad impostergable dados los tiempos que se viven actualmente. Por todo lo expuesto hasta el momento y considerando la crisis que se vive respecto al aprendizaje de las matemáticas, me parece de gran relevancia la investigación aquí reportada porque sus resultados dan evidencia de debilidades en el conocimiento del profesor sobre las matemáticas que enseña y abre posibilidades de mejora de la formación docente.

CAPITULO SEGUNDO. REFERENTES TEÓRICOS DE LA INVESTIGACION

El conocimiento profesional del profesor de matemáticas

En este apartado me propongo examinar, con base en la literatura, cuáles son los conocimientos, habilidades, destrezas, actitudes, cualidades y competencias que debe poseer el profesor de matemáticas para ser *efectivo* o *eficaz*[2], dado que, independientes de los diversos factores que influyen, juega un papel relevante en el aprendizaje de la materia por parte de los estudiantes. No basta el conocimiento matemático del profesor para enseñar, se requiere mucho más, pero creo este conocimiento es la base sobre la cual se debe fincar la formación del profesor, que a mi parecer ha sido dejada a un lado en la formación del docente de primaria en México. De esta manera, a partir de lo hallado y discutido por investigadores sobre lo que debe saber el profesor, esbozo la importancia del *conocimiento de la materia* dentro de ese extenso cuerpo de requerimientos que debe poseer el profesor, de matemáticas en este caso.

Como lo señala Mochón y Morales (2010) ha habido múltiples reformas educativas en México, pero poco se ha avanzado en el aprovechamiento de los estudiantes. Esto tiene su explicación, según estos autores, en que las reformas no han impactado en el profesor. Cambian libros de texto, materiales de apoyo, se introduce tecnología, pero poco se ha hecho en la formación del docente, siendo que es un actor de gran relevancia para el aprendizaje escolar debido a que, en muchas ocasiones, el aprovechamiento del alumnos está condicionado por la forma de enseñanza del profesor como lo señalan Llinares y Sánchez (1990) “Las características y la forma de desarrollar su instrucción, así como sus intervenciones instruccionales durante el proceso de enseñanza ayudan a delimitar los cauces por donde presumiblemente se producirá dicho aprendizaje” (p. 68). En este sentido, estos autores señalan al profesor como una variable que caracteriza la forma en cómo el “saber académico” es enseñado y aprendido.

Definir el conocimientos que debe poseer el profesor no ha sido tarea fácil, han sido diversas las aproximaciones. Una de ellas, descrita por Grossman, Wilson y

[2] Llinares y Sánchez (1990) hablan del maestro eficaz, entendida la eficacia como la correspondencia entre los aprendizajes logrados por los estudiantes y los propósitos del currículum. En este mismo sentido Liakopoulou (2011) habla de maestros efectivos.

Shulman (1989) estuvo bajo la creencia de que bastaba el conocimiento de la materia para enseñar, es decir, si el profesor sabía de su materia sus alumnos lograrían aprenderla. De esta manera se evaluaba al profesor en función de las clases tomadas sobre su materia o bien a partir de la puntuación obtenida en un test, posteriormente se evaluaba el aprendizaje de los estudiantes, pero los resultados de estas investigación hallaron poco o ninguna relación entre el conocimiento de la materia por parte del profesor y el aprendiza de los alumnos. Este enfoque fue apodado como presagio-producto (Dunkin y Biddle, 1974, en Grossman, *et. al.* 1989).

Llinares y Sánchez (1990) mencionan otra aproximación al conocimiento del profesor fue la llama proceso-producto por Pérez Gómez, A (1983) y Goody Brophy (1986), la cual pretendía hallar la relación entre ciertas cualidades del trabajo docente y el aprendizaje de los estudiantes, adjudicando los resultados positivos o negativos a los métodos instruccionales, lo cual orientaba la formación docente hacia el aprendizaje de dichos métodos para repetirlos y de esta manera fueran eficaces. Este enfoque fue cuestionado por la inconsistencia de la relación hallada, ya que no se explicaba cuáles eran las bases de las decisiones de los profesores al momento de elegir algún método instruccional y por otro lado se cuestionó la forma en que era valorado el aprendizaje de los alumnos, principalmente con pruebas “objetivas” o test.

Otra línea de investigación, citada por Llinares y Sánchez (1990) y Grossman, *et. al*. (1989). es la que caracterizó el conocimiento profesional del profesor a través de la comparación entre expertos y novicios. La observación de clases y la entrevista a profesores fueron la forma en que se procedió para “comprender el razonamiento práctico que fundamenta las decisiones y acciones de los profesores expertos” (Llinares y Sánchez, 1990, p. 74) con el fin de hallar la ruta que deberían seguir los profesores nóveles para llegar a ser expertos. A quién llamar experto fue una de las dificultades de este tipo de investigación, así que se recurría a la opinión de los compañeros docentes y a los resultados obtenidos durante varios años por sus alumnos en pruebas estándar. El trabajo de Leinhardt y Greeno (1986, en Grossman, *et. al*., 1989) y Leinhardt y Smith (1985, en Grossman, *et. al.* 1989) es representativo de esta línea de investigación experto-novel, quienes trabajaron con profesores de matemáticas hallando que el conocimiento de la materia implicaba más que el mero conocimiento disciplinar, como se pensaba en los enfoques anteriores, más bien se trataba de un conocimiento multidimensional que comprendía la "comprensión conceptual del profesor y la habilidad para el cálculo y una comprensión didáctica de la materia por parte del profesor, incluyendo el conocimiento curricular y el conocimiento de las dificultades del estudiante" (Grossman, et. al. 1989, p. 8).

Componentes del conocimiento del profesor

De este último enfoque de investigaciones destaca el trabajo lo planteado por Leinhardt y Greeno (1986, en Llinares y Sánchez, 1990), quienes señalan que la enseñanza efectiva descansa en dos sistemas fundamentales de conocimiento: *el conocimiento de la estructura de la lección y el conocimiento de la materia que enseña*.

El primero conformado por *esquemas de acción y esquemas de información,* producto de la experiencia, que le permiten al profesor tener organizadas sus acciones en el aula para que haya fluidez y coherencia, además de permitir "al profesor conseguir y tomar nota de determinadas informaciones generadas por la actividad y que podrán ser usadas en la organización y realización de las actividades siguientes, permitiendo una flexibilidad apropiada en el transcurso de la lección" (Llinares y Sánchez, 1990).

En relación al *conocimiento de la materia* Leinhardt y Greeno (1986, en Llinares y Sánchez, 1990) consideran importante que el profesor tenga el conocimiento declarativo del significado de los conceptos de la materia, los hechos básicos específicos de un dominio particular y conocimiento de procedimiento (algoritmos y heurísticas), porque de estos tres aspectos depende las explicaciones proporcionadas a los estudiantes y en consecuencia condiciona la estructura de la enseñanza de la lección.

Wilson, Shulman y Richert (1987, en Llinares y Sánchez, 1990) hacen mención de tres grandes categorías que conforman el conocimiento del profesor: *El conocimiento de la materia,* correspondiente al conocimiento declarativo y de procedimiento de las matemáticas; *el conocimiento del contenido pedagógico* conformado a su vez por el conocimiento de la materia para enseñar (características de aprendizaje, métodos instruccionales específicos y creencias epistemológicas del profesor de la materia que enseña), el conocimiento pedagógico general y desde una perspectiva general el conocimiento de metas y objetivos de la educación, por último; *el conocimiento del currículum* relacionado los materiales curriculares.

El conocimiento de la materia

Me parece necesario profundizar en la primera gran categoría correspondiente al conocimiento de la materia, donde se señala la importancia que tiene el conocimiento disciplinar en el trabajo del docente, foco de interés de la investigación que presento. Para tal propósito recupero el trabajo de Grossman, Wilson y Shulman (1989), quienes hacen mención de cuatro dimensiones del conocimiento de la materia: *el conocimiento del contenido, el conocimiento sustantivo, el conocimiento sintáctico y las creencias acerca de la materia*.

Para estos investigadores el *conocimiento del contenido* es diferente al conocimiento de la materia, a menudo manejados como sinónimos, se refieren al conocimiento disciplinar: “Nosotros usamos el término conocimiento del contenido para referirnos a la "materia" de una disciplina: información objetiva, organización de principios, conceptos centrales” (Grossman, et al., 1989, p. 11). Estos investigadores indagaron cómo era la enseñanza de profesores novicios en función de la presencia o ausencia del conocimiento del contenido. Los resultados hallados dan cuenta que la ausencia del conocimiento del contenido ocasiona que el profesor evite el tema, evite los cuestionamientos, sea incapaz de responder a preguntas de los estudiantes o bien dejar que el libro de texto sea la guía de su proceso de instrucción. Por el contrario, quien conoce el contenido, permite la discusión, enfatiza los porqués de los temas. Como ejemplo los investigadores presentan el caso un profesor especialista en matemáticas que enfatizaba los porqués del tema abordado, permitía que los estudiantes generaran sus propios algoritmos y los discutían, mientras que una profesora que no era especialista basaba su enseñanza en el entrenamiento de algoritmos presentados en el libro de texto y no permitía que se generaran algoritmos propios.

Para concluir, Grossman, et al. (1989) señalan que “el conocimiento, o la falta de conocimiento, del contenido puede afectar a cómo los profesores critican los libros de texto, a cómo seleccionan el material para enseñar, a cómo estructuran sus cursos y a cómo conducen la instrucción” (p.12), por lo cual es indispensable que los profesores novicios reconozcan que el conocimiento del contenido de la materia es de primera importancia en la enseñanza y en consecuencia deben aprender los conceptos centrales y principios organizativos de la disciplina a enseñar.

La segunda dimensión referida al *conocimiento sustantivo* corresponde a los paradigmas que dan sentido a la investigación en el campo o bien a la interpretación de datos. El tener una visión de una disciplina también tiene su impacto en la enseñanza, por ejemplo, el caso de la historia, donde se puede mostrar una historia de bronce o bien una visión historiográfica o crítica.

La tercera dimensión es el conocimiento sintáctico, referido al conocimiento de la forma en que se genera el conocimiento en la disciplina, pues de esta manera se tendría que enseñar. En relación a esto Grossman, et al. (1989) ejemplifican que si un profesor desconoce que el desarrollo de conocimiento en matemáticas es a partir de problemas, pudiera pensar que sólo se trata de memorizar y practicar algoritmos.

La cuarta dimensión identificada corresponde a *las creencias acerca de la materia*, donde se destaca “que las creencias de los futuros profesores acerca de la materia son tan poderosas e influyentes como sus creencias acerca de la enseñanza y el aprendizaje. Los formadores de profesores deben, por lo tanto, proporcionar oportunidades para que los futuros profesores identifiquen y examinen las creencias que tienen acerca del contenido que enseñan” (Grossman, et al, 1989, p. 20)

El conocimiento matemático para la enseñanza.

A partir de los trabajos antes señalados Martínez (2006) desglosa cinco elementos que dan forma al conocimiento del profesor de matemáticas:

1. Conocimiento de la matemática (conceptos, procesos…) y sobre las matemáticas (concepciones sobre la naturaleza de las matemáticas escolares).
2. Conocimiento del currículo matemático.
3. Conocimiento sobre las cogniciones de los aprendices: características del aprendizaje de nociones matemáticas específicas, dificultades, etc.
4. Conocimiento pedagógico específico de las matemáticas: de representaciones instruccionales, análisis de tareas.
5. Conocimiento sobre la enseñanza: planificación rutina, interacción, organización de la enseñanza. (pp. 57-58)

En esta relación general de conocimientos del profesor de matemáticas cabe destacar lo relacionado sólo al conocimiento matemático del profesor, para ello presento el análisis que hacen Mochón y Morales Flores (2010) sobre este asunto, ya que este conocimiento, como ya se señaló anteriormente sobre la importancia del conocimiento de la materia, es de suma importancia porque permite al profesor establecer los procesos instruccionales dentro del aula para lograr el aprendizaje de los estudiantes. En este sentido Mochón y Morales Flores (2010) dicen que

> Lo más sustancial que un profesor tiene que hacer es dar razones y explicaciones para que sus estudiantes comprendan una idea. Para esto, requiere entender y analizar las ideas matemáticas de una manera más profunda que le permita, por ejemplo, desglosar un procedimiento o una idea para extraer los conceptos básicos requeridos para su comprensión (p. 89).

A partir de esta necesidad que tienen los profesores de saber matemáticas Mochón y Morales Flores (2010) señalan que son tres los elementos que conforman el conocimiento matemático para la enseñanza: *el conocimiento matemático especializado, conocimiento para la instrucción y conocimiento de los estudiantes*.

Conocimiento especializado. El profesor requiere un conocimiento matemático suplementario que le sea útil en sus múltiples actividades educativas dentro y fuera del aula. Mencionamos a continuación aspectos relacionados con este conocimiento especializado:

a) Conocer con profundidad los conceptos fundamentales de cada uno de los tópicos.

b) Conocer no sólo el cómo sino los porqués de lo que se va a enseñar.

c) Desglosar ideas y procedimientos matemáticos para hacerlos más simples (en niveles comprensibles para sus estudiantes).

d) Conocer las conexiones entre diferentes tópicos, entre diferentes conceptos e inclusive entre su materia y las demás del plan de estudios.

Conocimiento para la instrucción. Este conocimiento matemático se requiere en el diseño y planeación del trabajo en el aula para responder preguntas como: ¿cuál sería la secuencia más adecuada?; ¿qué ejemplo es el más apropiado para ilustrar esto?; ¿qué paradigma debo utilizar? Puntos conectados a este componente serían:

a) Relevancia de los tópicos y de las ideas matemáticas.

b) Diseño y secuenciación de clases, actividades y tareas.

c) Selección de representaciones e ilustraciones apropiadas que exhiban nociones matemáticas.

d) Preparar y dar explicaciones.

Conocimiento de estudiantes. Este conocimiento, también relacionado con contenido y pedagogía, está ligado al razonamiento matemático de los niños. Aspectos relacionados a este componente serían:

a) Conocer la manera de pensar, las estrategias, dificultades y concepciones erróneas de los estudiantes.

b) Inferir y deducir lo que entienden los estudiantes y sus confusiones.

c) Entender, analizar y evaluar sus métodos y soluciones. (Mochón y Morales Flores, 2010, pp. 93-94)

En conclusión a todo lo planteado considero, de acuerdo con Levav-Waynberg, A. y Leikin R. (2006), que el conocimiento del profesor parte del conocimiento matemático del tema a la dimensión del tema de matemáticas para enseñar. Es decir, el profesor necesita contar en primer lugar con el *conocimiento del contenido* (Grossman, et al., 1989) el cual se refiere a tener conocimiento de las conexiones matemáticas y la habilidad para resolver problemas en múltiples formas como lo señala Shulman (1986); poseer el conocimiento matemático especializado, según Mochón y Morales Flores (2010); ser un matemático para los alumnos en el sentido que Chevallar, Bosch y Gascón (1998) lo mencionan; o bien ser competente matemáticamente como lo indica el programa de estudios 2011 en México, lo que implica resolver problemas de manera autónoma, comunicar información matemática, validar procedimientos y resultados y manejar técnicas eficientemente. Este conocimiento del contenido es la base donde se fundarán el conocimiento didáctico, el conocimiento de los estudiantes y el conocimiento del currículum para que el profesor sea eficaz o efectivo.

Otros requerimientos del profesor eficaz

Poco he dicho sobre las cualidades, actitudes y habilidades del docente que también contribuyen para una enseñanza eficaz. Sin embargo, me parece importante señalarlas porque, aunque muchos de estos requerimientos dependen de la personalidad del profesor y poco se puede hacer desde la formación, tenerlas presentes puede orientar la conducta del docente o su reflexión sobre su práctica. En relación con esta temática voy a citar el trabajo de Liakopoulou (2011) para distinguir estos otros requerimientos. La autora señala que la forma en que el profesor lleva a cabo su trabajo está determinada por sus rasgos personales y conocimientos adquiridos. Con base en esta idea clasifica los requerimientos del profesor en dos grupos: *personalidad, actitudes y creencias* y por otra parte las *habilidades y conocimientos* del profesor.

En relación al primer grupo de requerimientos esta autora, con base en los estudios de Malikow (2005) y Harslett et al. (2000), distingue los rasgos personales relacionados con el rol de profesor como la flexibilidad, sentido de humor, imparcialidad, paciencia, entusiasmo, creatividad, cuidado e interés por los estudiantes que contribuyen a la efectividad del profesor.

Sobre las actitudes la autora afirma que afectan al profesor en el nivel de compromiso con sus responsabilidades, la forma en que enseñan y tratan a sus estudiantes, así como la forma en que perciben su crecimiento profesional. Por ejemplo, las altas expectativas del docente y su insistencia en lograr aprendizajes, así como su sentido de compromiso e interés por la vida de los estudiantes y sus familias contribuyen a la enseñanza efectiva. En relación con esto la autora cita las 16 características profesionales del profesor identificadas por McBer (2000):

> a) Profesionalismo: compromiso, confianza, confiabilidad, respeto; b) Pensamiento: pensamiento analítico y conceptual; c) Expectativas: disposición de lograr altos objetivos, disposición para la comprensión permanente de la realidad (e.g. los estudiantes, el orden), y el emprendimiento de iniciativas; d) Liderazgo: flexibilidad, responsabilidad, pasión por aprender; e) Relaciones con los otros: interacción que genere el involucramiento en el proceso educativo, habilidad para el trabajo en grupo, comprensión. (En Liakopoulou, 2011, p. 67)

En lo correspondiente al segundo grupo de requerimientos del profesor, habilidades y conocimiento, Liakopoulou hace mención que el profesor efectivo se pone objetivos posibles, incentiva a los estudiantes para aprender, usa diversos métodos de enseñanza, crea material didáctico, presenta la información de forma clara, combina imágenes y texto, usa diversos medios de enseñanza, maximiza el tiempo, asigna tareas, utiliza formas participativas de enseñanza, monitorea y evalúa el progreso de los estudiantes, propone criterios de evaluación y los comparte con los estudiantes, retroalimenta el trabajo, se mantiene alerta de lo que sucede, de manera rápida trata los problemas y trabaja cooperativamente con sus colegas,

Por último, esta autora esta autora hace una caracterización del conocimiento que hace a un profesor experto, en la cual no abundaré más que para enunciar los elementos que lo conforman y dentro de los cuales señala como importante el conocimiento de la materia. Este conocimiento lo subdivide en siete tipos de conocimiento: el conocimiento de la materia en el sentido planteado en este documento; el conocimiento del aprendiz; el conocimiento de metodología; conocimiento del currículum; el conocimiento pedagógico general; el conocimiento del contexto y; conocimiento de su profesión (Knowledge of “self”).

Para terminar este apartado correspondiente al conocimiento profesional del profesor cito el trabajo de Perrenoud (2004), quien con base en un enfoque por competencias argumenta lo que debería saber el profesor para responder a las necesidades de la escuela y sociedad actuales. En este sentido señala diez familias de competencias que el profesor debe desarrollar y me quedo en su mención: Organizar y animar situaciones de aprendizaje; Gestionar la progresión de los aprendizajes; Elaborar y hacer evolucionar dispositivos de diferenciación; Implicar a los alumnos en sus aprendizajes y su trabajo; trabajar en equipo; participar en la gestión de la escuela; informar e implicar a los padres; utilizar las nuevas tecnologías; afrontar los deberes y los dilemas éticos de la profesión y; organizar la propia formación continua. De estas competencias enunciadas las primeras cuatro están relacionadas con el desempeño del profesor en la clase y con el conocimiento de la materia. Por ejemplo, para que el maestro plantee situaciones de aprendizaje y gestione la progresión de los aprendizajes necesariamente debe conocer sobre la materia y los procesos de adquisición por los estudiantes.

Como se puede apreciar son muchas las exigencias al profesor, no basta con el conocimiento de la materia y tampoco con los demás conocimientos aquí descritos, también requiere cualidades personales, habilidades, actitudes y competencias. Parece una tarea imposible que el profesor posea todos estos requerimientos, sin embargo, creo que habría que iniciar con lo primero, el conocimiento de la materia, del contenido, como lo señala Perrenoud (2004) “conocer los contenidos que se enseñan es lo mínimo cuando se pretende instruir a alguien” (p. 19), pues bien, comencemos con el mínimo que en realidad puede ser un factor clave en la mejora de la enseñanza de las matemáticas. Me parece trascendental en la formación de profesores de educación primaria en México que se garantice el conocimiento de las matemáticas que se enseñan en la escuela. Se pondera la formación pedagógica general, la didáctica de las matemáticas, los procesos para adquirir algunas nociones, pero si no se tiene el conocimiento de la materia puede que todo esto vaya a un saco roto. Como ya lo señalé, es una necesario que los profesores sean matemáticos, competentes matemáticamente, conocedores de la materia porque puede ser el factor determinante para una enseñanza eficaz.

El libro de texto

Me parece de suma importancia para la presente investigación tratar el asunto del libro de texto –de matemáticas-, de donde se obtuvieron los problemas resueltos por los profesores, por dos razones: la primera es porque, con base en mi experiencia e investigaciones sobre el tema, puedo afirmar que se trata de un material sobre el cual el profesor estructura la clase –de matemáticas- y, por otro lado, porque su carácter nacional y obligatorio garantiza la uniformidad de contenidos, enfoques y actividades para la enseñanza en todas las escuelas mexicanas.

El libro de texto para Kilpatrick (1992) es el material donde se observa la transposición didáctica, es decir, donde el conocimiento disciplinar ha sido adaptado en situaciones para aprender por parte de los alumnos y para enseñar por parte del profesor. Para Rockwell (1995, en Carvajal, 2001) son los materiales en los que se objetivan las reformas educativas. Vargas (2001) lo describe como “uno de los soportes más fieles del currículo escolar ejercido y una guía privilegiada para su ejecución” (p. 249). Desde estas visiones el libro de texto es el recurso donde se concretizan las propuestas curriculares (contenidos, propósitos y enfoques didácticos)[3] y la guía del docente para enseñar y del alumno para aprender.

Sobre su uso, con base en mi experiencia profesional, puedo señalar que es el libro de texto es el principal material didáctico para desarrollar la clase de matemáticas. Por lo general los profesores abordan los contenidos siguiendo la numeración de las lecciones que lo integran, aunque hay quienes las clasifican por temas y de esta forma las abordan. Solicitar que los estudiantes resuelvan los problemas de las lecciones, compartir las soluciones, explicar el cómo resolver estos problemas y pedir la resolución de otros problemas similares –apoyados en guías compradas, material descargado de internet o bien problemas creados por el mismo profesor- son acciones cotidianas en el aula.

En este sentido, Saucedo, A., y Hermosillo, A. (2004) dicen que el libro de texto estructura la clase y es la base de cómo se desarrolla la misma. Por su parte Carvajal

[3] Aunque también se dice que el libro de texto es un medio ideológico (Vargas 2001; Greaves, 2001) por el cual se trata de crear una identidad nacional, además de promover visiones parciales del mundo.

(2001), señala que los docentes los consideran básico en la enseñanza: “docentes consideran que los libros se utilizan como el material didáctico básico para dirigir y articular su enseñanza” (p. 223). Además de que la clase es estructurada a partir de libro de texto, López y Guerra (2011) agregan que los libros

> Se han convertido en las principales fuentes de información para docentes y alumnos y en estructuradores de su clase (Quiroz, 2001; García Herrera, 2001). Incluso, algunos autores han sugerido que los libros de texto constituyen el currículum de facto (Altbach y Kelly, 1988); o real; es decir la interpretación del currículum oficial más cercana a la práctica docente (p. 442).

Las funciones de información y de estructuración de la clase que juega el libro de texto son innegables, aunado a el que el profesor lo considere y lo haya adoptado como el principal recurso para su trabajo, lo hacen un material que no puede pasar desapercibido cuando de investigar y comprender el quehacer docente se trata.

Es importante tener presente que la forma en la cual es utilizado el libro de texto es diversa. Si bien es el principal recurso en la clase, el cómo es utilizado por los profesores varía en función de la asignatura, del contenido, la metodología de enseñanza, de su conocimiento. De ahí que adquiera diversidad de formas de utilizar este material didáctico. Rezat (2006) plantea varios modelos del rol que juega el libro de texto en el sistema didáctico maestro-saber-alumno: un sistema triangular alumno-libro-conocimiento matemático, donde el libro es el intermediario entre el conocimiento matemático y el alumno; otro modelo triangular es estudiante-maestro-libro, donde el profesor es el mediador entre el libro y el alumno; un sistema cuadrangular alumno-maestro-libro-conocimiento matemático, donde el profesor y libro median entre el alumno y el conocimiento matemático; por último, un sistema del tetraedro en el cual se dan múltiples relaciones, estudiante-maestro-libro, estudiante-libro-conocimiento matemático, maestro-libro-conocimiento matemático y estudiante-maestro-conocimiento matemático. En este sentido, es diverso el papel que puede jugar el libro de texto, por un lado, puede ser el material a utilizar al final trabajar cierto contenido o bien ser el inicio para ver cierto contenido, por otro lado ser el material de donde parte la planeación del profesor o bien sólo para enriquecerla.

Sin duda alguna, el libro de texto, en mayor o menor medida, siempre tiene un lugar en la clase y hay una razón muy evidente, el carácter obligatorio y nacional de este material en México. Esto se refleja en que todo el éxito de las propuestas educativas (del nivel primaria) giran en torno al avance y logro de lo estipulado en el libro de texto, desde los exámenes bimestrales, hasta las evaluaciones nacionales pasando por los concursos de conocimientos, toman como referente el libro de texto, de tal forma que el profesor se ve obligado a utilizarlo. Sin embargo, cuando uno se pregunta por la manera en la cual es utilizado y sí son eficaces esos usos, hay una razón de peso: el conocimiento profesional del profesor porque, como lo señalé en el apartado anterior, el conocimiento de la materia puede determinar el rumbo de la clase y en consecuencia el uso del **libro** de texto.

En conclusión, el que en la presente investigación haya tomado los problemas matemáticos de razón y proporción del libro de texto para ser resueltos por los profesores, me permite, en primer lugar, acercarme el conocimiento de la materia en lo que al *contenido* (razón y proporción en este caso) refiere Grossman, et al. (1989) o en lo referente al conocimiento especializado en matemáticas (de razón y proporción) señalado por Mochón y Morales Flores (2010). En segundo lugar, me permite dar cuenta del conocimiento del profesor acerca de las tareas de razón y proporción que plantea el libro de texto de matemáticas, el cual puede ser un factor determinante en el desarrollo, estructura y eficacia de la clase, porque puedo afirmar, en función de la literatura revisada, que dichas actividades son las que el profesor utiliza para enseñar y el alumno para aprender el contenido, de razón y proporción en este caso. En tercer lugar, el carácter obligatorio y nacional de los libros de texto, me permite tener la garantía que los problemas resueltos por los profesores, de la zona escolar 045 de la localidad de Santiago Juxtlahuaca, Oaxaca, son los que enfrentan todos los alumnos y maestros del país, y por consiguiente los resultados de la investigación pueden dar idea de lo que sucede en otras partes.

.

Resolución de problemas

El enfoque de resolución de problemas para la enseñanza de las matemáticas en el nivel básico ha sido adoptado en México desde la década de los noventa. Sin embargo, pareciera que no ha sido comprendido del todo por los profesores puesto que muchas de las prácticas aún se centran la ejercitación y memorización.

Los actuales materiales curriculares, específicamente el libro de texto, plantean problemas destinados a promover el aprendizaje de las matemáticas en los alumnos. Estos problemas fueron precisamente los que se plantearon a los profesores participantes en este estudio por lo que me parece pertinente revisar el tema como marco de referencia del qué es un problema y qué se requiere para resolverlo.

La resolución de problemas, como propuesta para la enseñanza de las matemáticas, tiene su origen en el reconocimiento de que en este campo disciplinar la generación de conocimiento es y ha sido a través de resolver problemas. Por otra parte, en cuanto al proceso de solución de un problema, la investigación se ha enfocado en analizar los procedimientos utilizados por expertos comparado con los utilizados por inexpertos.

La comprensión de la generación de conocimiento en el campo disciplinar y de caracterizar el proceso de resolución de problemas por los expertos tuvo varias consecuencias: una fue el cuestionamiento de “la aceptación de las matemáticas como un conjunto de hechos, algoritmos, procedimientos, o reglas que el estudiantes tiene que memorizar o ejercitar” (Santos Trigo, 1997, p. 9); otra fue considerar a las matemáticas como una disciplina falible y cambiante al igual que sucede en otras áreas del conocimiento; una tercera consecuencia fue el replanteamiento de la didáctica de esta disciplina en la escuela, ahora debería promover su aprendizaje mediante la participación activa de los estudiantes inmersos en un ambiente similar al de la gente que hace matemáticas, donde el error, la construcción y la creación colectiva envuelven el trabajo cotidiano.

Estos replanteamientos sobre la forma de entender las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje el National Council of Teachers of Mathematics (1990, en Santos Trigo, 1997) señala cinco implicaciones para el trabajo en el aula:

a) Hacia la aceptación de un salón de clases como una comunidad matemática.

b) Hacia el uso de la lógica y la evidencia matemática como un medio de verificación, contrapuesto a ver al maestro como la sola autoridad para dar las respuestas correctas.
c) Hacia el desarrollo del razonamiento matemático; es decir, no ubicar a las matemáticas como un conjunto de fórmulas o reglas para memorizar.
d) Hacia la resolución de problemas y no solamente dar énfasis a la actividad de encontrar respuestas mecánicamente.
e) Hacia la conexión y aplicación de las matemáticas; es decir, no concebirlas como un cuerpo aislado de conceptos y procedimientos (p. 27).

De acuerdo con estas implicaciones el aula de clases de matemáticas tendría que convertirse en un espacio para una "comunidad matemática" donde el resolver problemas fuera la base de la enseñanza. Pero si el profesor y los alumnos tendrían que plantear y resolver problemas era necesario conceptualizar lo que es un problema. Sobre este asunto Santos Trigo (1997) a partir de varios estudios (Polya 1962; Fredericksen, 1984; Schoenfeld 1983; Kilpatrick, 1985) señala que un problema no es una propiedad inherente a la tarea matemática, sino depende de su relación con quien la afronta, porque lo que para algunos es un problema, para otros puede no serlo. A partir de esta consideración Santos Trigo plantea cuatros componentes de un problema:

a) La existencia de un interés; es decir, una persona o un grupo de individuos quiere o necesita encontrar una solución.
b) La no existencia de una solución inmediata.
c) La presencia de diversos caminos o métodos de solución.
d) La atención por parte de una persona o un grupo de individuos para llevar a cabo un conjunto de acciones tendientes a resolver esa tarea. (p. 30)

Estas características del problema demandan al profesor un seguimiento constante de la clase y del avance de sus alumnos que le permita plantear problemas para todos, tarea compleja pero necesaria si se quiere mejorar el aprendizaje de los estudiantes. Para lograr tal propósito resulta indispensable el conocimiento del contenido matemático y de los procesos cognitivos[4] que permitan al profesor crear ese ambiente donde se planteen y resuelvan problemas.

La comprensión de los procesos cognitivos involucrados en la de resolución de problemas ha tenido su origen en lo que los expertos hacen. De esta manera Schoenfeld (1987, en Santos Trigo, 1997) señala que no basta con las heurísticas o métodos generales, sino también son importantes los métodos particulares y específicos de la disciplina y a partir de esta consideración basada en diversas investigaciones concluye en cuatro dimensiones involucradas en la resolución de un problema:

1. Los recursos. Es un inventario de lo que individuo sabe y de las formas en que adquiere ese conocimiento y está asociado a cinco tipos de conocimiento:
    a. Conocimiento informal e intuitivo acerca del dominio (la disciplina) o del problema a resolver.
    b. Hechos y definiciones.
    c. Procedimientos rutinarios
    d. Conocimientos acerca del discurso del dominio
    e. Errores consistentes o recursos débiles
2. Los métodos heurísticos. Las estrategias generales que pueden ser útiles para avanzar en la resolución de un problema.
3. Estrategias metacognitivas. Es el monitoreo o autoevaluación del proceso utilizado al resolver un problema. Estas estrategias se aplican en tres momentos: el conocimiento del propio proceso, el control y la autoregulación y creencias e intuiciones.
4. Sistema de creencias. La concepción que el individuo tenga acerca de las matemáticas (pp. 33-42).

En conclusión, resolver un problema es afrontar una situación novedosa, una dificultad que no tiene una solución inmediata o predeterminada, que demanda la

---

[4] Por su puesto que no son los únicos conocimientos necesarios como ya lo plantee en el apartado sobre el conocimiento del profesor, pero si son primordiales.

aplicación de heurísticas, métodos específicos de la disciplina y un constante monitoreo (proceso metacognitivo). De esta manera no podría decir que todas las tareas resueltas por los profesores en la presente investigación fueron un problema porque esto depende de cada individuo, sin embargo, el propósito curricular es que cada situación planteada en los libros de texto sea un problema detonante del aprendizaje de los contenidos, motivo por la cual en este documento me refiero a estas tareas como problemas.

Procedimientos: estrategias y técnicas

Acercarme al conocimiento del profesor sobre el contenido de razón y proporción, a partir de la resolución de los problemas que sobre el tema plantea el libro de texto de matemáticas, demandó el análisis de los procedimientos algorítmicos (técnicas) y heurísticos (estrategias) utilizado. En consecuencia, me parece necesario aclarar a qué refieren estos términos en este documento. Para tal fin voy retomo el análisis que hace Monereo, C., Castelló, M., Clariana, M., Palma, M., Pérez, M. L. (1998).

Estos autores consideran que un procedimiento es “una forma de proceder”, son acciones ordenadas con el fin alcanzar una meta. Sin embargo, esta definición puede hacer referencia a técnicas, destrezas, estrategias, habilidades y métodos. Ante esta gama de posibilidades que pueden ser considerados procedimientos Monereo, C., et al. (1998) desglosan el término, por un lado entre procedimientos disciplinares e interdisciplinares y, por otro lado, entre procedimientos heurísticos y procedimientos algorítmicos.

Respecto a los procedimientos disciplinares señalan que son aquellos específicos de un área (por ejemplo: sumar, reproducir una figura a escala en matemáticas). En cuanto a los procedimientos interdisciplinares mencionan que son aquellos que no son específicos de alguna disciplina sino son aplicables a varias, por ejemplo, las distintas modalidades de esquemas. Dado que estos autores consideran que es una necesidad la adquisición de estrategias de aprendizaje para que los estudiantes aprendan a aprender, consideran de gran valor los procedimientos multidisciplinares.

La otra distinción de procedimientos hecha por Monereo, C. et al. (1998) radica en la distinción entre procedimientos algorítmicos y heurísticos. Los primeros son definidos como aquellos procedimientos donde “la sucesión de acciones que hay que realizar se halla completamente prefijada y su correcta ejecución lleva a una solución segura del problema o de la tarea” (p. 20), ejemplos de este tipo de procedimientos son obtener la raíz cuadrada, la aplicación de *la regla de tres* en matemáticas. En cuanto a los segundos refieren como aquellos donde las “acciones comportan un cierto grado de variabilidad y su ejecución no garantiza la consecución de un resultado óptimo" (p. 20), ejemplo de estos pueden ser salvar la reina en un juego de ajedrez o la utilización del *valor unitario* en la solución un problema de razón y proporción. Bajo estas distinciones, estos autores consideran a la técnica como un procedimiento algorítmico y a la estrategia como un procedimiento heurístico.

De acuerdo a lo anterior una técnica "puede ser utilizadas más o menos de forma mecánica, sin que sea necesario para su aplicación que exista un propósito de aprendizaje por parte de quien las utiliza" (Monereo, et al. 1998, p. 23). Por el contrario, una estrategia es consciente e intencional, es "una guía de las acciones que hay que seguir", según estos autores. A diferencia de la técnica aprendida a través de la práctica y repetición de los pasos que la conforman, la estrategia requiere un sistema de regulación caracterizado por la *reflexión consciente* sobre el problema a resolver, el *chequeo permanente* de sus acciones durante la planificación, realización y evaluación del proceso seguido y, un *conocimiento condicional* "resultado del análisis sobre cómo, cuándo y por qué es adecuada una estrategia determinada" (Monereo, et al. 1998, p. 26). En este sentido, las técnicas pueden estar al servicio de las estrategias dependiendo de lo que éstas requieran.

En conclusión, una estrategia es un procedimiento heurístico, elegido por el sujeto de manera consciente e intencional con base en sus conocimientos, que guía sus acciones ante una situación problemática y cuyo resultado no es predecible. Por el contrario, la técnica es un procedimiento algorítmico constituido por una serie de pasos predeterminados, que puede estar al servicio de una estrategia, y cuyo resultado es conocido con antelación.

Razón, proporción y razonamiento proporcional.

El tema de *razón y proporción* es considerado un tema difícil tanto para la enseñanza como para el aprendizaje y mi experiencia como profesor me ha permitido vivirlo. La resolución de un problema de razón y proporción depende de los conocimientos sobre esta materia o tema –características de las razones y proporciones–, de las estrategias –valor unitario, generación de pares equivalentes– y de las técnicas –regla de tres, sumar, multiplicar, dividir– que permitan su solución. Estos conocimientos son importantes para el docente en el proceso de instrucción para seleccionar o crear las situaciones de aprendizaje durante la planificación, orientar el aprendizaje de los estudiantes en el aula respondiendo a preguntas, poniendo ejemplos, cuestionando, y evaluar procedimientos y resultados a partir de las técnicas y estrategias empleadas por los estudiantes.

Después de estas consideraciones voy a presentar desde las matemáticas qué es una *razón* y una *proporción*, así como sus propiedades. Posteriormente, presento los resultados de investigaciones sobre el aprendizaje del tema, a lo que han llamado estudios sobre el *razonamiento proporcional*, donde a partir de plantear problemas de razón y proporción a diversos sujetos se analizan los procedimientos seguidos, tanto los correctos como los erróneos.

Razón

La *razón* o relación entre dos cantidades puede ser aritmética o geométrica. La primera se refiere a la diferencia entre las cantidades (a-b), en cambio la segunda se trata de cuántas veces cabe una cantidad en la otra y se expresa como *a/b* o *a:b*. En este sentido, Baldor (1983) define la *razón* o relación como el resultado de comparar dos cantidades. Esta comparación puede ser de dos formas una es por cuánto excede una cantidad a la otra o cuántas veces contiene una a la otra. La primera comparación se le llama *aritmética* o por diferencia y la segunda *geométrica* o por cociente. Para el caso de la presente investigación me refiero a la razón geométrica.

La razón geométrica es señalada como el cociente de dos cantidades de la misma naturaleza, en cambio cuando se trata de la relación de unidades de distinta naturaleza le llaman *tasa*. Sin embargo, en la investigación en educación matemática se habla de razones internas, externas, funcionales y escalares.

Para Baldor (1983) "la razón geométrica o por cociente de dos cantidades es el cociente indicado de dichas cantidades", por ejemplo, la razón de *a* y *b* es el cociente indicado, *a/b, a:b* o *a÷b*. Fernández (2001) por su parte agrega que una razón debe ser mayor o igual que uno:

> *La razón* entre dos cantidades homogéneas es la división indicada de sus medidas. La razón es un número abstracto, es decir sin unidades, que se toma mayor o igual que uno. De ahí que la mayor de las medidas de las dos cantidades sea el numerador del cociente indicado (p. 538).

Retomando el ejemplo anterior podría decirse que si *a* es mayor que *b*, entonces la razón sería expresada como *a/b*. Por el contrario sí *b* es mayor que *a*, entonces la razón sería *b/a*.

En el campo de la educación matemática Hart (1988) define la *razón* como "una proposición de la relación numérica entre dos entidades". Llinares (2003) la define como "una comparación de dos cantidades (de igual o diferente magnitud)" (p. 196). Además este autor señala que una razón puede ser *escalar* si se trata de iguales magnitudes o puede ser *funcional* si son magnitudes distintas. En cambio para O´Daffer, Phare G.; Clemens, S. y Charles, R. (1992) definen a la razón entre cantidades de distintas magnitudes como *tasa*: "la tasa es una razón en donde aparecen dos unidades diferentes" (p.272).

Propiedades de las razones

A los términos de una razón *a/b* se les llama antecedente al primero y consecuente al segundo. Las propiedades de una razón son las siguientes:

Si el antecedente es multiplicado o dividido por un número cualquiera la razón quedará multiplicada la razón en el primer caso y dividida en el segundo.

Sí *a(n):b* entonces *an:b*, por ejemplo, sí 4(2):6 entonces 8:6

Sí *a/n:b* entonces *a/n:b*, por ejemplo, sí 4/2:6 entonces 2:6

Si el consecuente es multiplicado o dividido por un número cualquiera la razón quedará divida en el primer caso y multiplicada en el segundo caso.

Sí *a:b(n)* entonces *a:bn*, por ejemplo, sí 4:6(2) entonces 4:12 = 2:6

Sí *a:b/n* entonces *a:b/n*, por ejemplo, sí 4:6/2 entonces 4:3 = 8:6

Si el antecedente y consecuente son multiplicados o divididos por un mismo número cualquiera la razón no varía.

Sí *a(n):b(n)* entonces *an:bn*, por ejemplo, sí 4(2):6(2), entonces 8:12 = 4:6

Sí *a/n:b/n* entonces *a/n:b/n*, por ejemplo, sí 4/2:6/2, entonces 2:3 = 4:6

Proporción

De igual forma que la razón, existe proporción aritmética y geométrica. En este caso me voy a referir a la segunda. Baldor (1983), Hart (1988), Llinares (2003) y Fernández (2001) definen la proporción geométrica o equicociente como la igualdad o equivalencia de dos razones geométricas o por cociente, es decir, representan el mismo número abstracto. Si a/b=n y c/d=n, entonces a/b = c/d, por lo tanto existe proporción.

Propiedades de la proporción

Baldor (1983) menciona que a los términos de una proporción se les llama medios y extremos. Los medios los el segundo y tercer término y los extremos el primero y cuarto. Por ejemplo en la proporción *a:b::c:d, b* y *c* son los medios y *a* y *d* son los extremos. Según este autor hay dos clases de proporciones: las *discretas* cuyos medios no son iguales y las *continuas* cuyos medios son iguales.

La *propiedad fundamental* de las proporciones geométricas es: “en toda proporción geométrica el producto de los extremos es igual al producto de los medios” (Baldor, 1983, p. 501)

En la proporción *a/b=c/d* *a* x *c* = *b* x *d*

Porque sí a/b (b)(d) = c/d (b)(d) entonces *a* x *d* = *b* x *c*

Fernández (2001) señala que otra propiedad de la proporción es que “la suma de antecedentes dividida por la suma de consecuentes de una proporción es igual a cualquiera de las razones de esa proporción” (p. 341).

a/b = c/d entonces a+c/b+d = a/b = c/d

Otros términos utilizados son los de cuarta proporcional y tercera proporcional. Baldor (1983) dice que la cuarta proporcional “es cualquiera de los cuatro términos de una proporción geométrica discreta” y la tercera proporcional es el primero o cuarto término de una proporción geométrica continua.

Por último, hago referencia a un término utilizado en la resolución de problemas de este tema, el cual es el *factor o constante de proporcionalidad*, número que al operar permite pasar de un término a otro de una razón, y que por tanto cuando es igual en varios pares de cantidades existe proporcionalidad. Además resulta coincidir con la razón, según lo plantean Fiol y Fortuny (1990).

En el campo de la educación matemática, además de considerar las características matemáticas de la razón y proporción, se plantean otras variables que intervienen en la resolución de un problema de proporcionalidad: problemas de valor faltante o comparación de razones, magnitudes continuas o discretas, cantidades intensivas y extensivas, razones internas o externas, razones fraccionarias o enteras y los contextos en que se plantean las situaciones. Por ejemplo en la *Tabla 1* podemos ver los valore de un problema de *valor faltante*.

En el caso de este problema de valor faltante en un contexto de mezclas (hacer agua con el mismo sabor) se trata de hallar la cantidad de naranjas para 3 botellas de agua. Es un problema que utiliza cantidades discretas (naranjas y botellas), donde las razones internas son fracciones (3/5 o 5/3) y las externas una es fracción (1/8) y otra entera (8/1). Otra consideración sobre las razones externas en este caso da origen a cantidades intensivas (1/8 botella/naranja o 8/1 naranja/botella). Todos estos aspectos, señala la investigación son importes de tener en cuenta para enseñar el tema y para comprender el aprendizaje de los alumnos.

Tabla 1

Problema de valor faltante (1a)

	Relación funcional o externa 1/8 u 8/1	
	botellas	Naranjas
Relación escalar o	5	40
	3	x=24

Razonamiento proporcional

Para el análisis de los procedimientos y las respuestas dadas por los profesores a los problemas de razón y proporción planteados fue necesario retomar los resultados de estudios sobre el tema que permitiera caracterizar las estrategias de solución utilizadas y de esta manera interpretar y comprender el razonamiento proporcional de los participantes en este estudio.

Hablar de razonamiento proporcional es hablar de razonamiento multiplicativo. Para esta discusión retomo el trabajo de Nunes y Bryant (1997), quienes caracterizan el razonamiento multiplicativo a partir de su comparación con el razonamiento aditivo, y aunque pareciera ser que el primero es sólo una extensión del segundo no es así, las situaciones donde se ponen en juego estos tipos de razonamiento son distintas.

El razonamiento aditivo implica, para estos autores, situaciones de *unir* o *separar* objetos o conjunto de objetos, en cambio, el razonamiento multiplicativo implica *correspondencia multívoca*, *relaciones entre variables* y *repartir, dividir y partir*. La correspondencia multívoca es una relación entre dos conjuntos que no es uno a uno, por ejemplo un automóvil=cuatro llantas (1-4). Esta correspondencia multívoca es la constante o invariante de la situación multiplicativa, la cual se traduce en el concepto de *razón (1:4)*. Por ejemplo, sí se aumenta un automóvil se aumentan otras cuatro llantas para mantener la correspondencia multívoca, es decir, existe una acción de *duplicación*, a diferencia de las relaciones aditivas que si se aumenta cierta cantidad a un término de la relación, también se le aumenta la misma cantidad al otro término para mantener la diferencia. A partir de esto surgen dos nuevos significados del número, la *razón* que se expresa con un par de números y el *factor escalar* que es el número de duplicaciones que permiten mantener la razón.

En cuanto a las relaciones entre variables Nunes y Bryant (1997) habla de covariación entre dos o más variables por una *convención* o *causalidad*, como ejemplo de una convención podría decirse precio por kilogramo de azúcar (18 pesos el kilo). En el caso de la covariación por causalidad se trata de situaciones donde no se puede modificar a conveniencia la relación entre las variables, por ejemplo, el estiramiento de un resorte al colgar un objeto de él. Algo más sobre este tipo de relación implica cantidades continuas a diferencia de la relación multívoca que implica cantidades discretas. En esta relación el surgimiento de fracciones es natural, puede no señalar ½ kg. De azúcar son 9 pesos, pero no puede uno decir medio carro son dos ruedas, resulta fuera de lugar en situaciones reales. De estas características surgen otras características del número como la *función*, *factor* o la *tercera variable*, siendo esta última una cantidad *intensiva* que relaciona a las otras dos, se trata de una cantidad compuesta por dos tipos de unidades, por ejemplo, precio-kilogramo.

La actividad de *repartir* es otra situación que implicar el razonamiento multiplicativo. En el caso de los problemas aditivos de relación parte-todo, en los cuales el tamaño del todo es la suma de las partes aunque éstas no seas del mismo tamaño, en cambio en la acción de repartir en una relación parte todo se deben tener presentes tres elementos: el número de partes, el todo y el tamaño igual de las partes. Es una relación que se relaciona con la división.

Respecto a estas características de los problemas multiplicativos Vergnaud (1990) menciona el *isomorfismo de medidas* y el *producto de medidas*. Donde el primero se relaciona estrechamente con relaciones de proporcionalidad, ya que son problemas que ponen en juego cuatro cantidades, donde a partir de una relación multívoca se debe hallar el segundo término de otra relación teniendo como invariante la razón de la primera relación. Por ejemplo, ¿para fabricar 5 automóviles cuántas llantas necesito, sí cada uno utiliza 4? 1 es a 4 como 5 es a *x*, entonces como la invariante es 1:4 y el 1 se quintuplicó, por lo tanto el 5 también debe quintuplicar.

De esta manera se puede decir, que aunque las estructuras aditivas son las precedentes de las estructuras multiplicativas, no implican el mismo tipo de razonamiento, sino requiere de comprender las nuevas propiedades del número como ya lo señalé. Entonces, a partir de lo expuesto, puedo afirmar que *el razonamiento proporcional es un razonamiento multiplicativo asociado a problemas de isomorfismo de medidas, de relaciones multívocas y covariación de variables, que requiere las nociones numéricas de razón, factor, función y cantidades intensivas*.

En consecuencia, el desarrollo del razonamiento multiplicativo es indispensable cuando se pretende resolver problemas de razón y proporción. La investigación sobre razonamiento proporcional muestra las estrategias que utilizan diversos sujetos para resolver problemas basadas en un razonamiento multiplicativo, así como los errores o dificultades ocasionados por carencias en el mismo.

Estrategias y errores en la resolución de problemas de razón y proporción

La evidencia de la investigación muestra diferentes niveles de razonamiento: el cualitativo relacionado con la percepción sensorial sin que exista un cuantificación de las relaciones, el cuantitativo-aditivo vinculado a la aplicación de relaciones aditivas cuando estas son multiplicativas y el cuantitativo-multiplicativo relacionado con el manejo y comprensión de los conceptos involucrados en las relaciones multiplicativas.

Me parece necesario subrayar que el resolver un problema de razón y proporción no implica un razonamiento proporcional como lo señala Richard Lesh (1988). No todo problema de proporcionalidad implica la aplicación del razonamiento proporcional, tampoco todo procedimiento de solución, como la *regla de tres*, está relacionado con este tipo de razonamiento. Cuando los estudiantes hacen uso de estrategias basadas en el razonamiento multiplicativo, entonces puede decirse que se ha aplicado el razonamiento proporcional, por el contrario, cuando hacen uso de técnicas, como la regla de tres, no es posible saber si utilizaron un razonamiento proporcional, puesto que se trata de procedimientos algorítmicos.

El aprendizaje de fórmulas es muy común en la escuela, sin embargo, la incomprensión de ellas es un problema frecuente. Los profesores enfatizamos el uso de procedimientos algorítmicos dejando de lado el uso de estrategias, por lo que los estudiantes memorizan las técnicas, pero cuando se olvidan quedan limitados para afrontar problemas donde se requiera su uso. Con esto no quiero decir que las técnicas no sean útiles, sino requieren estar acompañadas con las estrategias, ya que por el contrario hay casos que tiene claro el plan estratégico para resolver el problema, pero si desconocen alguna técnica necesaria pudieran no resolverlo. En la investigación sobre el tema con sujetos de distintas edades se han caracterizados diversas estrategias y errores de solución que muestran desde un razonamiento proporcional hasta casos en que se encuentra en el nivel de razonamiento cualitativo pasando por el razonamiento aditivo y otros intermedios.

Los primeros trabajos de investigación referidos al tema son los que realizaron Piaget y colaboradores (en Karplus, Pulos y Stage, 1983). En estos trabajos se ponderó los conceptos de funciones, probabilidad, velocidad y efectos compensatorios. Siendo la proporcionalidad el principal ejemplar de la función. El trabajo de Piaget (1978) caracteriza fases de desarrollo en la comprensión de la razón y proporción:

> Las (a) etapas iniciales en las que el pensamiento hace uso de las seriaciones y correspondencias cualitativas, (b) etapa intermedia de las compensaciones aditivas o el empleo de proporción 2:1, y (c) la etapas avanzadas en las que el razonamiento proporcional fue aplicado sin tomar en cuenta los valores numéricos de los datos y sus relaciones. (En Karplus et al., 1983, p. 46)

Años antes, Lovell (1961) y Lovell y Butterworth (1966) reportaron que de las tareas de proporción aplicadas a jóvenes de 15 años, menos de la mitad de la muestra contestaron correctamente. Sin embargo los investigadores no profundizan cualitativamente en las características de las soluciones de los jóvenes.

Otros investigadores como Lunzer y Pumfrey (1966, en Karplus et al. 1983) identificaron estrategias iterativas como fue el caso de la relación 2:3, y que para construir equivalencias bastó con hacer sumas como 2+2+2:3+3+3 para dar 6:9. También hallaron que los niños cuando tratan de establecer las relaciones, ellos prefieren sumar, restar o quizá multiplicar, pero rechazan dividir. En Hart (1988) se indica que otro hallazgo fue que las relaciones 1:1, 2:1 y 3:1 habían sido los más fáciles de entre las utilizadas. Uno de los comentarios de Lunzer y Pumfrey (1966) fue que los niños de todas las edades (de 6 a 14 años) prefieren usar estrategias aditivas, aun cuando el problema sugiera estrategias multiplicativas.

Otra investigación muy importante es la de Karplus con su conocida tarea de Mr. Tall y Mr. Short. El problema utilizado involucra la búsqueda de valor perdido, específicamente trata de hallar la altura en Clips de Mr. Tall conociendo su altura en botones (6) y la altura en clips y botones de Mr. Short (6 y 4 respectivamente).

La categorización que hizo Karplus resultó interesante para que posteriormente fueran profundizadas y mejor explicadas por él mismo y otros investigadores. La categorización a la solución de los problemas fue:

N. Sin explicación

I: Intuitivas o adivinadas.

IC: Usando los datos de forma ilógica.

S. Usando multiplicación, pero no por el factor correcto.

A. Usando todos los datos, pero usando la diferencia en vez de la razón de las medidas.

AS. Centrándose en la altura excesiva de Mr. Tall y ocupándose de los 2 botones extra mediante un factor no mencionado en los datos.

AP: Como AS, pero no basada en el factor de escala de los datos.

PC: Usando la relación que un botón equivalía alrededor de 1.5 clips, encontrada a partir de medir un cuarto de la altura de Mr. Short.

R: Derivando el factor de escala directamente de los datos y luego aplicarlo por multiplicación (En Hart, 1988, pp. 200-201).

En posteriores investigaciones con los mismos sujetos Karplus y Peterson (1972) mencionaron que las categorías I e IC fueron estrategias ingenuas. Esa forma de clasificar las respuestas no indicaba el orden en que se fuera dando la evolución, sino que variaba. Y mostró que no todos los sujetos pasan por una etapa aditiva (en Hart, 1988, p. 101).

Karplus, Pulos y Stage (1983) señalaron que las respuestas se pueden clasificar en 4 grupos más grandes: incompletas o sin usar los datos dados, aditivas o diferencia constante, relaciones, transicional (iterativa, grafica, o solo uso parcial de proporciones) o uso explícito de razones iguales.

La investigación de Bryant (1974, en Hart, 1988) estuvo centrada en los métodos cualitativos de los niños da evidencia y muestra que ellos pueden inferir y establecer que el fracaso de hacer un correcto juicio proporcional fue el resultado de un análisis inicial incorrecto.

Otra investigación centrada en los métodos cualitativos fue realizada por Van den Brink y Streefland (1978, en Hart, 1988), quienes aplicaron una tarea donde muestra a un niño un póster de una ballena asesina y un hombre, cuando el niño la ve declara que la ballena es demasiado larga porque la asocia con un escena vivida en el pasado sobre una ballena con un hombre. De los resultados de estas investigaciones se ha concluido que el inicio de un pensamiento proporcional pasa por comparaciones cualitativa como lo menciona Streefland (1985, en Hart, 1988) “el aprendizaje de razón y proporción es un proceso largo que comienza con comparaciones cualitativas” (p. 202)

El trabajo de Noelting (1978) también ha sido muy importante en la investigación, ya que aportó valiosos datos sobre el razonamiento proporcional con un problema distinto a los aplicados. El problema consistió en presentar gráficamente la mezcla de concentrado de naranja con agua y los niños tenían que elegir la fórmula que pudiera producir la bebida con más sabor a naranja (en Hart, 1988, p. 203). Los estudios de Noelting revelaron que el éxito de la tarea dependía de las relaciones numéricas, es decir, de las razones puestas en juego.

El trabajo de Noelting fue reproducido por Karplus, Pulos y Stage (1981) usando jugo de limón. Las cantidades empleadas fueron discretizadas mediante medidas en cucharadas, además se demandó hallar el valor perdido y la comparación de razones. El problema consistió en que John y Mary prepararon limonadas, pero existe diferencia en la cantidad de cucharadas de azúcar y la cantidad de cucharadas de jugo de limón que puso cada uno a su limonada. A partir de ahí formularon preguntas consistentes en comparar e igualar el sabor de las limonadas de John y Mary.

Del análisis de las respuestas dadas por los sujetos resultaron cuatro categorías de respuestas:

Categoría I (incompleta, ilógica) no sabe, suposición, operaciones con cantidades inapropiadas.

Categoría Q (cualitativa) comparación cualitativa de 4 cantidades dadas, usando más, menos o términos equivalentes.

Categoría A (aditiva) usan los datos para calcular y comparar diferencias o sobrantes.

Categoría P (proporcional) usando los datos para calcular y comparar relaciones proporcionales, posiblemente con errores aritméticos. (Karplus et al., 1981).

Como resultado de la investigación educativa sobre razón y proporción se han identificado características en la resolución de problemas. Una de ellas, la más general, está referida a la relación que los sujetos establecen entre los espacios de medida involucrados en un problema: estrategia *entre* se le dice a aquella forma de resolver donde se establece la relación entre cantidades o magnitudes de la misma especie, un ejemplo se muestra en el estudio de Karplus, donde los sujetos establecieron la relación entre los botones de Mr. Short con la medida en botones de Mr. Tall; y la estrategia *dentro* donde se comparan cantidades o magnitudes de distinta especie, como establecer las relaciones entre botones con los clips.

De los participantes en la investigación de Noelting se muestra que un 60 por ciento de los sujetos usó la estrategia “dentro” y un 20 por ciento usó la estrategia “entre” en el problema que involucraba la comparación de razones. Otro señalamiento importante de su investigación es que el evitar el uso de fracciones fue algo recurrente por los participantes. (Hart, 1988, p. 203)

Los antecedentes hasta ahora señalados aportaron elementos importantes para el análisis de los datos de mi investigación. Por ejemplo el considerar que el razonamiento proporcional cualitativo es la base de partida de otros conocimientos. Otro aspecto retomado es la preferencia de estrategia por los sujetos, así como considerar que la implicación de razones fraccionarias genera mayores dificultades. Hart (1988) identifica puntos comunes en las investigaciones hechas y planteadas hasta el momento:

a) dos modos de obtener una razón a partir de los datos, en una tarea “entre” y “dentro”, tendiendo los niños a preferir “entre”.
b) Las razones desiguales y no enteras prueban ser las más difíciles.
c) Los niños evitan la manipulación de las fracciones
d) La existencia de métodos incorrectos de razonamiento, por ej. La estrategia aditiva incorrecta.

El trabajo del CSMS (Conceptos de Matemáticas y Ciencia en la Escuela Secundaria) es uno de los más importantes trabajos realizados a gran escala, dentro de este trabajo evaluativo se aplicaron varias tareas a chicos de secundaria sobre distintos tópicos de matemáticas y ciencia, dentro de matemáticas existió un apartado destinado a problemas de razón y proporción. Un problema consistió en la receta de sopa para 8 personas y se les preguntó por las cantidades necesarias ahora para 4 y 6 personas de tal manera que fuera proporcional. Un segundo problema fue el de unas anguilas de diversas longitudes (5, 10 y 15 cm) que comían de manera proporcional a su longitud. Un tercer problema fue el de la letra K donde se dibujan dos letras de la misma forma, pero de tamaño distinto y se pregunta por algún segmento de la figura agrandada. El cuarto problema es similar al de la letra K, pero con dos líneas perpendiculares.

Del análisis de las respuestas de los niños a papel y lápiz se hicieron entrevistas a algunos de ellos, de lo cual surgieron las siguientes estrategias y procedimientos seguidos:

La “estrategia aditiva incorrecta” Un error indicativo de un tipo particular de razonamiento aditivo que lleva a una respuesta incorrecta. Un tercio de la muestra total dio este tipo de respuestas en 3 o 4 de los reactivos.

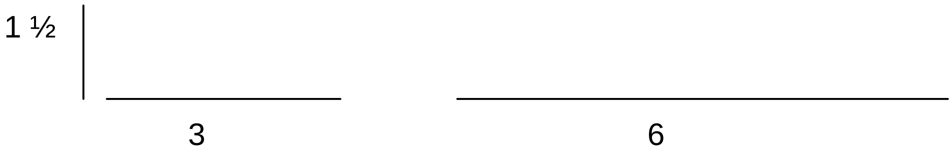
Un grupo de estudiantes fueron considerados como “sumadores” porque operaban aditivamente:

1. reemplazaron la multiplicación por sumas repetidas, en las “preguntas fáciles”
2. sumaban una diferencia fija en los problemas de ampliación que tenían mayor complejidad o involucraban razones distintas de n:1 o n:2,
3. nunca multiplicaron por una fracción
4. advertían la distorsión en las figuras pero tenían escasa idea de cómo reemplazar la estrategia que conducía al error. (Hart, 1988, p. 212)

También Hart (1980) reporta formas más específicas de resolver los problemas:

Duplicando y dividiendo por mitad es el procedimiento que resultó más fácil.

En el problema de donde se da un segmento y su alargamiento y se le pregunta completar la figura como la siguiente:



En esta actividad los niños reconocieron rápido la razón 2:1 y fue exitoso su resultado en un 72 por ciento.

En el problema de la receta para ocho personas y donde se les preguntaba la cantidad que debería usarse para cuatro personas, la mayoría dividió por la mitad, muy pocos lo hicieron encontrando cuánto es por persona y luego multiplicando.

Construcción progresiva usando división por mitades. Un ejemplo es cuando se le pregunta por la cantidad de ingredientes para seis persona, donde la mayoría de los sujetos usaron la información obtenida para cuatro y dijeron “dos personas son la mitad de 4” así que dividieron nuevamente a la mitad y sumaron el resultado para 4 y 2 personas.

Se muestra que este procedimiento fue exitoso cuando los resultados fueron números enteros, pero cuando se trabaja con fracciones las cosas cambian. P. ej. En la receta hay un ingrediente donde se usa ½ y para encontrar el de 6 tuvieron que calcular ½ de ½ más ½ (½ de ½), lo cual es más complicado.

Otras formas de construcción progresiva se evidencian en el problema de las anguilas, un problema retomado de Piaget y aplicado por el CSMS, aunque hicieron otra versión con algunos cambios en la relación entre números (2:3:5) y con otras cantidades.

El problema original consiste en 3 anguilas, una de 15 cm de longitud (A), otra de 10 cm (B) y otra de 5 cm (C) que son alimentadas con sardinas de manera proporcional a su longitud. La relación entre los números es de 1:2:3 utilizando unidades discretas. Una de las preguntas fue que la anguila C es alimentada con 2 sardinas, entonces ¿con cuántas deben ser alimentadas B y A?

Una estrategia fue duplicar y triplicar. “C es dos, eso por 2 y luego por 3”. Y otros no multiplicaron sino que su respuesta fue“2, 4, 6… 5, 10, 15 crece de 5. Ese 5 aumenta allí, suma otro 5 el cual son otros 2, otros 5 son otros dos, así 2, 4, 6”.

El problema modificado de las anguilas consistió en una anguila de 10 cm de longitud (X), de 15 cm (Y) y de 25 cm (Z) alimentadas con fishfingers. Una pregunta fue: la anguila de 15 cm tiene 9 cm de comida, ¿cuánta comida debe darse a la anguila de 25 cm?

Para responder los chicos utilizaron otros métodos de construcción progresiva, ningún chico multiplicó por 5/3. Unos chicos argumentaros que 10 es 2/3 de 15. Entonces 2/3 de 9 es 6. Eso es 15 más 10, así que sumamos las dos cantidades.

Luego se planteó que se la daban 2 cm a la anguila de 10 y se preguntaba por la de 25, entonces surgió otra estrategia de construcción “la respuesta es 5, dos de esos (X) hacen 20 y entonces otros 5 cm que es 1 cm de fishfinger.

Métodos inocentes. Son aquellos métodos muy insofisticados, por ejemplo uno donde el sujeto sabía que la figura debía ser alargada pero no usó la información dada, así sólo dibujo cualquier figura, algunas veces alargando sólo algunos lados de la figura y otros no.

Otra estrategia fue ante la misma situación de la anguila planteada anteriormente (2 cm de comida para la anguila de 10 cm, cuánto para la de 15 y la de 25 cm). Entonces el niño (John) eligió como respuesta 5 y 8, cuando se le pregunto dijo:

J. Bien, ellos son 10, 15 y 25. No hay de 20. Así que no pude subir más.

E. ¿Por qué 5 y no 6 para Y?

J. supongo eso podría ser, pero 5 va dentro de eso y eso. Podría haber tenido 10.

E. Pudiste haber elegido 20, pero elegiste 8.

J. ellos son más iguales pero podría haber sido.

Estrategia aditiva. Hart (1988) ejemplifica esta estrategia con la adaptación del problema de Mr. Short y Mr. Tall, planteado por Karplus. Cuando se le pregunta a un niño cuántos clips miden la altura de Mr. Tall, entonces el niño argumenta:

> Mr. Short necesita dos clips más que botones así que Mr. Tall necesita dos clips más que botones, así que la respuesta es ocho. (Hart, 1988, p. 94)

La frecuencia de esta estrategia es entre 25 y 50 por ciento, según Hart, y dentro de CSMS el 30 por ciento fueron consistentes en ese tipo de estrategia ante todos los problemas. Algo particular del uso de esta estrategia es que no estuvo relacionada directamente con el nivel y edad de los alumnos.

Otra investigación es la de Lawton (1993) mediante una metodología experimental trabajó con chicos universitarios de psicología. Su trabajo consistió en dos experimentos de tal forma de ponderar la influencia del contexto de un problema en la solución:

El primero consistió en dar a cada sujeto una versión del problema: *4 es a 6 como 6 es a _____?* Contextualizado de diversas formas: una fue con cilindros graduados, un cilindro contenía agua hasta la cuarta línea, y al vaciarlo llega a la sexta línea del otro. La pregunta era predecir a qué línea llegaría si el primer cilindro contuviera agua hasta la sexta línea. Esta vez fue contextualizado con globos que contenían agua, uno 4 pulgadas cúbicas y otro 6, con el primer globo se llenaba un cilindro hasta la sexta línea y se preguntaba qué tanto se llenaría al vaciar el globo que contenía 6 pulgadas. Y la última vez se ilustró el problema con cubos de hielo. 4 cubos al derretirse llenaban hasta la sexta línea del cilindro y pregunta por la cantidad que llenarían 6 cubitos.

El resultado de las explicaciones de los sujetos al resolver las situaciones mostró que las estrategias variaron dependiendo del contexto en que se planteó. La estrategia unitaria se usó en 27 por ciento en el contexto de los cubos de hielo, y solo 12 y 1 por ciento en los contextos de globos y cilindros respectivamente.

Lawton (1993) también identificó la estrategia de valor unitario, donde los sujetos obtuvieron que cada cubo de hielo equivalía a 1 ½ de las líneas del cilindro y entonces era multiplicado por 6 o sumado 6 veces ese valor.

Al igual que en las demás investigaciones en está estuvo presente la estrategia *aditiva*, donde los sujetos dieron respuesta al problema en función de la diferencia entre las cantidades puestas en juego. El 51% de los sujetos aplicó esta estrategia en el problema de cilindros; 48% en el de globos y 16% en el de cubos. Resultó evidente que a los sujetos les resultó más fácil solucionar el problema con unidades discretas que continuas.

Lawton explica que la estrategia *aditiva* consistió en un razonamiento incorrecto, donde la diferencia entre el par de números de la primera relación (4 y 6), debería ser la diferencia entre el otro par de números (6 y ____).

En el segundo experimento que realizó utilizó la misma relación que los problemas del experimento uno (4 es a 6 como 6 es a ____), solo que aquí utilizó el contexto de mezcla. Aquí la tarea consistía en producir una dieta balanceada para changos infantes. Una versión fue mezclar una fórmula con otra (F/F) y la otra consistió en mezclar biscuits con una formula (B/F).

Las estrategias fueron las mismas, excepto una que llamó *razonamiento regresivo*, la cual consistió en que si 4 copas de la primera fórmula eran mezcladas con 6 de la segunda, entonces 6 de la primera deberían ser mezcladas con 4 de la segunda. Esta estrategia fue encontrada en un 15% del problema F/F y en un 1% del problema B/F.

Un trabajo más que identifica y describe estrategias de solución a problemas de razón y proporción es el de Susan Lamon (1996) quien retoma para su análisis los conceptos de Unitizing y Norming del trabajo de Freudenthal porque lo considera un constructo importante para analizar muchos procesos de los números racionales.

Los conceptos retomados los define de la siguiente manera: Unitizing es “construir una referencia unitaria, y entonces reinterpretar una situación en términos de esa unidad”. Y Norming lo define como “la reconceptualización de un sistema en relación con alguna unidad compuesta o Estándar”. (Lamon, 1996, p. 92, 94).

La construcción de la unidad de referencia, bajo la cual el sujeto decide resolver el problema, indica niveles de sofisticación de las ideas matemáticas. Según Callanan y Markman (1982, en Lamon, 1996) sugieren un nivel sofisticado de pensamiento “cuando interpreta una situación en términos de unidades colectivas porque invocan un esquema parte-todo que permite al estudiante pensar de manera total e individual cada ítem que la componen”

También Lamon (1996) menciona que el paso de la adición y sustracción a la multiplicación requiere la coordinación de composiciones múltiples. Como ejemplo de una estructura multiplicativa simple es que requiere tres niveles de composición de unidades: encuentra ¾ de 16 objetos.

1. Considerar los 16 objetos como 16 unidades. Entonces tienes 16 unidades de uno.
2. Crear unidades de unidades, esto es, 4 unidades compuestas de 4 unidades cada una. Entonces tienes 4 unidades de cuatro.
3. Crear unidades de unidades de unidades, esto es, crear una unidad de tres, consistente en tres unidades de cuatro cada una. (Lamon, 1992, p. 93)

En términos de los constructos de unitizar y normalizar Lamon interpreta el estudio realizado. Una primera estrategia que analiza para la resolución de proporciones es la estrategia "dentro" o método escalar. Se dice que alguien utiliza una estrategia de este tipo cuando utiliza el operador escalar que liga a las cantidades del primer espacio de medida y lo aplica a las otras cantidades del segundo espacio de medida, es decir, interpreta un espacio de media en términos del otro. Lamon propone el siguiente ejemplo:

M-1		M-2
	(Número de playeras)	(Número de yardas de tela)
	5	7
x3	15	x x3

Este diagrama mostrado puede explicarse de la siguiente manera: si se ve al 5 como la unidad, puede pensarse que 15 es tres veces la unidad, entonces el operador escalar es 3, y por lo tanto el factor escalar del segundo espacio de medida debe ser 3 para así encontrar el valor faltante, veintiuno.

La otra estrategia definida por Lamon (1996) es la estrategia "entre" o método funcional que consiste en equiparar dos razones de espacios de medida externo y se confía en la relación funcional para hallar el valor perdido mediante una descomposición escalar de una función. El ejemplo que se plantea para esta estrategia es:

M-1 M-2

(onzas de medicina) (costo)

4 x

1 ¼

7 $8 .75

$8\frac{3}{4} = 1(7) + \frac{1}{4}(7)$

$f(x) = 1(x) + \frac{1}{4}(x)$

$1(4) + \frac{1}{4}(4) = 5$

Aquí en este ejemplo 1 ¼ representa el coeficiente de la función lineal de M-1 y M-2. Al resolver este problema se puede pensar el costo de cada onza, si $8.75 es el costo de 7 onzas, entonces es un dólar por onza más $.25 por onza, y así 4 onzas debe costar 4 dólares más 4 cuartos de dólar.

En el reporte de investigación de Lamon (1996) con 24 niños, a quienes se les aplican varios problemas, se reporta lo siguiente:

Un primer problema aplicado es el de los globos: "Ellen, Jim, and Steve compraron 3 globos llenos con helio y pagaron $2.00 por ellos. Ellos decidieron regresar y comprar suficientes globos para cada uno de sus compañeros. ¿Cuánto tuvieron que pagar por 24 globos?

Ante este problema los niños respondieron con distintas estrategias:

Aplicación del factor escalar. Fue la primera estrategia clasificada, también la más frecuente, fue que por cada 3 globos eran $2.00. Así que tienes 8 paquetes y 8 por 2 es 16. Esta estrategia muestra el trabajo con un factor escalar con espacios de medida iguales, es decir utiliza la estrategia "dentro".

Construcción progresiva. Estrategia que consistió en realizar una tabla de variación proporcional (de 3 globos son $2.00, de 6 son $4.00….).

Valor unitario. Esta estrategia consistió en obtener el costo de cada globo. $2.00/3 = .6666…………. Or .66 r2 .66 x 24 = $15.84 llamada two-step unit rate strategy con la cual se sacrificó exactitud.

Estrategia de aplicación externa o funcional. Y la última estrategia aplicada únicamente por un estudiante fue que 3 globos fueron $2.00 y 2 dividido por 3 es 2/3, así que me pregunté ¿cuánto es 2/3 de 24? La respuesta es 16. Quien usó esta estrategia reconoció completamente la relación estructural de equiparar tasas.

Otro problema planteado fue el de suscripción a una revista en donde por un periodo de 6 meses se hacían 3 pagos de $4.00; también un periodo de 9 meses en tres pagos de $6.00; y una tercer opción fue que por un periodo de 12 meses haría 3 pagos de $8.00. Aquí la tarea era elegir la mejor opción, es decir, comparar razones. El trabajo doctoral de David Block (2000) hace un amplio análisis de las características de la razón y la proporción y de los problemas que involucran tales nociones. La investigación realizada por Block se enfocó en la resolución que dan alumnos de primaria de cuarto a sexto grados (36 estudiantes) a problemas de razón y proporción, considerando las características de los problemas, como la demanda del problema: comparación o búsqueda de valor faltante. Otro aspecto considerado fueron las razones involucradas en los problemas. De la gran variedad de problemas aplicados a los alumnos clasificó las siguientes estrategias de solución: VU: valor unitario. Ej. 20 chocolates para 4 cajas, entonces dividir 20/4 y obtener la cantidad de chocolates por caja y luego multiplicar ese número por la cantidad de cajas que se pida.

I: *Generación de pares equivalentes*. En esta estrategia existe una conservación de la suma o de las razones internas. Ej. En un problema, aplicado por Block, se comparan las siguientes cantidades: 5c, $3, con 3c, $2, entonces para comparar las razones la estrategia es crear pares equivalentes hasta igualar un término (15: 9 y 15:10), a partir de las cuales dan la respuesta.

OP: *Cuantificación de la razón externa y uso de la misma como operador*. Ej. En un problema de escala: 4cm:8cm :: 6cm:x :: 8cm:y :: 12cm:z La solución es obtener el operador entre 4 y 8 que es 2 y de ahí aplicarlo a cada uno de los pares de números.

R. *reinterpretación del problema a uno más fácil*.

Ad: *procedimiento aditivo*. Aplicar la diferencia que existe entre los términos de una razón a la otra.

Estima: comparan estimando, sin cálculos.

N. *Se centran en una sola variable*.

El trabajo de Lo (2004) se realizó con profesores en formación, donde identifica algunas estrategias de solución y de razonamiento matemático. El problema que Lo plantea involucra el pintado de una pared en cierto tiempo: Si a Jane le toma ¾ de hora pintar una pared de 12 por 12 pies ¿cuánto le tomara pintar una pared de 15 por 16 pies?

Los sujetos tenían que ilustrar mediante un dibujo el problema, también tenían que explicar cómo lo usarían para resolver el problema. Del total de participantes 22 (61%) obtuvieron respuesta correcta, 9 (25%) tenían una estrategia válida para resolver el problema, pero plantearon erróneamente el tiempo adicional. Las estrategias identificadas fueron seis:

1a. el uso de razón equivalente/aproximación con factor multiplicativo (uso de 144 pies cuadrados para 45 minutos como razón unitaria)

1b: el uso de razones equivalentes/aproximación con factor multiplicativo (48 pies cuadrados para 15 minutos como razón unitaria)

1c: razón equivalente/aproximación factor multiplicativo (12 pies cuadrados para 3.75 minutos como razón unitaria)

2: aproximación por minutos.

3: aproximación por pies cuadrados

4: aproximación con tabla de razón.

El trabajo de Lo muestra que los sujetos construyeron las unidades de referencia bajo la cual interpretaron el problema, sin embargo hubo casos en los que sólo lo hicieron por aproximación, lo que los llevó a resultados incorrectos.

También según lo mostrado en investigaciones, las características de los problemas es un factor importante para su solución: la demanda de la tarea, las relaciones implicadas, las magnitudes puestas en juego y los contextos (*Tabla 2*). De ahí que me permití organizar en una tabla tales aspectos a considerar en los problemas que se les plantearon a los profesores participantes en este estudio.

Tabla 2

Características de los problemas de proporcionalidad

Demanda de la tarea	**Razones Internas o externas**	**Magnitudes utilizadas**	**Estrategias de solución**	**Contextos del problema**
Búsqueda de valor faltante	Enteras	Discretas	Valor unitario Diferencia aditiva Regla de tres Pensamiento regresivo Aplicación de la razón interna o externa	Mezclas
				Recetas
	No enteras	Continuas		Comercio
				etc.
Comparar razones	Enteras	Discretas	Valor unitario Diferencia aditiva Generación de pares equivalentes Regla de tres Centrado en una variable	Mezclas
				Recetas
				Comercio
	No enteras	Continuas		etc.
				Recetas
				Comercio
				etc.

CAPITULO TERCERO. METODOLOGIA

El presente trabajo se enmarca dentro del paradigma cualitativo de investigación porque está relacionado al análisis de los procedimientos seguidos por los profesores al resolver las tareas de razón y proporción y a las explicaciones dadas por los profesores en las entrevistas. En este caso, el análisis de lo expresado escrita y oralmente por los sujetos estuvo mediado tanto por la teoría existente sobre el tema como por las interpretaciones del investigador, obviamente basadas en la teoría, en la intuición, la experiencia, las reflexiones, las creencias, es decir, la subjetividad del sujeto que investiga.

Otra característica que hace cualitativa a esta investigación, es que además de comprender el conocimiento del profesor, se trata de promover cambios en la profesionalización docente, de tal forma de mejorar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. De ahí que comparto algunas ideas con el paradigma crítico-teórico de la investigación cualitativa, llamado así por Grows (1992) y que busca una transformación de la sociedad "no es solo entender y encontrar, sino de entrar en una crítica social y promover los cambios institucionales y sociales o mejorar reformas respecto a los aspectos de la vida social" (Grows, 1992). Para llevar a cabo tal transformación se necesita compartir los resultados obtenidos con los investigadores, con todos los interesados en educación pero principalmente con los maestros en servicio. Este compartir debe ir más allá de un enfoque informativo, debe llegar a construir soluciones entre investigadores y profesores. Porque, como ya lo señalé, considero que el investigador no es quien debe decir cómo hacer las cosas, ni el erudito que los va a guiar, creo que para llegar a mejores resultados es necesario que investigadores y maestros trabajen juntos, no aislados, tampoco los maestros deben permanecer sometidos a los que los investigadores señalen como lo mejor, lo novedoso o lo que debe de ser.

Otro rasgo, que caracteriza como cualitativa a esta investigación, está relacionado con el estudio de casos que dan pautas para comprender la población estudiada en su totalidad, que a su vez puede servir, como seña Grows (1993), "para ver el mundo en un grano de arena", es decir, iluminar lo general a partir de lo particular y de esta manera los resultados de la investigación pueden ejemplificar otros casos.

Delimitación espacial de la investigación

Oaxaca es un estado rico en recursos naturales y en diversidad cultural. La mayor parte de la población del estado son miembros de grupos indígenas que habitan en medios rurales alejados de los centros urbanos. Las actividades económicas a las que se dedica la población son la agricultura, ganadería y comercio a pequeña escala, tanto que sus ingresos, aun contando el trabajo de los niños[5], apenas les alcanza para sobrevivir, aunque carezcan de vestido y vivienda dignos. Es decir, la pobreza es una característica de esta gente. Por otro lado, el rezago educativo, consecuencia de las condiciones políticas y socioeconómicas, es un problema palpable. Así mismo, esas circunstancias provocan la emigración de mucha gente en búsqueda de una vida digna.

Los profesores están obligados a cumplir con su tarea en esas condiciones socioeconómicas que presenta la población. Por otra parte los profesores carecen de un salario digno, lo que provoca una desatención de su trabajo por buscar otras fuentes de ingreso. Los profesores que trabajan en medios rurales, que son la mayoría de la población docente en el Estado, tienen condiciones adversas para dar continuidad a su formación profesional, esto debido a la situación geográfica, a la falta de instituciones cercanas que den este servicio, a la falta de proyectos educativos en el sindicato, al poco apoyo por parte del Estado, y a las condiciones socioeconómicas en que viven. Por estas razones los profesores cuentan con pocas oportunidades de profesionalización, lo cual condiciona e influye negativamente en la mejora del trabajo de los profesores.

Los maestros que participaron en la investigación pertenecen a la zona escolar 045 de Santiago Juxtlahuaca, Oaxaca. Lugar ubicado al noroeste de la capital del estado, dentro de la región mixteca. Dicha zona escolar agrupa 18 escuelas, 13 de ellas ubicadas en medios rurales y 5 en la cabecera de zona, lugar semiurbano (*Tabla 3*).

El acceso a algunas escuelas es complicado debido al poco transporte existente, a las distancias (algunas ubicadas a 20 km de la cabecera de zona) y a la orografía, ya que las escuelas se ubican en una región montañosa y de espesa vegetación, donde el

---

[5] Muchos niños en edad escolar trabajan para apoyar a sus padres.

acceso a ellas es por caminos revestidos. Nueve de las dieciocho escuelas son de organización completa (mínimo un grupo por grado), una pentadocente, cinco bidocentes (dos maestros atienden los seis grados) y tres unitarias (un solo maestro para los seis grados).

De estas características es el espacio donde laboran los profesores participantes, lo que permite comprender mejor la población. Es aquí donde se realizó el estudio y esto también tuvo sus implicaciones en el proceso de investigación en el sentido de acceso y trabajo con los profesores.

Tabla 3

Relación de escuelas donde laboran los docentes

N/P	ESCUELA	POBLACIÓN	MEDIO RURAL (R) O SEMIURBANO (SU)	ORGANIZACIÓN COMPLETA (C) O INCOMPLETA (I)
1	Cayetano Esteva	Stgo. Juxtlahuaca	SU	C
2	Lázaro Cárdenas		SU	C
3	Benito Juárez		SU	C
4	Leyes de Reforma		SU	C
5	Democracia		SU	I (bidocente)
6	El porvenir	Sta. Rosa Caxtlahuaca	R	C
7	Rafael Ramírez	La Reforma Juquila	R	I (bidocente)
8	Mariano Matamoros	Unión de Cárdenas	R	I (5 maestros)
9	Vicente Guerrero	Stgo. Naranjas	R	C
10	Belisario Domínguez	Sn. Miguel de Cárdenas	R	I (unitaria)
11	Benito Juárez	Sta. María Asunción	R	C
12	Fco. González Bocanegra	Vista Hermosa	R	I (bidocente)
13	Minerva	Agua Fría	R	I (bidocente)
14	Ignacio Zaragoza	Sta. Catarina Noltepec	R	C
15	Alma Campesina	Nicán	R	I (unitaria)
16	Cuauhtémoc	Yuchio	R	I (unitaria)
17	Pedro Moreno	Tacuyá	R	I (bidocente)
18	Vasco de Quiroga (particular)	San Juan Copala	R	C

Delimitación temporal de la investigación

Una condicionante para desarrollar y delimitación de los alcances de este estudio fue la temporalidad del permiso para realizar los estudios y los tiempos del propio programa de estudios de la maestría (dos años). El primer y segundo semestre (2004-2005) estuvo destinado a la construcción del proyecto, el tercero y parte del cuarto (2005-2006) dedicados al trabajo de campo. Parte del cuarto y un quinto semestre extra estuvo destinado al análisis y sistematización de los datos obtenidos y a la redacción del informe de la investigación.

Población

La población participante en este estudio estuvo integrada por 66 profesores y profesoras de segundo y tercer ciclo de la zona escolar de educación primaria 045. Las características de la población en cuanto a sexo (tabla 1), años de servicio (tabla 2) y preparación profesional (tabla 3) está dada a continuación.

Del total de la población el 60.6% son mujeres (40) y el 39.4% hombres (26), según se muestra en la tabla 2.

Tabla 4

Sexo de la población

	Mujeres	Hombres	Total
2do ciclo	18	11	29
3er ciclo	22	15	37
Total	40	26	66

Formación profesional

De los 66 profesores participantes cuatro no dieron respuesta al cuestionario de datos personales, de ahí que sólo presento los datos correspondientes a los 62 profesores que sí contestaron el cuestionario.

El 11.3% de los profesores participantes tienen un grado máximo de estudios de bachillerato, aunque algunos de ellos se encuentran estudiando la licenciatura en el sistema semiescolarizado de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN). El 21% de la población realizó sus estudios normalistas antes de 1984, cuando aún no era licenciatura y entonces conocida como Normal básica, es decir, eran estudios a un nivel medio superior como el bachillerado. El 58% de los profesores cuenta con una preparación de licenciatura, estudios realizados en Normales o en sedes de la UPN. El 4.8% de los profesores tienen estudios de maestría. Por último, en la columna *otro* incluyó a tres profesores, de los cuales dos cuentan con otras licenciaturas, uno en contaduría y otro en derecho, y el último tiene 7 semestres de ingeniería y estudia la licenciatura en educación por la UPN (*Tabla 5*).

Tabla 5

Grado de estudio de la población

	Bachillerato	Normal Básica	Normal (Lic)	Lic. UPN	Maestría	Otro	Total
2do ciclo	4	10	7	6	0	0	27
3er ciclo	3	3	13	10	3	3	35
Total	7	13	20	16	3	3	62

Experiencia docente

La experiencia docente de los profesores la organicé en periodos de cinco años (*Tabla 6*), ya que son tiempos considerables en los que, según mi punto de vista, se van alcanzando niveles de experiencia y mayor preparación.

De los profesores de tercer ciclo el 94.6% (35) del total de la población dieron respuesta a la pregunta de los años de experiencia docente. Del total de profesores que contestaron el 20% (7) cuentan con una experiencia de entre 0 y 5 años, el 43% (15) de entre 5 a 10 años, el 31% (11) de entre 11 y 15 años, el 3% (1 profesor) de entre 16 y 20 y un 3% (1 profesor) con 27 años de experiencia.

Los profesores de segundo ciclo cuentan con la siguiente experiencia: el 24.1% tienen de entre 0 a 5 años de experiencia; el 6.9% están dentro de los 6 y 10 años de servicio; el 20.7% entre los 11 y 15 años; el 6.9% entre los 16 y 20 años y; el 41.4% tienes más de 21 años de experiencia docente.

Tabla 6

Años de servicio docente de la población

	0-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	30->	Total
2do ciclo	5	3	6	1	4	6	2	27
3er ciclo	7	15	11	1	0	1	0	35
Total	12	18	17	2	4	7	2	62

En la población de los profesores de segundo ciclo existe una considerable cantidad que sobrepasan los 20 años de servicio, lo que explica que varios hayan realizado sus estudios antes de que la carrera de normalista fuera a nivel licenciatura.

Para el análisis cualitativo se tomaron del total de participantes los casos de los cuales se contaba con mayor evidencia además de ser representativos del grupo y de aquellos que fueron entrevistados (*Tabla 7*), por lo que en la siguiente tabla se enumeran algunas características de estos profesores.

Tabla 7

Casos del análisis cualitativo

Caso	Sexo (M, F)	Estudios	Años de servicio docente	Grados atendidos en últimos cinco ciclos (2000-2005)					Experiencia con los problemas resueltos			
				00-01	01-02	02-03	03-04	04-05	T	NT	F	D
6-C3	F	Lic. UPN	13	1°	2°	4°	6°	4°		X		X
32-C3	F	Lic. UPN	10	3°	5°	3°	5°	4°	X			X
7-C3	F	Lic. UPN y maestría	13	1°	2°	5°	3°	3°		X		X
36-C3	M	Normal básica	18	1°	6°	5°	4°	6°	X			X
33-C3	M	Ingeniería y cursa Lic. UPN	3				1°	4° 5° 6°		X		X
15-C3	M	Lic. Normal y maestría	15	3°	4°	5°	Sup	Sup		X		X
13-C2	F	Normal	13	6°	6°	6°	Dir	Dir	X			X

Caso	Sexo (M, F)	Estudios	Años de servicio docente	Grados atendidos en últimos cinco ciclos (2000-2005)					Experiencia con los problemas resueltos			
				00-01	01-02	02-03	03-04	04-05	T	NT	F	D
15-C2	M	Lic.Normal y normal superior	25	4°	4°	4°	4°	3°	X		X	
16-C2	M	Normal IFCM[6]	37	1°	2°	3°	1°	3° 4°	X		X	
1-C2	M	Lic. Normal	13	3°	6°	6°	4°	6°		X		X
7-C2	F	Lic. Normal	9	1°	2°	6°	4°	5°		X		X
8-C2	M	Normal Básica	30	6°	5°	4°	1°	4° 5° 6°	X			X
9-C2	M	Cursando UPN	2				3°	3°	X			X
21-C2	M	Normal Básica y Lic. UPN	20	4°	5°	6°	5°	5°	X			X
22-C2	F	Nor. Básica y Lic. UPN	29									X
25-C2	F	Lic. Normal	10	2°	2°	1°	2°	4°		X	X	
28-C2	M	Lic. UPN	15	5°	6°	4°	4°	1° 2°				
29-C2	F	Normal Básica	6	1°	2°	1°	2°	2°		X		
11-C3	M	Lic. UPN	15	2°	5°	6°	1°	2°	X			X
27-C3	M	Lic. Normal	9	3°	5°	2°	4°	6°		X		
34-C3	F	Lic. Normal y Normal Superior	9	6°	5°	6°	1°	2°	X		X	

Sup: auxiliar en la supervisión escolar **Dir**: director de escuela **T**: trabajada **NT**: no trabajada **F**: fácil **D**: difícil

La numeración de los casos en la primera columna de la tabla indica el número de caso según ciclo en el que trabajaban en ese momento, por ejemplo: el 6-C3, indica el caso 6 de tercer ciclo, el 22-C2 indica el caso 22 de segundo ciclo. Los casos sombreados son a quienes se les hicieron las entrevistas. En la columna de experiencia

[6] Instituto Federal de Capacitación del Magisterio, un sistema a distancia por correspondencia y cursos semiescolarizados que duró de 1945 a 1971 con profesores que sólo contaban con educación primaria

con los problemas resueltos se identifica si ya habían trabajado los problemas que resolvieron.

Elección y elaboración de los instrumentos de investigación

A diferencia de los trabajos centrados en creencias o concepciones, el presente estudio está centrado en el hacer de los sujetos y no en el decir o en la parte descriptiva de conceptos. Ahora bien, la parte narrativa también tuvo un papel muy importante, pero sólo para describir las acciones realizadas por el sujeto, de tal manera de profundizar en las interpretaciones hechas por los sujetos al ejecutar acciones.

La elaboración de los instrumentos partió de un análisis curricular sobre el contenido de razón y proporción en la escuela primaria, seguido de la construcción del cuadernillo de lecciones de los libros de texto (cuestionario) y del diseño de guiones para las entrevistas clínicas.

Análisis curricular

Para la selección de tales tareas existió la necesidad de analizar el programa de estudios de educación primaria y los libros de texto (*Ver anexo 1*), además de la revisión bibliográfica. El análisis curricular, cuyo objetivo fue el comprender el tratamiento que se da al contenido de razón y proporción en el programa, así como las características de las tareas propuestas en los libros de texto gratuitos, aportó las herramientas esenciales para la elaboración del principal instrumento de investigación: el cuadernillo de lecciones seleccionados de los libros de texto a ser resueltas por los profesores. Para este análisis revisé los libros cuarto, quinto y sexto, que es donde declara el Programa de Estudios se aborda el tema de razón y proporción.

Esta revisión del programa me permitió tener claridad del cómo y el qué se propone abordar del contenido de razón y proporción en la escuela primaria teniendo en cuenta la continuidad, secuencia e integración de dicho contenido

El cuestionario

Este instrumento tuvo dos posibilidades: Una fue retomar problemas planteados en otras investigaciones; la segunda fue elaborar problemas similares a los planteados en los libros de texto y; la tercera fue la aplicación de los problemas planteados en los propios libros de texto.

En principio nos pareció viable la primera opción y se aplicó un cuestionario a profesores del Distrito Federal, sin embargo los resultados obtenidos no fueron convincentes, daban cuenta de los conocimientos del profesor para resolver problemas de razón y proporción, pero no podía afirmarse el desconocimiento para resolver los problemas que se plantean en el aula, así que optamos por poner a los profesores ante las propias lecciones de los libros de texto, con lo que garantizamos tener evidencia más confiable sobre el conocimiento del profesor para resolver los problemas que plantea y resuelve en clase con sus alumnos, dada la importancia del libro de texto para el desarrollo de la clase, es más, es sobre el cuál se articula la práctica docente.

Seguido a esta decisión, seleccionamos las lecciones y problemas posibles de ser aplicados a los profesores, lo que llevó a la elaboración de un cuadernillo con todas las lecciones incluidas en los libros de texto y que su contenido, declarativo en el mismo, fuera sobre razón y proporción. El cuadernillo quedó constituido por un total de 26 lecciones, esta condición hacía imposible que todas fueran resueltas por los profesores, sin embargo no se descartó la idea. De esta manera quedó constituido el principal instrumento de la investigación.

Este instrumento elaborado lo consideré un cuestionario porque consta de preguntas que tienen las características de preguntas abiertas y cerradas. Cerradas porque la solución a cada tarea es única; abiertas porque el procedimiento a seguir está a la elección y posibilidades de cada sujeto.

Una vez construido el instrumento anterior se elaboraron otros complementarios: un cuestionario sobre datos personales, experiencia docente y formación profesional; otro cuestionario abierto para identificar los temas y lecciones de matemáticas que les han parecido fáciles y difíciles durante su experiencia docente en la educación primaria.

Otra inquietud que consideramos importante fue la de valorar la experiencia que los profesores tenían con las lecciones incluidas en el cuadernillo, fue entonces que elaboramos etiquetas con las leyendas *fácil, difícil, trabajada y no trabajada* para que fueran colocadas por los profesores antes de resolver las tareas de las lecciones.

La entrevista

Como último instrumento diseñado fue la entrevista clínica con el fin de profundizar en las interpretaciones de los profesores y de dar sustento al análisis cualitativo de la investigación.

Este instrumento fue elaborado después de la aplicación del cuadernito, ya que se diseñó con base en la evidencia plasmada en él. La entrevista diseñada fue semiestructurada, ya que se tenían preguntas principales a partir de las cuales se desarrollarían otras en el momento.

Aplicación de los instrumentos de investigación

Para llevar a cabo la aplicación de los instrumentos pensamos en la posibilidad de reunir a los profesores. De esta manera iniciamos el acercamiento con la supervisora de zona escolar, a quien se le plantearon los propósitos y acciones a realizar con los maestros. Fue entonces cuando se acordó con la supervisora organizar unos talleres sobre enseñanza de las matemáticas de tres días y aprovechar para aplicar los instrumentos de investigación.

Esta estrategia nos permitió tener una relación más cercana a los profesores y con lo que tuvimos el apoyo para aplicar instrumento.

Primera fase de aplicación de instrumentos

En acuerdo con la supervisora se decidió llevar a cabo la primera fase de aplicación al inicio del ciclo escolar 2005-2006, en las fechas de los Talleres Generales de Actualización (TGA). La manera en que se organizan los profesores para los cursos es por ciclos: el primero compuesto por primero y segundo grados; el segundo por tercero y cuarto grados y el tercero por quinto y sexto grados. Esta situación permitió el trabajo con los profesores a los que nos enfocamos.

Puesto que los talleres iban a ser coordinados por mi asesora y yo, decidimos no tratar temas de razón y proporción, ya que éste era el tema a indagar y era necesario no incidir en el conocimiento de los profesores en ese momento, de tal forma que las respuestas a las lecciones del cuadernillo dieran las pautas del dominio de los profesores sobre el tema.

El taller estuvo organizado de la siguiente manera: la duración fue de cuatro horas diarias, en un periodo de tres días. La primera hora del taller estuvo destinada a contestar los cuestionarios de indagación y el demás tiempo estuvo destinado a desarrollar las actividades específicas del taller.

Durante este primer taller los profesores contestaron el cuestionario de datos personales y cuatro lecciones del cuadernillo elaborado. Durante la resolución de los problemas contenidos en las lecciones, se pidió a los profesores que el trabajo fuera individual y que plasmaran sus respuestas y procedimientos con bolígrafo. La primera petición no se cumplió al cien por ciento ya que fue imposible impedir la interacción entre profesores. La segunda petición tampoco fue conseguida al cien por ciento, ya que hubo profesores que no contestaron debido a que faltaron algún día, llegaron tarde o no quisieron.

En la aplicación del cuadernillo existieron factores que impidieron fueran contestados todos los problemas de las lecciones aplicadas. Uno de estos factores fue el tiempo destinado a la resolución de los problemas, lo que pudo haber ocasionado que algunos profesores no terminaran de contestar, sin embargo fue necesario poner un límite, puesto que cuando la mayoría ya había acabado de resolver el problema comenzaban a comparar o comentar sus resultados, lo que podía provocar borrar y cambiar sus procedimientos o resultados, entonces se optó por la decisión de no dar más tiempo, aun con el riesgo de que algunos no terminaran.

En esta primera fase también se aplicaron dos cuestionarios complementarios: uno de datos personales, experiencia docente y formación; el otro fue aquel destinado indagar los temas que les han parecido difíciles durante su experiencia docente.

Primer análisis de datos

En los días posteriores a la aplicación se revisaron los cuestionarios aplicados. Respecto al cuestionario de datos personales identificamos casos de profesores que no habían otorgado sus datos personales y por lo tanto era necesario recuperarlos en la siguiente fase de aplicación. En relación a la parte del cuestionario que preguntaba sobre qué temas recuerdan, durante su experiencia docente, les eran difíciles, las respuestas eran muy variadas y difíciles de sistematizar por ser abiertas, además mostraban pocos elementos valiosos; las respuestas indicaban que los temas de razón, la proporción, las fracciones, conversiones, áreas, volúmenes eran contenidos que a la mayoría de profesores les resultaban complicados.

Respecto a las respuestas del cuadernillo identificamos casos con respuestas incompletas o sin contestar. Ante esta situación acordamos dejarlas así, puesto que ya había comenzado el ciclo escolar y pudieron haberlas trabajado en clase, y por lo tanto ya no correspondería al conocimiento que en aquel momento de aplicación tenían esos profesores. Este análisis del cuadernillo también tuvo la finalidad de elegir a los candidatos a entrevistar.

Después de haber revisado las lecciones contestadas, fue evidente que no era posible preguntar sobre todas, por lo que tuvimos que elegir algunas, las que resultaron más relevantes, en cuanto a la evidencia mostrada, asimismo en cuanto a la estructura y demanda de los problemas. A partir de este análisis se contemplaron 16 profesores candidatos a ser entrevistados, seleccionados a partir de sus respuestas y procedimientos, también que fueran representativos de la población. Sin embargo, las entrevistas se harían según la disposición de los profesores, por lo que se tenía en mente la posibilidad de entrevistar a menos y posiblemente a algunos no previstos.

Seleccionados los sujetos y las tres lecciones sobre cuáles preguntar se elaboró el guion de la entrevista y se planeó la siguiente fase de aplicación.

Segunda fase de aplicación de instrumentos

La segunda fase de aplicación se dio en el mes de noviembre de 2005, y al igual que en la primera fase, la forma de obtener los datos fue mediante otro taller. Durante el taller destinamos tiempo a conseguir datos personales faltantes de algunos profesores y a resolver otras lecciones del cuadernillo, pero lo esencial de esta segunda etapa fue la aplicación de entrevistas. La forma en que se procedió fue mediante una invitación a los profesores seleccionados con anterioridad, a la cual algunos aceptaron y otros no. Finalmente las entrevistas se llevaron a cabo con 9 profesores.

En la planeación para la aplicación de las entrevistas decidimos que fuera en parejas porque consideramos que de esa manera se daría la confrontación de ideas y habría más riqueza de datos para analizar. También las entrevistas serían audiograbadas y realizadas en tiempo fuera del taller, circunstancia que no permitió que fueran entrevistados algunos profesores debido a la falta de tiempo de que disponían.

Durante la primera entrevista nos dimos cuenta que, aunque por momentos había confrontación de ideas, en la mayor parte del tiempo predominaba la opinión de un profesor, siendo aceptada por el otro. Esta situación provocó algunos cambios, seguir con las entrevistas en pareja, pero con el cambio de que cada profesor tendría que dar respuesta por separado y luego, si se diera la ocasión, discutir y comparar respuestas. Esta modalidad dada nos llevó a tener entrevistas individuales más que como se había pensado.

Segunda y última fase de análisis

La información recopilada fue muy abundante, debido a esta circunstancia y al tiempo fue necesario hacer una selección para el análisis de este reporte. Con base en los datos obtenidos a través del cuadernillo de lecciones y de las entrevistas hechas, decidimos reportar los datos de la lección llamada “con el mismo sabor”, la cual fue una de las que, por las respuestas de los profesores, resultaron más interesantes para el análisis. Otra razón por la cual la elección de mostrar estos datos se debió a las propias características de los problemas planteados en la lección.

Por último, falta señalar que la revisión bibliográfica fue una actividad constante en todo el proceso de la investigación basada en las necesidades y circunstancias a que nos enfrentamos en cada momento: la elaboración del proyecto, su ejecución y la redacción de este informe.

Reconozco la existencia de debilidades en la metodología del trabajo, como las referidas a la aplicación de instrumentos, ya que fue imposible controlar del todo las variables pretendidas. Sin embargo, el análisis fue realizado minuciosamente apoyado en los referentes teóricos y empíricos, de tal forma de lograr la validez interna del trabajo.

Así como existen debilidades en el estudio, existen fortalezas, como lo es indagar cualitativamente el conocimiento del profesor sobre un contenido que enseña: razón y proporción; asimismo el valerse de las lecciones de los libros de texto, principal referente para el desarrollo de la clase del profesor, lo considero un acierto.

Seguramente existen más fortalezas, al igual que debilidades, pero es mejor dejarlo a criterio de los lectores.

CAPITULO CUARTO. HALLAZGOS DE LA INVESTIGACIÓN

Procedimientos empleados por los profesores en la resolución de problemas de razón y proporción

Los datos presentados a continuación pertenecen a los cuatro problemas planteados en la lección "con el mismo sabor" del libro del alumno de quinto grado de educación primaria. Para un mejor manejo de los datos conservé la numeración de los problemas como los presenta la lección. La lección está dividida en 3 apartados: el primero lo dividí en tres partes debido a las condiciones del problema (Problemas 1a, 1a' y 1b), el segundo y tercero apartados quedaron numerados igual a como están en la lección (Problema 2 y 3).

La forma de clasificar las estrategias de solución de los problemas fue con base en las clasificadas por otros investigadores, sin embargo no consideré todas, sino sólo las que coinciden con las encontradas en el presente informe de investigación:

VU= valor unitario

R-3= *regla de tres*

AD= estrategia aditiva incorrecta.

I= Generación de pares equivalentes. Apelan a la conservación de la suma o de las razones internas para generar pares equivalentes.

NV= estrategia no visible. Se trata de profesores que dieron la respuesta, pero no desarrollaron su procedimiento.

NC= sin respuesta. Son los profesores quienes no dieron respuesta al problema.

Debido al hecho de trabajar con dos grupos de profesores, uno de segundo ciclo (tercero y cuarto de primaria) y otro tercer ciclo (quinto y sexto grado de primaria) agregué a la clasificación el número 2 y 3 para indicar el ciclo al que corresponden las respuestas de los profesores. Por ejemplo VU2 indicar la estrategia de valor unitario utilizada por profesores del segundo ciclo.

La forma de presentación de los datos está estructurado de la siguiente forma: Características del problema, datos cuantitativos de las respuestas de los 66 participantes y los datos cualitativos de 9 casos particulares con quienes se hicieron entrevistas y otros casos que mostraron procedimientos ilustrativos.

Problema 1a y 1a'

En la escuela de Juan están preparando agua de distintos sabores para la kermés.

Para hacer naranjada, en la olla color crema se pusieron 40 naranjas y 4 tazas de azúcar. ¿Cuántas naranjas y cuánta azúcar deberán poner en la olla color azul para que la naranjada tenga el mismo sabor que la de la olla color crema? (libro de texto, 5to, p. 108).

Figura 1. Problema del libro de texto de quinto grado 1a y 1a' de valor faltante

Para fines del análisis el problema lo dividí en 2 partes: **1a** (cantidad de naranjas) y **1a´** (cantidad de azúcar) debido a que es un problema de proporción múltiple de valor perdido, que demanda dos respuestas de muy clara y diferenciada complejidad. La representación de los datos del problema los muestro en la *Tabla 8* para identificar a detalle las características del mismo:

El problema involucra cantidades continuas (litros de agua) y discretas (botellas, naranjas) como puede apreciarse. Para hallar la cantidad de naranjas la razón externa es entera (10 litros a 40 naranjas o 5 botellas a 40 naranjas) y razón interna fraccionaria (6 a 10 o 3 a 5) con la cual podría hallarse la cantidad de naranjas, pero es una relación que no fue utilizada en la resolución del problema. Por otro lado, en la segunda parte del problema (1a') tanto la razón interna como externa son fraccionarias (4 a 10, 4 a 5 o 6 a 10). El contexto del problema es de mezcla, lo que provoca la construcción de relaciones funcionales más que a utilizar relaciones escalares porque los datos (40 naranjas para 10 litros) así lo sugieren. Esto se vio reflejado en los resultados, ya que los profesores no recurrieron a relaciones escalares, las cuales pudieron haberse aplicado.

Tabla 8

Estructura numérica del problema 1a y 1a'

Agua			
Litros o botellas		naranjas	azúcar
10	5	40	4
6	3	?	?

La presentación detallada de todas las relaciones posibles entre los datos del problema, dan pauta para hacer consideraciones en las respuestas de los profesores. Primero, para hallar la cantidad de naranjas son varias las posibilidades de relación, una de ellas es la funcional: de 10 a 40 o 5 a 40   (4 o 1/4, 8 o 1/8), es decir a cada litro le corresponden 4 naranjas o a cada botella le corresponden 8 naranjas; sus inversos indican que por cada naranja le corresponde un cuarto de litro o un octavo de botella. También se pueden establecer relaciones escalares, es decir, entre las magnitudes de la misma especie: la relación de 6 a 10 (6:10::3:x o 10:6:x:3) o bien de 3 a 5 (3:5 o 5:3). La aplicación de cualquiera de las razones es viable para hallar la cantidad de naranjas, pero sólo algunas se aplicaron.

Con la cantidad de azúcar sucede lo mismo. La relación funcional posible es azúcar/litros (4/10 o 10/4), también azúcar/botella (4/5 o 5/4); o bien las mismas relaciones escalaras mostradas para la cantidad de naranjas (10:6::4:x o 6:10::x:4). También existe la posibilidad de trabajar con otras relaciones una vez hallada la cantidad de naranjas o azúcar. Por ejemplo, hallada la cantidad de naranjas (24) para la olla azul, puede relacionarse tazas/naranjas (40:4::24:x), naranjas/naranjas (40:24::4:x) o sus inversos.

Cuantificación de respuestas y estrategias

Los datos cuantitativos que arrojan las respuestas de los 66 profesores participantes en la investigación se muestran en la Figura 2.

En ellas puede apreciarse las respuestas correctas, las incorrectas y quienes no dieron respuesta (NC), aunque en algunos casos existieron procedimientos sin respuesta final. De los 66 profesores el 86.4% (57 profesores) obtuvieron una respuesta correcta, no hubo respuestas incorrectas y 13.6% (9 profesores) no contestaron por causas desconocidas. Pero contabilizando sólo los profesores que contestaron, el 100% de ellos obtuvo una respuesta correcta. Tal situación muestra que ante el problema de hallar la cantidad de naranjas no tuvieron mayores dificultades debido a que, según las características de la primera parte del problema, se trabajó con relaciones funcionales donde la razón es entera (10 a 40 o 5 a 40) y por tanto el valor unitario obtenido también.

Dado el trabajo con profesores de dos ciclos, presento los resultados desglosados de esa manera. En el caso de los profesores de segundo ciclo que participaron, el 86.2% obtuvieron una respuesta correcta, ninguna incorrecta y el 13.8% no contestó. Pero de los que contestaron el 100% contestó correctamente al problema **1a** (cantidad de naranjas).

En el tercer ciclo varía un poco la situación, del total de profesores que participaron (37), el 86.5% (32 profesores) resolvió correctamente, nadie dio una respuesta incorrecta y el 13.5% no contestó. Del número de profesores que respondieron el 100% (32) lo hizo correctamente.

Es notorio el alto porcentaje de los profesores que exitosamente hallaron el valor de la cantidad de naranjas para la olla azul de naranjada. Pero la situación cambia cuando se trata del manejo de razones fraccionarias. Esta situación es evidente en la dificultad que tuvieron los profesores para hallar la cantidad de azúcar (1a’).

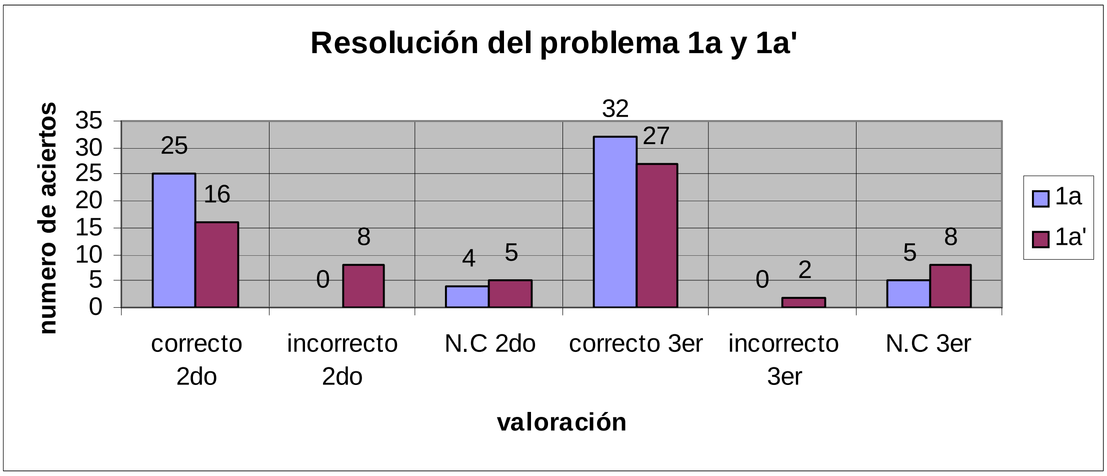


Figura 2. Respuestas al problema 1a y 1a'.[7]

Del total de quienes participaron, el 65.1% obtuvo una respuesta correcta, el 15.1% incorrecta y el 19.7% no contestó. En comparación con la pregunta **1a,** el porcentaje de quienes no contestaron aumentó en un 6%, lo que sugiere que ese 6% que sí contestó el anterior problema prefirió no hacerlo, también puede suponerse que fue debido a la complejidad de las relaciones involucradas para hallar la cantidad de azúcar (razones fraccionarias).

Al considerar sólo a los que contestaron (53 profesores), en comparación con los porcentajes del total de participantes (66), el éxito aumenta, pero también el fracaso: el 81.1% obtuvo un resultado correcto y el 18.7% obtuvo una respuesta incorrecta. Hay que hacer notar que así como aumenta el éxito en un 16.3% al no tomar en cuenta a quienes no contestaron, también aumentó el fracaso en 3.6%. El eliminar a los que no contestaron y sólo tomar en cuenta a los que sí lo hicieron muestra con mayor precisión el éxito y el fracaso en hallar el resultado pedido, porque de quienes no contestaron no podemos saber a ciencia cierta lo que pasó, sólo suponer. Sin embargo, debido a la forma presencial en que se realizó el cuestionario puedo afirmar que algunos profesores no contestaron el cuestionario porque no pudieron y algunos simplemente no quisieron.

[7] Las letras N.C señala los casos sin respuesta y los números ordinales 2do (tercero y cuarto grado) y 3er (quinto y sexto grados) indican el ciclo escolar en que se encontraba laborando los profesores participantes.

La revisión de las respuestas por ciclos al problema **1a'** también muestra datos interesantes. En el segundo ciclo, del total de participantes el 55.2% (16 profesores) obtiene una respuesta correcta, el 27.6% (8) incorrecta y el 17.2% (5) no contestó. Del total de quienes respondieron el 66.6% responde correctamente y el 33.4% incorrectamente. En el tercer ciclo el 73% (27) da una respuesta correcta, el 5.4% (2) incorrecta y el 21.6% (8) de los profesores no respondió. De los 29 profesores que contestaron, el 96% contestó de forma correcta y el 4% no. Nuevamente es visible el aumento de profesores que no contestaron, lo que da más evidencia que tal situación fue debido al aumento de la complejidad del problema, ya que demandó el uso de razones fraccionarias.

Los datos mostrados sobre la resolución al problema **1a** y **1a'** dan cuenta de los profesores que resolvieron el problema, sin embargo mi experiencia en la aplicación del cuestionario me permitió observar cosas que, de alguna manera, pueden hacer desconfiar del éxito obtenido por algunos profesores. En una revisión detallada de las respuestas de los profesores para categorizar las estrategias utilizadas, como se muestra en la *tabla 15 y gráfico 2*, hubo quienes no registraron ningún procedimiento (N.V), pero colocaron respuestas correctas, específicamente el 22% (15 profesores de los 66). Desde mi punto de vista y experiencia, pudo haber existido copia de respuestas en el problema 1a', debido a la mayor complejidad de la relación fraccionaria. Por otro lado, el no registrar el procedimiento en el caso del apartado *1a*, podría deberse a facilidad de esa parte del problema, ya que no hubiese sido necesario la elaboración escrita del procedimientos.

Del análisis de los procedimientos implementados en la solución al problema surgieron resultados que muestran la frecuencia y el tipo de estrategias (Figura 3) utilizadas por los profesores, así como los recursos de los que se valieron para hallarlo. Respecto a las estrategias usadas debo aclarar que aún dentro de una misma estrategia existen variantes en función de los recursos y operaciones utilizadas en sus procedimientos, tal situación es notoria en el apartado de datos cualitativos de cada problema. Ante la demanda del problema de hallar el número de naranjas para la olla azul el 63.6% (42 profesores) lo hicieron mediante el uso de la estrategia de valor unitario (V.U), ya fuese naranjas por litro (4 a 1) o naranjas por botella (8 a 1), existió un caso donde se utilizó la regla de tres y casos donde no se muestra el procedimiento o quienes no contestaron.

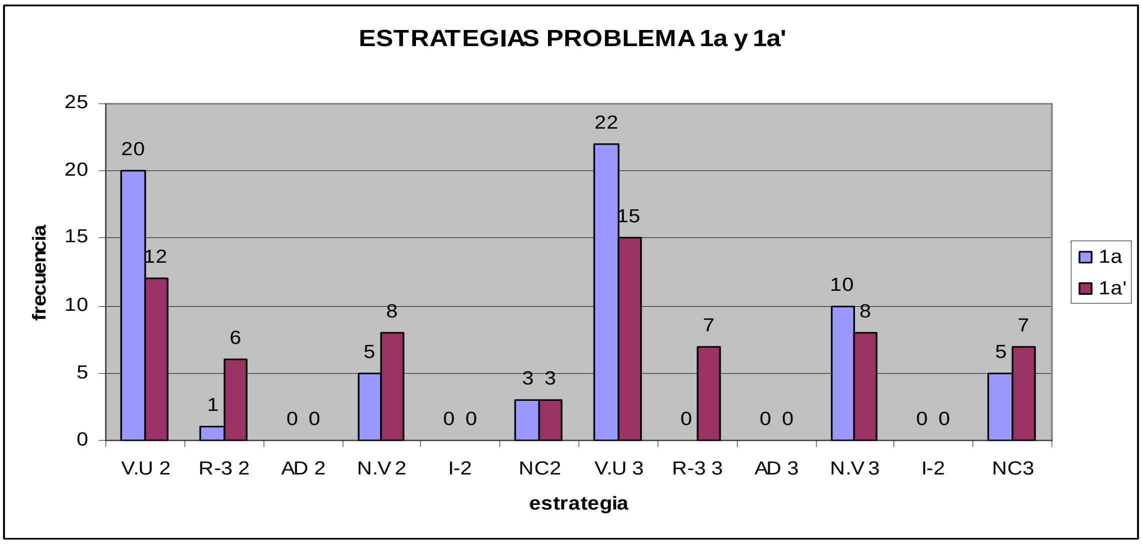


Figura 3. Estrategias empleadas en la solución al problema 1a y 1a’

Para hallar la cantidad de azúcar (**la’**) para los 6 litros de agua (3 botellas), varía un poco el uso de las estrategias respecto a la primera tarea (**1a**): El uso del valor unitario se dio en un 40.9% (27 profesores), mientras que en un 63.6% (42) en el 1a; el uso de la *regla de tres* tuvo una frecuencia de un 19.7 % (13) en comparación con el 1.5% (1) de la primera parte; el número de los que no muestran su estrategia fue de 24.7% (16) con un 22.7% (15) del *1a y*; aumentaron los profesores que no contestaron de 8 (12.1% en el *1a*) a 10 (15.1% en el *1a’*).

La aparición del uso de otras estrategias o el aumento de quienes no contestaron refleja que los profesores se vieron obligados a la búsqueda de otras formas de solución, las cuales pueden no haber sido conocidas por ellos, sino creados al momento o copiados del trabajo de algunos de sus compañeros. En el caso de la búsqueda de la cantidad de azúcar el hallar el valor unitario no resultó tan sencillo, lo que obligó a los sujetos a la búsqueda de variedad de recursos, lo cual es más visible en el análisis a detalle de algunos casos.

Análisis cualitativo de los procedimientos utilizados

Lo mostrado en los resultados cuantitativos, dejó ver que las estrategias utilizadas en el primer problema por los profesores fueron: el valor unitario y *regla de tres*, cada una con sus variantes.

Las estrategias utilizadas por los profesores al resolver problemas de razón y proporción ya están clasificadas por investigadores, sin embargo no todas emergen ante una clase de problema, sino que existe cierta dependencia con las características del problema y del conocimiento de los sujetos. Esta situación se refleja en lo hecho por los profesores a lápiz y papel y después narrado en la entrevista por los profesores participantes.

Valor unitario

La estrategia de valor unitario es hacer corresponder la cantidad por unidad para cualquiera de los dos términos de una razón, siempre y cuando se trate de una relación funcional o externa. Por ejemplo: de 10 litros de agua para 4 tazas de azúcar, puede obtenerse la cantidad de agua por cada taza o la cantidad de azúcar por cada litro. Sin embargo, Lamon llama *unidad de referencia* a un conjunto que se corresponde con otro, a partir del cual se construye la solución al problema. Es decir, se trata de un valor no estrictamente unitario, bien podrían llamárseles subunidades (p.ej. a 1/2 litro le corresponde 1/4 de taza de azúcar) o multiunidades (p. ej. 2 litros para 8 naranjas).

El *caso 6-C3* menciona que obtiene la cantidad de naranjas a partir de una división entre el número de naranjas y el de botellas (valor unitario).

Entrevistador (Ent): ¿Este ocho cómo lo sacó? (el 8 que puso en las botellas)

Entrevistado 1 (E1): (se queda pensando)

Entrevistado 2 (E2) ¡Yo si se! Mira, dividiste los cuarenta… dos….

E1. Eran sesenta y tantos

E2. Para sacar el ocho cada, cada…

E1. Porque estos cuarenta, cuarenta naranjas… lo dividí. Y cómo son cinco…

E2. Botellas

E1. Botellas, le pusimos ocho

E2. Cuarenta entre cinco(…)

E1: Eran 40 naranjas, entre cinco envases, les toca de a 8 naranjas por envase, que si fuera por litros, le tocarían 4 naranjas por litro… ¿no?

Ent: Umju…

E1: Ocho naranjas por dos litros… (Entrevista LUPVIA101105, pp. 2, 3).

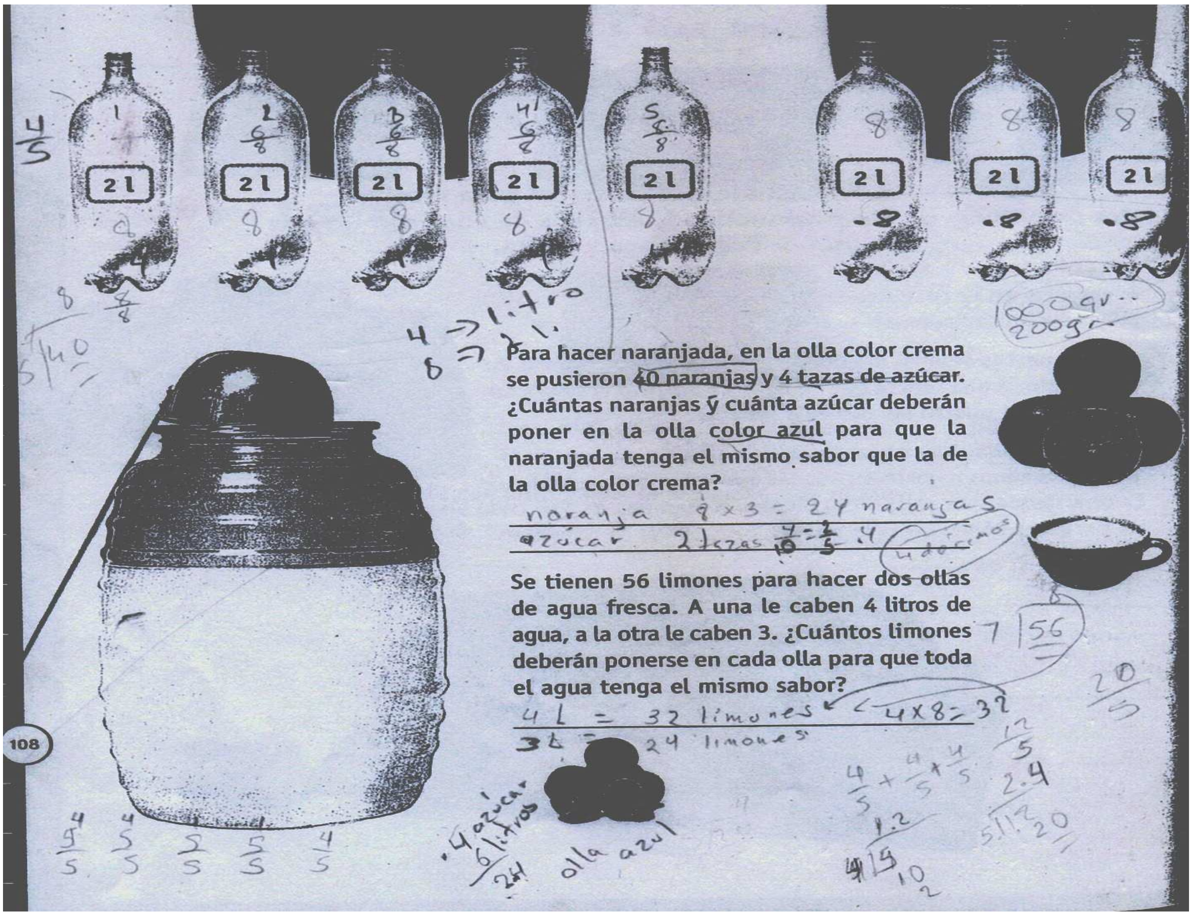


Figura 4. Procedimiento del caso *6-C3* al problema *a y a'*

En la *Figura 4* se muestra el procedimiento seguido por la profesora, vemos cómo coloca el número de naranjas que corresponde a cada una de las botellas, también coloca que 4 naranjas corresponde a un litro, es decir, obtiene el valor unitario por botella y por litro. A partir de la obtención del valor unitario de naranjas por botellas, realiza la multiplicación de 8 por 3 y así obtiene el número de naranjas que corresponden a la naranjada de la olla azul. De acuerdo a los planteamientos de Lamon (1996), la profesora obtiene dos unidades de referencia a partir de las cuales llega al resultado, pero sólo usa una: la primera relación es de un litro con su correspondiente cantidad de naranjas (4 a 1); la otra es una unidad compuesta de dos litros (una botella) con su correspondiente cantidad de naranjas (8 a 2), en el caso de esta maestra eligió el de 8 a 2.

Así como lo describe en la entrevista y lo muestra en el cuadernillo, no tuvo mayor dificultad hallar el resultado, pero también es evidente el amplio apoyo en la representación gráfica, el colocar la cantidad de naranjas en cada envase es una muestra del apoyo visual que necesita para deducir que la multiplicación es 8 por 3. La profesora da evidencia de saber que el valor unitario es la estrategia para hallar el valor perdido de la proporción. Esto lo consigue sin mayores dificultades puesto que la razón es entera.

En 8 de los 9 casos el procedimiento para obtener el valor unitario fue la división de las naranjas entre el número de botellas o litros, para luego ser multiplicado o sumado y hallar la cantidad de naranjas para la olla azul. Una diferencia entre los procedimientos fue que algunos se apoyaron colocando el número de naranjas en cada botella para luego sumar y otros sólo aplicaron el algoritmo de la multiplicación.

La situación cambió cuando se trató de hallar la cantidad de azúcar, ya que las razones implicadas eran fraccionarias, debido a lo cual se aplicaron una mayor variedad de estrategias y de recursos. Ante esta segunda parte del problema la estrategia del valor unitario ya no fue tan sencilla y aunque el razonamiento era correcto, los procedimientos y operaciones aplicados no resultaron del todo fáciles para hallar el valor buscado. Por tal motivo hubo casos que no dieron con la solución al problema.

En la *Figura 2* se mostró que el éxito en resolver el problema disminuyó al tratarse de hallar la cantidad de azúcar. El trabajo con razones fraccionarias (10:4, 5:4) resultó ser motivo de más errores y dificultades, lo que provocó la búsqueda de otros procedimientos y estrategias de solución. Aunque en el análisis de los datos del problema se evidencia la posibilidad de que los profesores hubieran considerado razones enteras, como podría ser la relación de naranjas con el azúcar (40:4), sólo fue tomada en cuenta en dos casos.

La estrategia de valor unitario, aunque menos, fue recurrente en la solución a la segunda parte del problema para hallar la cantidad de azúcar. Los casos ***6-C3 y 32-C3*** son ejemplos del uso de esta estrategia y así lo muestran en su cuadernillo y cuando se les preguntó sobre cómo llegaron a la obtención de la cantidad de azúcar:

> *E2*. ¡Umm, umju¡ … cuatro tazas de azúcar entre cuarenta naranjas, que serían. O también daría lo mismo cuatro tazas de azúcar entre, dos, cuatro, seis, ocho, ¡diez! (*contando los litros de las botellas*) Me sale a punto cuatro. Este es el azúcar, el azúcar va a ser cuatro décimos.
>
> *E1*. Umju.
>
> *E2*. ¿SI? Punto cuatro en decimales. (*Se cruzan las respuestas al mismo tiempo*)
>
> *E1*. Apenas cuatro décimos
>
> *E2*. O cuatro décimos. ¡Eso es Azúcar! Yo siempre uso mucho la división.
>
> *Entrevistador*: Y ya entonces, ¿cuánto es para la… qué cantidad es para ésta (*la olla azul*)?
>
> *E2*: Para esa son… este, cuatro décimos.
>
> *E1*: Pero cuatro décimos por uno (*botella*) ¿no? Más cuatro décimos, más cuatro décimos (*son tres botellas*)
>
> *E2*: Umju. ¡Por cada litro eh! Porque yo lo hice aquí por cada litro. Cuatro décimos cada…litro.
>
> *Entrevistador*: Pero aquí le pregunta por…
>
> *E1*. Por seis litros.
>
> *E2*: Entonces serían…
>
> *E1*: Serían dos tazas cuatro quintos. (ENTREVISTA LUPVIA101105, pp. 5,6).

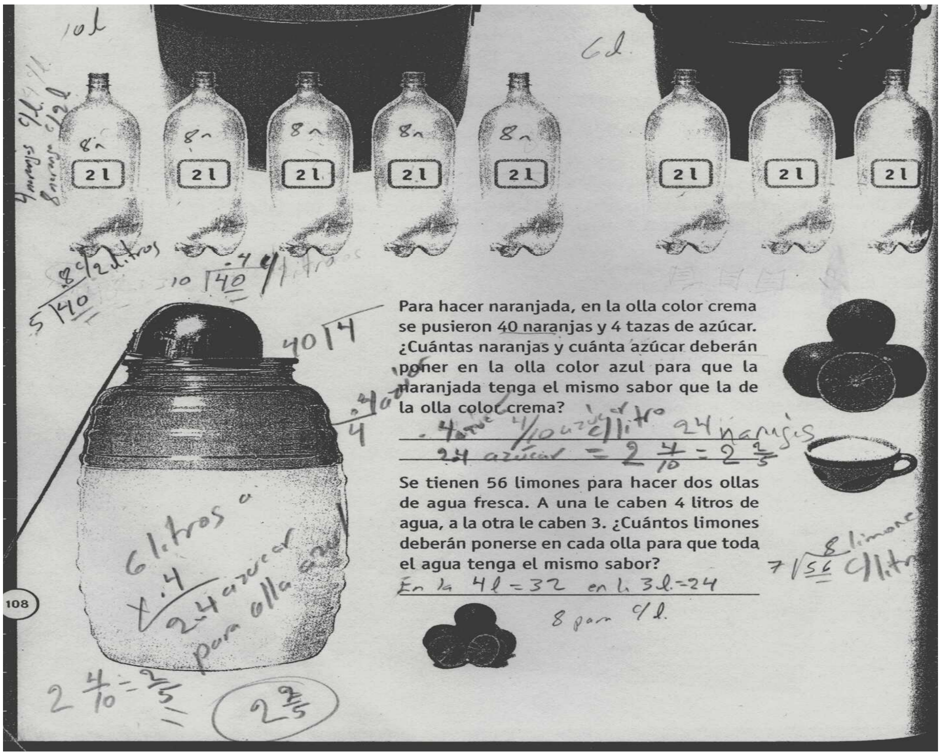


Figura 5. Procedimiento del caso *32-C3* al problema *a y a'*

La estrategia usada es el valor unitario y según se visualiza en la *Figura 5* y en lo que narra la profesora realiza dos divisiones en la parte inferior de las botellas, una para hallar el valor unitario de cantidad de azúcar por botella y también cantidad de azúcar por litro. Sobre la imagen del botellón de agua se aprecia la multiplicación de los 6 litros de agua de la olla azul por la cantidad de azúcar por litro. Luego el caso *32-C3* plantea haber convertido los decimales a fracciones, por lo cual el resultado lo escribe de manera decimal y en fracción.

E2. Serían dos quintos, ya pasándolo…serían dos quintos simplificando…

E1. No porque dos son dos tazas, namás que el cuatro ¿qué sería?

E2. Décimos. Dos enteros con cuatro décimos.

E1. ¿Por qué décimos?

E2. Por la ubicación. Yo siempre me ubico, décimos, centésimos, milésimos (señalando el valor posicional de los números decimales) y…así me ubico. ¿Cómo se llama la otra?

Entrevistador. Diezmilésimos.

E2. Diezmilésimos.

E1. ¿O sea que son décimos?

E2. Dos punto cuatro en decimal y dos punto cuatro en fracción… ésto es lo mismo. Esto es igual a dos…cuatro décimos, o es lo mismo, igual a dos quintos. Dos enteros con dos quintos. Esto y esto es lo mismo (*se refiere a las cantidades de 2.4 y 2 2/5*) ya simplificadas. (ENTREVISTA LUPVIA101105, pp. 7-8)

En el fragmento citado, mientras la profesora caso *32-C3* tiene claro el valor posicional de los decimales, la profesora caso *6-C3* no, por lo cual se muestra confundida ante lo hecho por su compañera. Esta dificultad, no relacionada con el razonamiento proporcional, es el representar en fracción los decimales, parece no comprender por qué punto cuatro es igual a cuatro décimos “No porque dos son dos tazas, ¿namás que el cuatro qué sería?”

Así como la profesora muestra dificultad en comprender la conversión entre decimales y fracciones, también dejó claro la dificultad de trabajar con unidades no convencionales: En la parte inferior de la olla azul (*Figura 4*) coloca unas cantidades en gramos, debido a que la profesora había convertido las tazas de azúcar a gramos, ya que señaló que en la cocina se ocupan tazas con capacidad de 250 gramos y como fueron cuatro tazas, entonces utilizaron un kilogramo de azúcar. Esa era la forma en que la profesora estaba resolviendo el problema, pero luego observó y escuchó el trabajo de otros, lo que la hizo cambiar su procedimiento. Esta explicación la dio la maestra en los días que se aplicó el cuestionario (cuadernillo), ya que comentaba con una compañera y me acerqué a escuchar.

Son 4 tazas de azúcar para 10 litros o 5 botellas, entonces para 6 litros o 3 botellas ¿cuánta azúcar es? Tras la experiencia de la maestra en los quehaceres de cocina, trata de trasladar el problema a un contexto cotidiano a ella. Las tazas no representan una unidad de medida para ella, por lo que cambia las tazas por gramos de azúcar. Este caso ejemplifica que el contexto del problema puede provocar conflictos para interpretarlo y resolverlo.

Un procedimiento distinto, pero con la misma estrategia de valor unitario, fue observado en el *caso 7-C3*, licenciada en educación por la UPN y con estudios de maestría. En el trabajo frente a grupo lleva un tiempo de 13 años, de los cuales 2 han sido con quinto grado y uno con sexto.

La profesora se valió de los dibujos (*Figura 6*) para representar los datos del problema. Utiliza el dibujo de las tazas para poder hacer el reparto y hallar la cantidad de azúcar por botella.

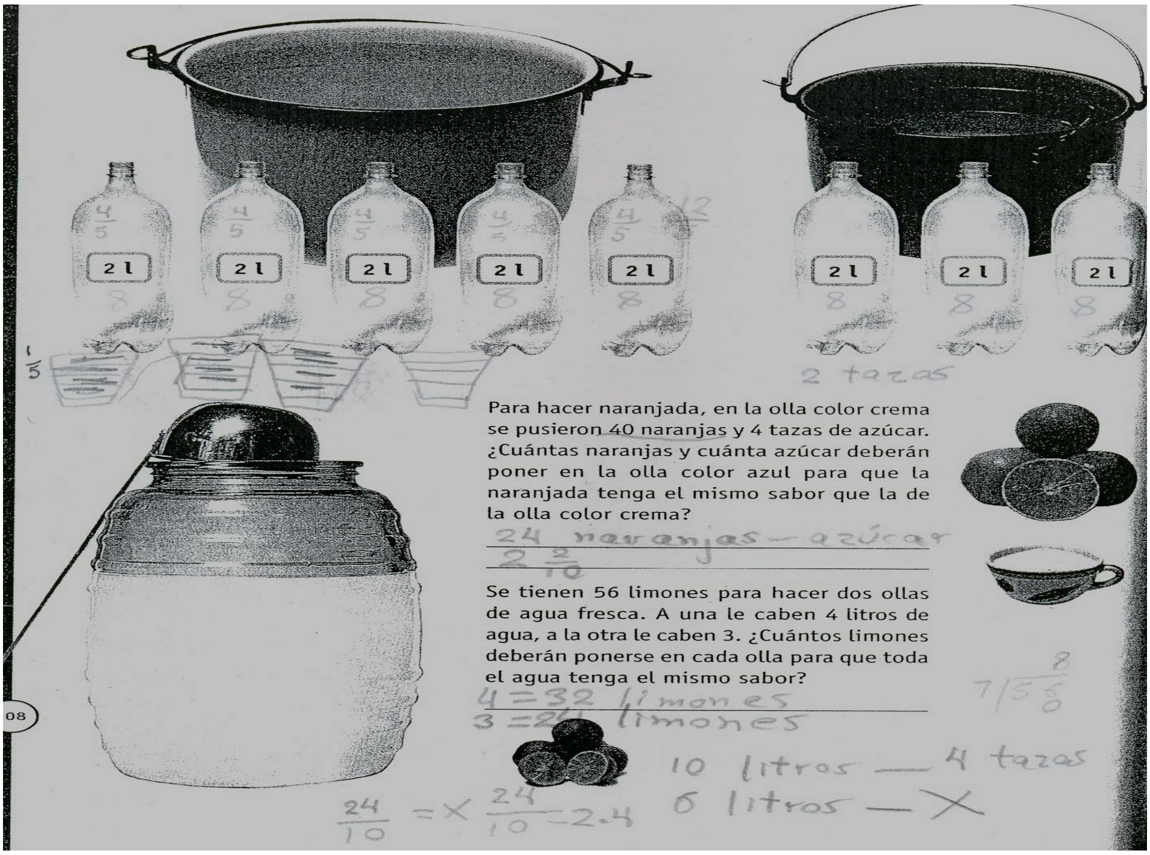


Figura 6. Procedimiento de *caso 7-C3* al problema *a y a'*

Entrevistador: Y usted maestra ¿cómo encontró?

Entrevistado 3 (E3): ¡Mire! Dos litros de agua le agregamos cuatro quintos de…azúcar.

Entrevistador. ¿Cuatro quintos de azúcar?

E3: Cuatro quintos de azúcar. Porque lo hicimos así en dibujito. Dibujamos nuestros cuatro…nuestras cuatro tacitas de…de azúcar, las dividimos en quintos, entonces fuimos repartiendo cada quinto para dos litros, nos tocaron de cuatro quintos. Entonces para esta…estos seis litros, pues igual le tuvimos que dar cuatro quintos a cada uno, y la suma de ellos nos da dos tazas, con este…dos quintos.

Porque aquí por ejemplo: un quinto, dos, tres, cuatro…para una; uno, dos, tres, cuatro…para otra.…a ver, a ver, a ver…sí…sí, sí, sí, sí…a ver, a ver…a ver…bueno el asunto es que…uno, dos, tres, cuatro, para un litro; uno, dos, tres, cuatro…quintos para otro litro; uno, dos, tres, cuatro… quintos para otro litro. Entonces juntando: uno, dos, tres, cuatro, cinco, hasta aquí tenemos una taza ¿no?… hora… tres quintos más dos…tenemos…forman otra taza y le sobran dos quintos. Entonces sería dos tazas con dos quintos.

Y aquí (en su respuesta) le escribí dos décimos ¿no? Entonces aquí debo de escribir el cin…el…para representar el dos quintos es el cinco ¿no? (ENTREVISTA NORERI111105, p. 4)

La profesora divide cada taza en cinco partes, a partir de la división gráfica de cada taza. Con el apoyo de los dibujos realizados observa que a cada botella (dos litros de agua) le tocan 4/5 de taza de azúcar. En la *Figura 6* se muestra cómo remarca los doce quintos que corresponden a las tres botellas de la olla azul, y en su narración menciona la reagrupación que hace, lo que le da el resultado de dos tazas con dos quintos de taza (2 2/5), sólo que se equivocó al poner el resultado y colocó dos décimos. Conociendo la cantidad de azúcar por botella bien pudo haber multiplicado el valor unitario por tres, pero realiza un procedimiento aditivo: Subraya cada porción de taza de azúcar por botella y luego cuenta el total de las porciones subrayadas, de lo cual va integrando enteros (tazas de azúcar). Es así como obtiene el resultado de 2 tazas con 2/5 de azúcar para las 3 botellas de agua (6 litros). En el proceder de esta profesora se evidencia un razonamiento proporcional válido, así como un conocimiento de la representación gráfica y escrita de las fracciones, sin embargo, existen limitantes para hallar un valor unitario cuando es fraccionario y necesita de un apoyo más concreto como los dibujos. Por otro lado, la maestra no opera con las fracciones, sino que mediante agrupamientos y conteo llega a la solución, lo que evidencia un pensamiento más aditivo que multiplicativo.

En la parte inferior de la *Figura 6* puede apreciarse la aplicación de la *regla de tres*, sin embargo, en la entrevista mencionó que lo hicieron después de haber realizado el primer procedimiento porque un profesor les dijo.

> *E3*: Creo que pasó un compañero…pasó alguien y…y por eso este…anoté esto (la *regla de tres)* después del procedimiento, aja, y coincide con lo que ellos hicieron… (Entrevista NORERI111105, p. 5).

Otro procedimiento de valor unitario es el ***caso 15-C2***, entrevistado 8, profesor con 25 años de experiencia y con experiencia en 5to y 6to grados los últimos años. En la resolución del problema pone en juego una relación diferente a las de los casos anteriores. Lo regular fue trabajar la relación azúcar/agua, pero este caso relacionó naranjas con azúcar (40:4), sin embargo obtuvo un resultado impreciso debido a la carencia de procedimientos algorítmicos y desconocimiento de lo que representan algunas fracciones.

En la *Figura 7*, bajo las botellas de la olla azul, es notoria la relación puesta en juego, la unidad con la que decide trabajar es con la de naranjas por taza (10 a 1), con esta relación el profesor evita de entrada el trabajar con fracciones, sin embargo más adelante debe enfrentarse a ellas. En la entrevista plantea el procedimiento seguido bajo esa relación, donde se identifica de forma clara las dificultades a las que se enfrentó al hacerlo de esa manera.

> *Entrevistado 8 (E8).* (Se queda pensando) … ¡ya! ¡Aquí está! ¡Mire! 8 por 3, 24.
>
> *Entrevistador*. A ver, 8 qué, cuáles 8.
>
> *E8*. 8 naranjas
>
> *Entrevistador*. Ah sí, 8 naranjas de… cada… por 3 litros son 24 naranjas.

E8. Ajá, son 24 naranjas. Son 10 y 10, 20 y aquí no… al otro 10 no… no le pude… e… por decir… estos diez no le pude llegar a la mitad, entonces nada más le puse un cuarto, supuestamente, porque eran otras 8 naranjas, no se por qué…

Entrevistador. ¡Ah ya! Lo sacó por la aproximación… de los datos numéricos de… 10 naranjas, 20 naranjas, la siguiente eran 30 naranjas, entonces aquí le ajustó.

E8. No, eran 4 naranjas nada más, 3 por 8, 24, entonces 10 y 10, 20 y a éste (el 4), tiene que ser 24. Entonces… la mitad sería… media taza, pero como no llega ni a la mitad, entonces yo le aproximé un cuarto nada más. Porque no hice registro, nada más lo fui sacando de la pura mente.

Entr. Ah, entonces usted está relacionando 24 naranjas con 2 un cuarto. Los ente… las… unida… las decenas con 2 tazas y el resto… de las unidades que quedan de naranjas con un aproximado de tazas…

E8. … un cuarto porque no llegó ni a la mitad de la otra taza. Como ahorita yo lo hago en mi mente, ya me acostumbré a que… no está para saberlo ni yo para contarle… trabajo también con mi esposa de ayudante de panadero y manejamos todo de los precios… (Entrevista OFEFER111105, pp. 6-7)

El profesor consideró la relación entre las 40 naranjas con las 4 tazas de azúcar, entonces tendría que hallar la cantidad de tazas de azúcar para 24 naranjas, resultado obtenido en el apartado **1a** del problema. De esta manera evitó el trabajar con la razón fraccionaria de relacionar las botellas o litros de agua con las tazas de azúcar, como sucedió en la mayoría de los casos, sin embargo, no le resultó la mejor relación para sus conocimientos.

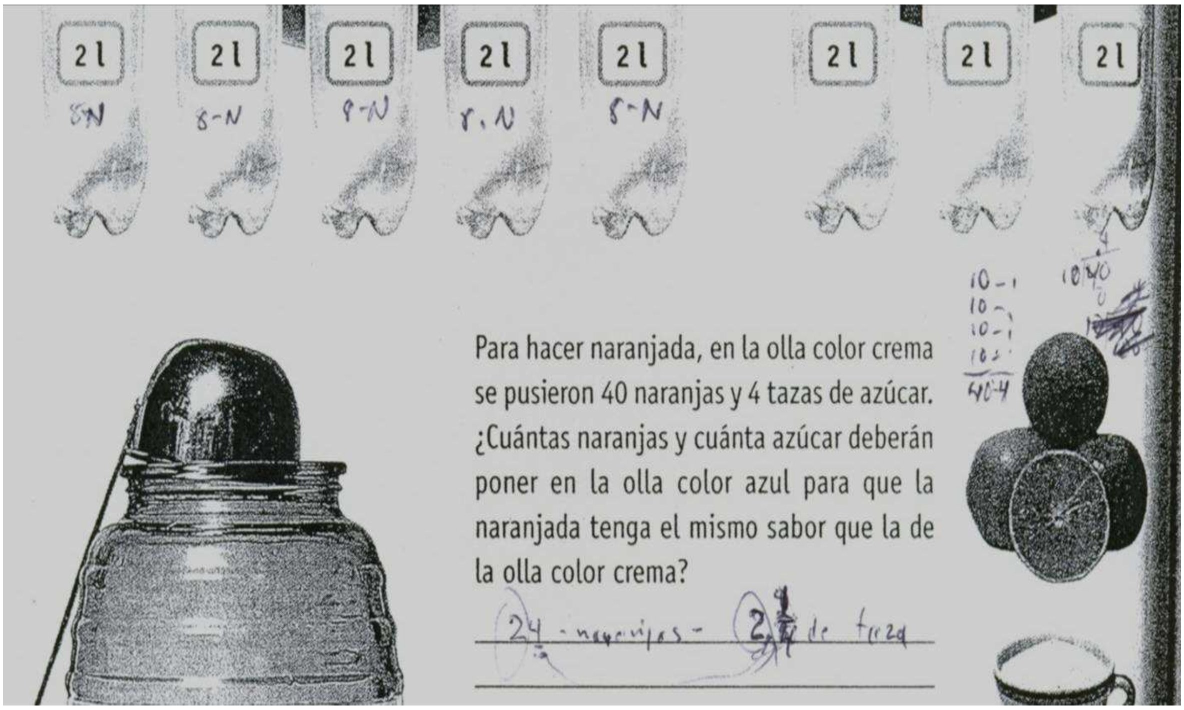


Figura 7. Procedimiento del caso 15 C2 al problema *a y a'*

Una vez seleccionado la relación que le pareció conveniente, obtuvo el valor unitario de 10 naranjas por taza de azúcar, sin embargo este valor no le resultó el idóneo para resolver el problema, es decir, operar con este valor unitario (10 naranjas/taza) no lo llevaba a hallar el valor perdido mediante la suma sucesiva –como suele acostumbrarse- o bien, multiplicar por un entero, ya que para eso debió hallar el valor unitario de naranjas por azúcar (1/10 taza/naranja). Veamos, en la entrevista el profesor argumentó que a una taza de azúcar le corresponden 10 naranjas, entonces para dos tazas son 20 naranjas, el conflicto vino cuando trató de hallar la cantidad de azúcar para las 4 naranjas restantes, ya que su valor unitario no encajaba exactamente como sucedió en el apartado **1a** del problema, donde si encajaba exactamente (8:1::x:6). Ante tal situación el profesor dio a entender que si fueran 5 naranjas le correspondería media taza de azúcar, pero como tiene 4, es decir, menos de la mitad, debería ser ¼ porque para él puede ser la fracción más aproximada y que se correspondía con las 4 naranjas.

El razonamiento proporcional del profesor es correcto, sin embargo, presenta dificultades en la interpretación y operación de fracciones, lo cual es visible en el momento en que no puede indicar qué fracción de 10 es 4. Ante esta manera de proceder es evidente que no siempre el valor unitario, aun siendo entero, es la mejor estrategia cuando al sumarlo repetidamente o multiplicarlo por un entero lleva al valor perdido. Por otro lado, resulta esclarecedor que el uso de fracciones es causa de mayor dificultad para hallar la solución a un problema de proporción, aún cuando el razonamiento sea correcto.

En otro sentido, aunque la estimación es una herramienta necesaria en la resolución de problemas, ya que permite ponderar el resultado final, no es suficiente para llegar a su solución, se necesitan herramientas algorítmicas, como lo evidencia el caso de este profesor. Con claridad desarrolla un razonamiento proporcional de la relaciones entre los datos del problema, pero no llega a su solución. La carencia de procedimientos algorítmicos no le permitió dar certidumbre a sus estimaciones, a lo que representa 4 de 10 en este caso: Las estimaciones que hace el profesor es que 4 casi es la mitad, pero falta un poquito, lo cual lo lleva a elegir una fracción menor (1/4) que resulta ser mucho menor. El profesor sabía que para llegar a la mitad le faltaba sólo una naranja, y la fracción que elige es 1/4, que es la mitad de un medio, esta situación refleja dificultades del valor y tamaño de las fracciones.

Comparado con los casos precedentes, el profesor también hace uso de la estrategia de valor unitario, aunque con variantes. Por ejemplo el caso *7-C3* obtiene el valor unitario (4/5 botella/azúcar) de azúcar por botella a partir de dibujar las cuatro tazas de azúcar y dividirlas en cinco partes, luego sumar tres veces el valor unitario y así obtener la cantidad de azúcar para 3 botellas (4/5:1::X:3). Vemos que en este caso el valor unitario sumado tres veces daba exactamente la respuesta; pero con el *caso 15-C2* fue distinto, obtuvo la cantidad de naranjas por taza de azúcar (10:1), valor con el cual obtenía duplicando el valor unitario o multiplicando por un factor entero (10:1::24:X). Para que el valor unitario hubiese funcionado como lo esperaba el, debió obtener la cantidad de azúcar por naranja. Ahora bien, si hubiese obtenido el valor unitario de agua por taza de azúcar también se hubiesen encontrado con dificultades, ya que el valor sería fraccionario. Esta comparación da un ejemplo de que debe saberse obtener el valor unitario adecuado, no cualquier relación de valor unitario es la más apropiada, o bien puede no ser tan importante la utilización de cualquier valor unitario si se sabe operar con él.

Un procedimiento similar (*Figura 8*) lo utilizó el caso ***27-C3***, quien no fue entrevistado: con estudios de licenciatura en educación primaria y nueve años de experiencia. En este caso el profesor se valió de una tabla donde registró la cantidad total de naranjas, repartiendo de diez naranjas por taza de azúcar, el procedimiento fue semejante al del entrevistado 8, pero en este profesor sí identificó lo que representaba cada naranja.

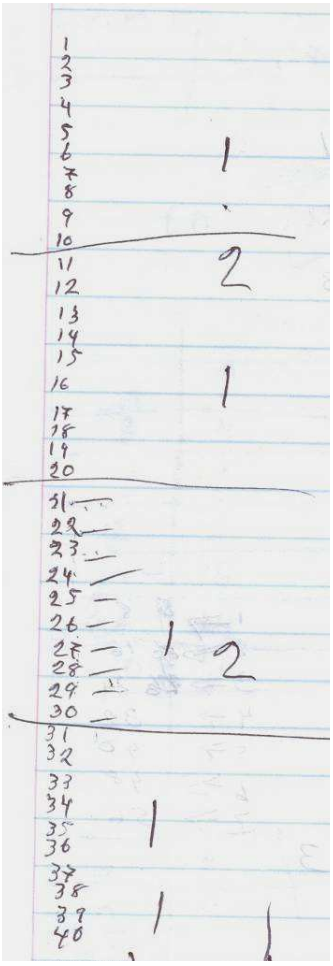


Figura 8. Procedimiento del caso 27- C3

En el procedimiento puede apreciarse el trabajo de separación que va haciendo de 10 en 10, durante la aplicación del cuestionario mencionó que cada naranja representaba un décimo de taza de azúcar, entonces a 4 naranjas le correspondían

4/10 de tazas azúcar, por lo tanto, para 24 naranjas correspondía 2 tazas de azúcar más 4/10 más.

El procedimiento de otro profesor no entrevistado, *caso 1-C2*, trata de identificar el valor unitario (*Figura 9*), y para tal objetivo muestra varios intentos, pero se evidencian claras dificultades para identificar las relaciones de una proporción.

En la *Figura 9* se distingue el procedimiento de este profesor, quien realiza un intento fallido para hallar la cantidad de azúcar mediante el valor unitario. El profesor parte de subdividir las 4 tazas de azúcar en cuartos, de lo que obtiene 16/4. Enseguida construye una tablita donde establece que a cada ½ litro de agua le corresponde ¼ de taza de azúcar, entonces para los 6 litros de agua de la olla azul le corresponden 12/4, es decir, 3 tazas de azúcar.

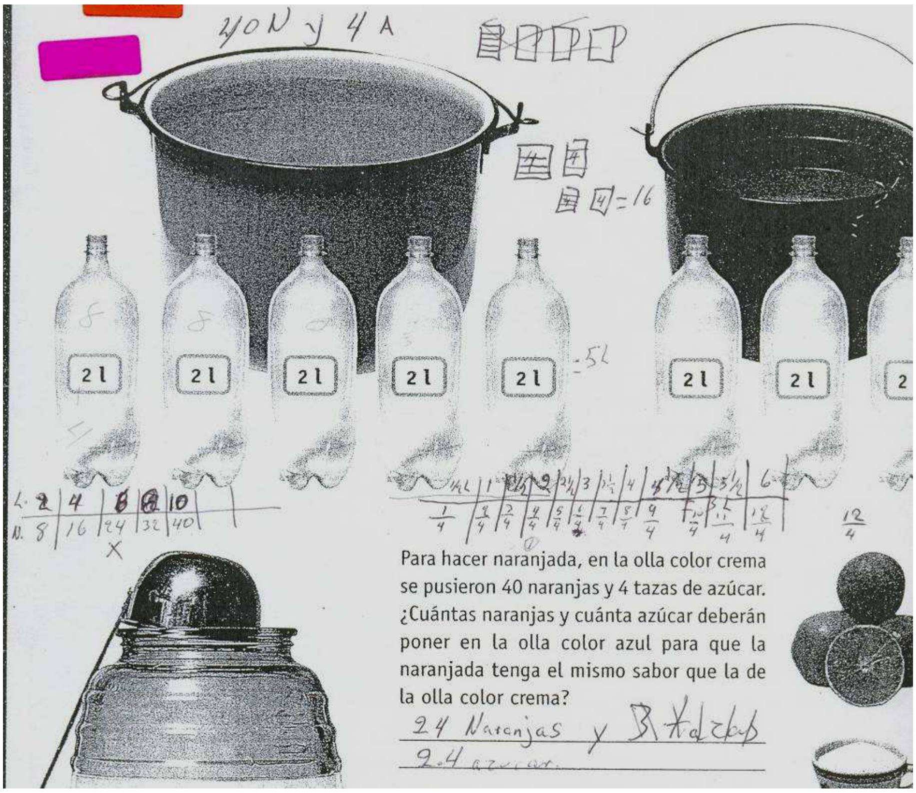


Figura 9. Procedimiento del caso 1-C2 al problema 1a y 1a'

En este procedimiento se distingue que la unidad de referencia construida (1/2:1/4) puede no estar basada en una razonamiento proporcional porque el valor unitario es obtenido de una decisión aparentemente arbitraria (estimación) de dividir las tazas en cuartos, porque no pone en juego los términos dados en la primera relación (5:4 o 10:4), que es de donde pudo haber obtenido el valor unitario. Otra observación sobre el procedimiento del profesor es la necesidad de apoyos gráficos para interpretar el problema, también la forma aditiva en que trabaja con los números utilizados.

Un caso más, de una profesora no entrevistada, es el *22-C2*, quien aplicó un procedimiento similar al caso anterior (*Figura 10*). El razonamiento de la profesora es querer descubrir el valor unitario, pero carece de herramientas que la lleven a tal fin, por lo cual mediante estimación intenta hacer el reparto de las tazas de azúcar entre las botellas. Es decir, la profesora sabe que para resolver el problema debe conocer la cantidad de azúcar que le corresponde a cada botella. Pero desconoce algoritmos para hallar tal valor unitario, puesto que se trata de una razón fraccionaria, entonces recurre al uso de dibujos y estimar fracciones de las tazas, en este caso cuartos, que puedan repartirse entre las 5 botellas. Con tal procedimiento no logra hallar el valor unitario de azúcar por botella de agua.

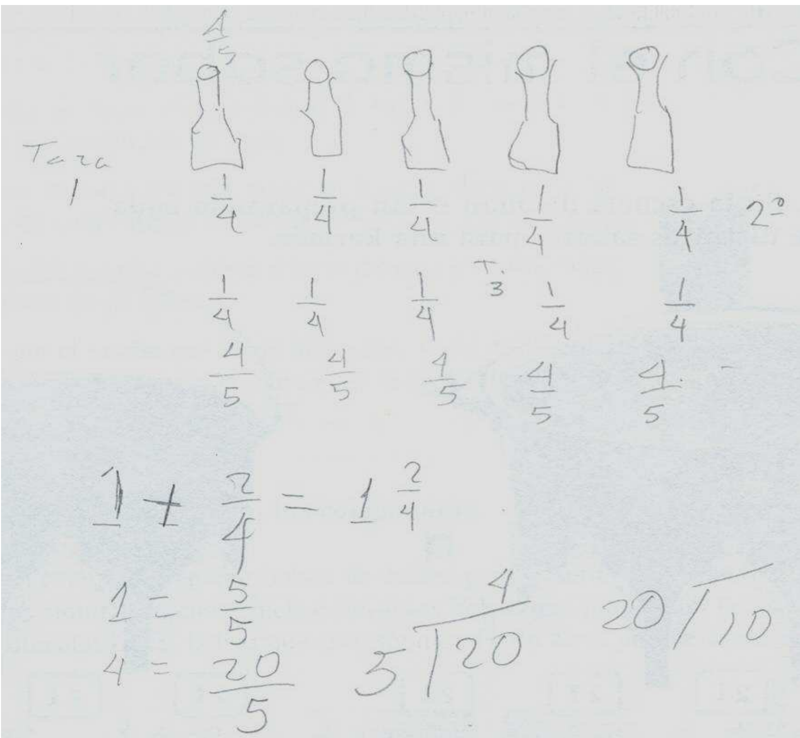


Figura 10. Procedimiento del caso 22-C2 al problema *a y a'*

Después comienza a trabajar con el valor unitario de 4/5 de taza por botella, pero no es evidente la obtención de tal valor, también realiza algunas operaciones con ese valor unitario sin llegar al resultado esperado. Sin embargo, en el cuadernillo coloca una respuesta correcta, por lo que se duda de su autenticidad.

Una variante más en la estrategia de valor unitario corresponde a algunos profesores (no entrevistados) quienes intentaron hallar la cantidad de azúcar por litro mediante particiones por la mitad, pero el procedimiento para llegar no les resultó eficiente. El proceso fue mediante la partición por mitades: a 10 litros de agua le corresponden 4 tazas de azúcar; a 5 litros, 2 tazas; a 2.5 ó 2 1/2 litros, 1 taza; a 1 1/4 litros, 1/2 taza y hasta ahí se quedaron, no pudieron hallar el valor unitario esperado, la cantidad de azúcar por botella. Mediante este procedimiento intentaron hallar la cantidad de azúcar por litro, lo que resultó ineficaz, ya que con dividir sucesivamente las cantidades (5:4) por mitad no llegaba a la cantidad unitaria de azúcar por litro. Estos casos son un ejemplo más que muestran un razonamiento correcto para resolver el problema, pero lo que les impide resolverlo es la falta de herramientas algorítmicas o gráficas.

En esta forma de proceder, seguido por algunos profesores, para hallar el valor unitario mediante la división por mitades, muestra que la división por mitad es la forma de hallar cantidades proporcionales, así como bien podría ser duplicar en el caso inverso. Esto es evidente en la *Figura 11*, que se trata del *caso 25-C2*, profesora de segundo ciclo, donde se ve su intento por hallar el valor unitario de azúcar por litro de agua.

Partiendo de donde se quedó la profesora (a 1 1/4 litros le corresponde 1/2 taza de azúcar), para hallar el valor unitario debió haber quitado 1/4 de litro a 1 1/4 litros, para lo cual tendría que identificar qué parte representa ese cuarto de 1 1/4 y de ahí poder quitarle la cantidad proporcional a 1/2 taza de azúcar. La fracción 1/4 de litro es 1/5 de 1 1/4 litros, entonces tendrían que haber quitado 1/5 de 1/2 de taza de azúcar, lo que daría 4/10 de taza. Pero este camino aún resulta más complejo.

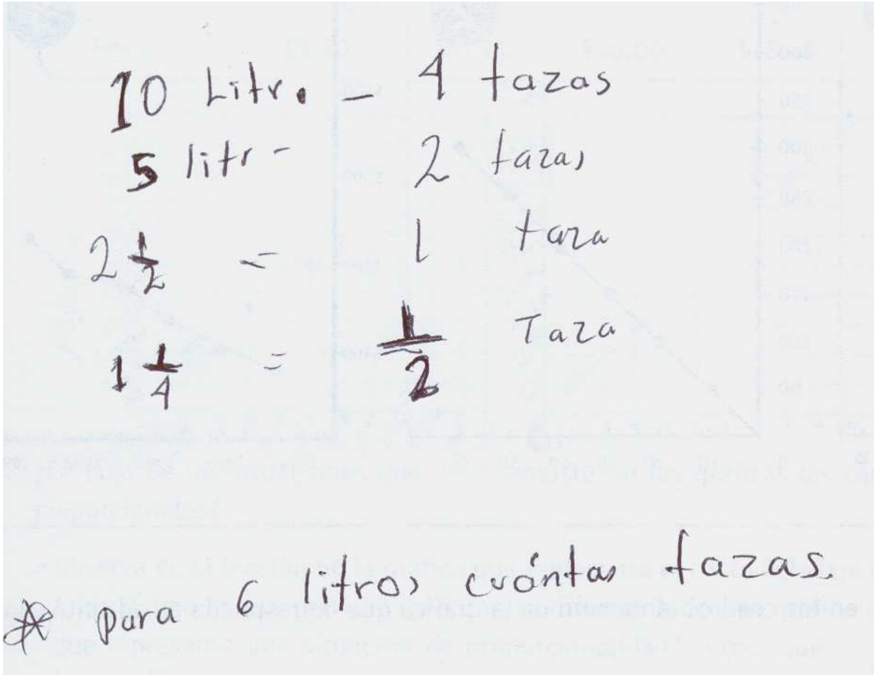


Figura 11. Procedimiento del caso 25-C2 al problema *a y a '*

Regla de tres

Esta estrategia consiste en la aplicación directa del algoritmo para hallar lo que se conoce como la cuarta proporcional o el valor faltante en una proporción (A/B=x/C, entonces x=A*C/B). La aplicación del algoritmo no significa un razonamiento proporcional, como Lesh, et al. (1988) lo mencionan, ya que, en algunos casos, es sólo la aplicación del algoritmo sin comprensión de su razón de ser, por tanto, puede o no existir razonamiento proporcional en su aplicación.

El caso 33-C3, entrevistado 5, aplica la *regla de tres* para resolver el problema. Se trata de un profesor con 3 años de servicio, estudia la licenciatura en educación primaria en la UPN, realizó 7 semestres de estudios de ingeniería. Este profesor en el procedimiento de solución combinó varias estrategias: el valor unitario, *regla de tres* y álgebra para dar la solución al problema.

En la *Figura 12* se muestra la tabla realizada por el profesor, en la parte inferior de la imagen hace uso de la *regla de tres* para hallar el valor unitario, tanto para la cantidad de naranjas por cada botella (dos litros), como para la cantidad de azúcar por botella (dos litros), a partir del cual construye una tabla de variación proporcional con el objetivo de obtener el resultado final.

Entrevistado 5 (E5): Hice una tabla de variación proporcional… pues ya acá (*en la tabla que hizo*) por ejemplo dice: 10 litros, dos, cuatro, seis, ocho, diez litros ¿sí? Y 40 naranjas, aquí son 40 naranjas, primero los datos ¿no? 4… 4 tazas de azúcar, de ahí busco mi constante de proporcionalidad, ya acá (*el seis de la tabla*) tengo seis… litros, que son estos 6 litros de acá (*las botellas de la olla azul*), entonces los seis litros de acuerdo a la constante de proporcionalidad me da 24 y me dio 2.4 tazas… tazas de azúcar (…)

E5: Lo que pasa que esto se obtuvo desde acá (señala las operaciones que están debajo de la tabla) en ese sentido acá…, diez, o sea por *regla de tres* simple.

Entrevistador: Pero aquí (en la regla de tres) ¿qué significa esto, diez qué?

E5: 10 litros, 10 litros equivalen a cuarenta… cuarenta naranjas…

Entrevistador: Y este, dos….

E5: dos… entonces dos litros a cuántos equivaldrán, entonces son 8 naranjas, a 8 naranjas que son estos ocho que están acá (el 8 encerrado con el círculo)… (Entrevista ABEJOR101105, p. 2-3).

Con el algoritmo de la *regla de tres* se puede llegar al resultado final de forma directa, sin embargo, en ocasiones no sucede así, sino forma parte de un paso en un procedimiento más largo. El caso **33-C3** es un ejemplo de esa forma de proceder, hace un uso reducido de la *regla de tres*, ya que lo aplica sólo para hallar el valor unitario de cantidad de naranjas y azúcar por botella de agua, a partir de los cuales construye la tabla de variación proporcional (*Figura 12*).

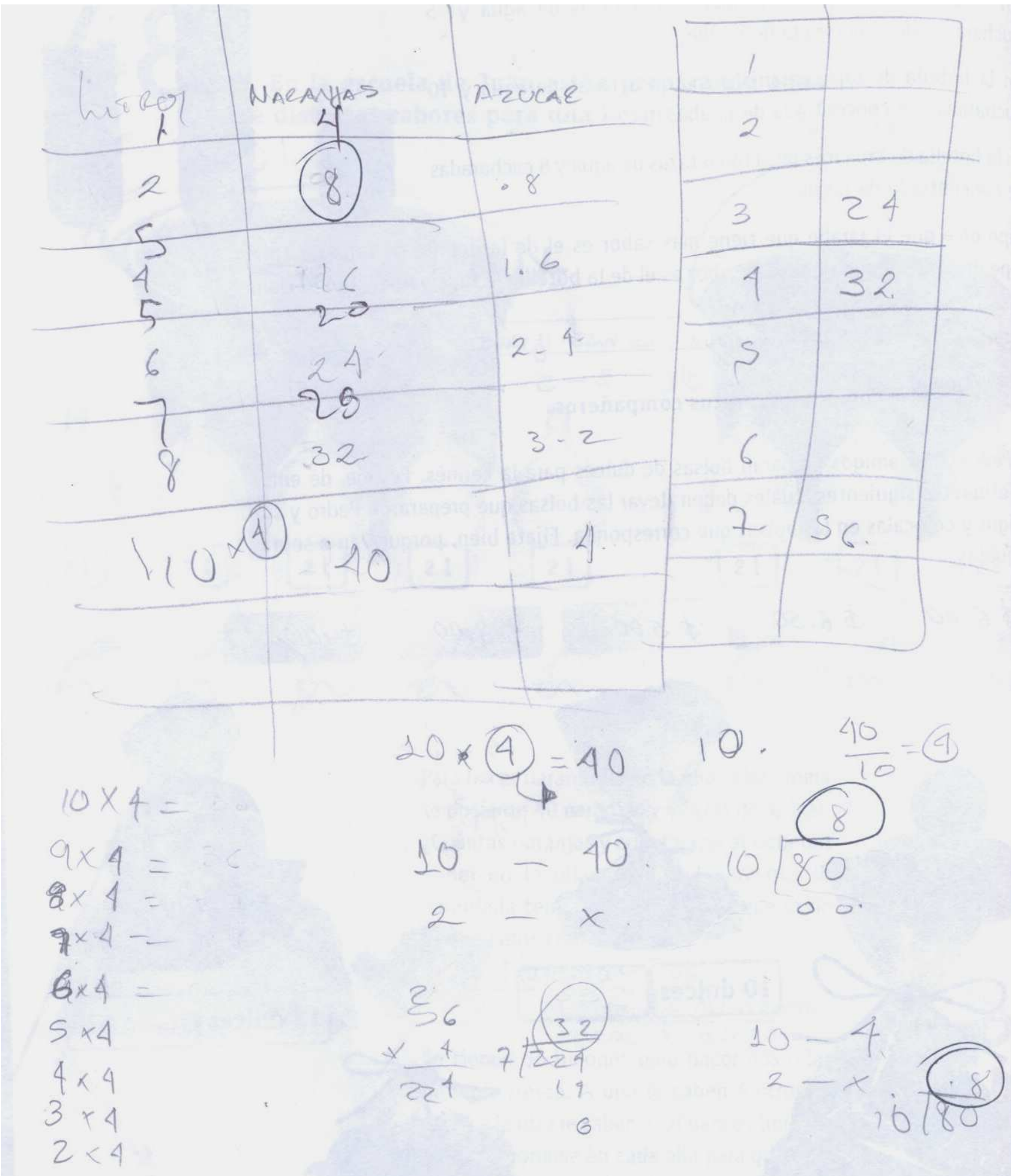


Figura 12. Procedimiento de 33-C3 al problema *a y a'*

E5. aja si, 10 litros son… son a 4 tazas de azúcar, entonces este… entonces 2 litros ¿cuántas tazas de azúcar equivalen? Que me da también punto ocho, y de ahí empieza a derivar este…

Entrevistador: Ya dices para dos, para cuatro, para seis.

E5. … para ocho, para diez…. Entonces aquí (*en el 6 de la tabla que construyó*) es donde empatan estos, que son seis litros. Para que este tenga el mismo sabor que este, esta debe tener 6 litros (*se refiere a las ilustraciones de las ollas*) ¿si? Debe tener 24 naranjas

Entrevistador: Y de azúcar…

E5: y dos punto cuatro tazas de azúcar… (Entrevista ABEJOR101105, p. 3)

El profesor también aplicó un procedimiento semialgebraico (*Figura 13*), ya que sólo usa el álgebra en una parte del problema. Este es el único caso que hace uso de algebra para resolver el problema, lo que refleja un conocimiento amplio de algoritmos.

En el procedimiento mostrado en la *Figura 13* (parte inferior izquierda) se puede deducir la forma de razonar del profesor. Primero plantea que existe una cantidad cualquiera de azúcar para cada botella (2 litros de agua), y juntando las 5 partes de cada botella deben ser las 4 tazas de azúcar, por lo tanto si multiplica el número desconocido ***y*** por 5 debe darle 4, de ahí la ecuación planteada: y * 5 = 4. Hace el despeje correspondiente y obtiene que tal número desconocido es la fracción 4/5.

Después del procedimiento para hallar el valor unitario de azúcar por botella de agua, verifica que en realidad juntando la cantidad de azúcar para cada botella de como resultado 4, entonces multiplicar 2 * 4/5, 3 * 4/5, 4*4/5 y 5*4/5. El proceso de verificación que realiza el profesor le ayuda a estar más seguro de que el número hallado es el valor unitario que buscaba, para así construir la tabla de variación proporcional.

Otra consideración de este caso es que después construye la tabla para tener más confianza en su resultado, convierte las fracciones a decimales, lo que bien podría ser para comparar con el primer procedimiento (*Figura 12*), donde utiliza decimales.

Para que el procedimiento fuera algebraico debió plantear, después de hallar el factor de proporcionalidad, la igualdad correspondiente: 4/5=x/3, entonces x=3*4/5 = 12/5. Comprobando la igualdad tenemos que 4/5=12/5 ***/*** 3 y realizando la operación correspondiente tenemos que 4/5=4/5.

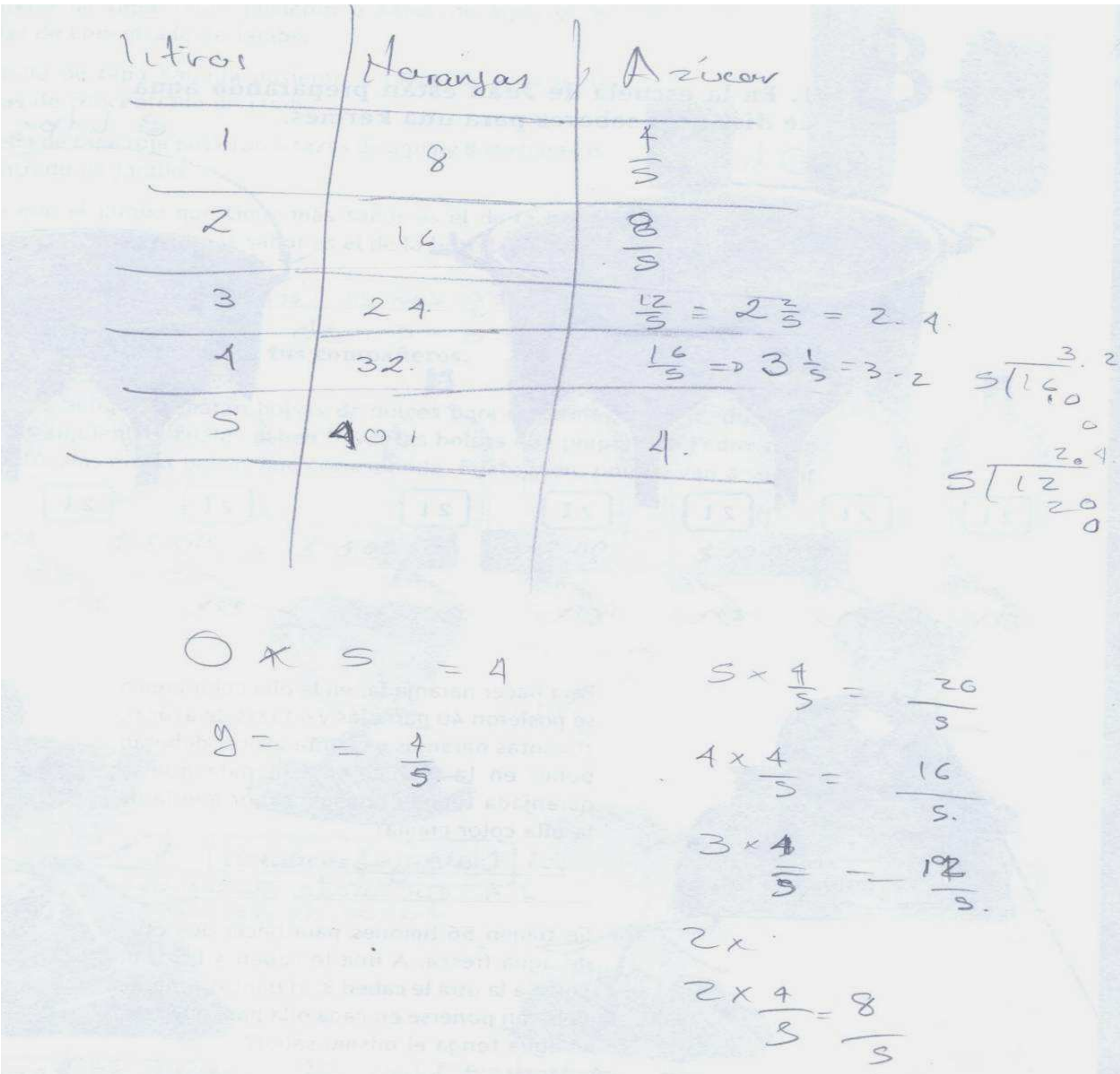


Figura 13. Procedimiento del caso 33-C3 al problema *a y a'*

Aunque el valor unitario y el factor de proporción coincidan, tienen significativas diferencias en la interpretación cognitiva de los sujetos. El uso del valor unitario (4/5) utilizado en casos 7-C3 y 33-C3 dan cuenta de esta situación. Estos profesores interpretan la fracción 4/5 como cuatro quintas partes de una taza corresponden a una botella de agua, y no como el factor que relaciona los dos términos de la razón, lo que posibilitaría un avance en la comprensión y desarrollo del razonamiento proporcional, es decir, pasarían de un procedimiento aditivo a uno multiplicativo. Entonces, aunque el número que representa el valor unitario sea igual a la razón y al factor de proporcionalidad no son lo mismo, la diferencia radica en cómo sea considerado por el sujeto.

Al comienzo de esta sección de análisis cualitativo el *caso 6-C3* presenta dificultades con la comprensión de las unidades utilizadas en el problema (tazas), en este caso 33-C3 se identifica de nuevo la dificultad en comprender el significado de ellas. Por ejemplo, aunque el profesor fue exitoso en hallar la respuesta al problema, presenta dificultades al momento de interpretar lo que significa la fracción decimal del número 2.4 (respuesta al apartado **1a'**). El profesor señala que el 2 son la cantidad de tazas de azúcar y que **.4** significan 4 cucharadas, pero tras la intervención del otro entrevistado, quien indica que son fracciones de la tazas, cambia su postura de acuerdo con él.

> *Entrevistado 6 (E6).* …con 40 naranjas tu haces… o tu ocupas 4 tazas de azúcar, hacemos una *regla de tres* simple, y con 24 naranjas cuánto tendrías, por eso multiplicamos: 4 por 24, 96. 96 entre 40, toca a 2.4. Serían 2.4 tazas de azúcar, no gramos. O sea 2 tazas y un cu… y punto cuatro…
>
> *E5*. Cucharadas, cucharadas
>
> *E6*. … no es tampoco la mitad, es tantito abajo.
>
> *Entrevistador*: ¿Esas son cucharadas?
>
> *E5*. Punto cuatro cucharadas, sale cuatro… cuatro cucharadas.
>
> *E6*. ¡Tazas¡
>
> *E5*. ¿O es por tazas?
>
> *E6*. Cuatro punto cuatro tazas ¡pues! De las… o sea la taza, la taza es la unidad de medida… (Entrevista ABEJOR101105, p. 4)

A diferencia del caso *7-C3*, que busca la conversión a gramos en base a su experiencia en los quehaceres culinarios, este profesor lo hace a cucharadas, lo que hace suponer que esta dificultad que presentan los profesores puede ser debido al uso de unidades no convencionales, es decir, no identifican a la taza como unidad de medida. Ahora bien, en el caso del entrevistado 5 evidencia su razonamiento que a mayor cantidad corresponde una medida mayor (tazas) y a menor cantidad una medida menor (cucharadas), lo cual es cierto, pero en este caso que se trató de una medida no convencional, la cual no puede funcionar de esa forma puesto que no hay equivalencias establecidas. Esta forma de pensar podría deberse a la transferencia de experiencias similares, por ejemplo: cuando tenemos 1.25 metros, podemos decir que tenemos un metro con dos decímetros y cinco centímetros, o bien un metro con 25 centímetros. Esto no tiene que ver directamente con el tema de razón y proporción, pero es de importancia en lo que concierne a la comprensión del significado de los datos numéricos de un problema y que puede ser la causa de no resolverlo.

Otro profesor que aplica la *regla de tres* es el *caso 15-C3* (*Figura 14*), con 15 años de experiencia como profesor, realizó estudios de licenciatura en educación primaria y de maestría. Este profesor, para resolver el problema **1a’** aplica la regla de tres. Sin embargo, existe una diferencia en su aplicación en comparación con el caso anterior: este último sólo la utiliza para hallar el valor unitario y el caso VI la utiliza para obtener el resultado final:

> ***E6***. Lo que pasa es que…aquí… aquí las 24 naranjas…
>
> …cada 2 litros ocupamos 8 naranjas, entonces si queremos 6 litros, entonces necesitamos… 8 naranjas para 2 litros, en total serían… 3 por 8, 24. Eso sale en relación a las botellas de acá… sale el 24… y luego para saber que tanto de… de azúcar le vas a poner, pues sería 40… con 40 naranjas tu haces… o tu ocupas 4 tazas de azúcar, hacemos una *regla de tres* simple, y con 24 naranjas cuánto tendrías, por eso multiplicamos: 4 por 24, 96. 96 entre 40, toca a 2.4. Serían 2.4 tazas de azúcar, no gramos. O sea 2 tazas y un cu… y punto cuatro… (Entrevista ABEJOR101105, p. 1)

En la descripción hecha por el profesor señala que utiliza la estrategia de valor unitario para hallar la cantidad de naranjas en el problema *1a***,** semejante a como la utilizaron otros profesores. Respecto a hallar la cantidad de azúcar utiliza la regla de tres, donde establece la relación de azúcar con las naranjas, a diferencia de como sucedió en la mayoría de los casos que relacionaron el azúcar con el agua. Sin embargo, es difícil profundizar más en el razonamiento proporcional seguido por el profesor ya que sólo aplica el algoritmo de la regla de tres.

A pesar de que el uso de tal estrategia no es garantía de un razonamiento proporcional, su aplicación es eficaz. Sólo es cuestión de aprenderse los trucos, como es colocar los números en el orden correcto y luego saber que se multiplican los dos números en diagonal y se divide por el tercero para hallar el cuarto número.

Otra observación en la forma de proceder del *caso 15-C3 (Figura 16)*, en lo hasta ahora revisado, es que usa la *regla de tres* en el problema *1a'* y la estrategia de valor unitario en el problema *1a***,** a diferencia del caso anterior, quien utiliza la estrategia de regla de tres en la resolución de todos los problemas, o los primeros dos casos entrevistados utilizan la estrategia de valor unitario en todos los problemas. Con esto quiero señalar que existe una flexibilidad y dominio de dos estrategias por este profesor, lo que permite utilizar la estrategia que le resulte más económica.

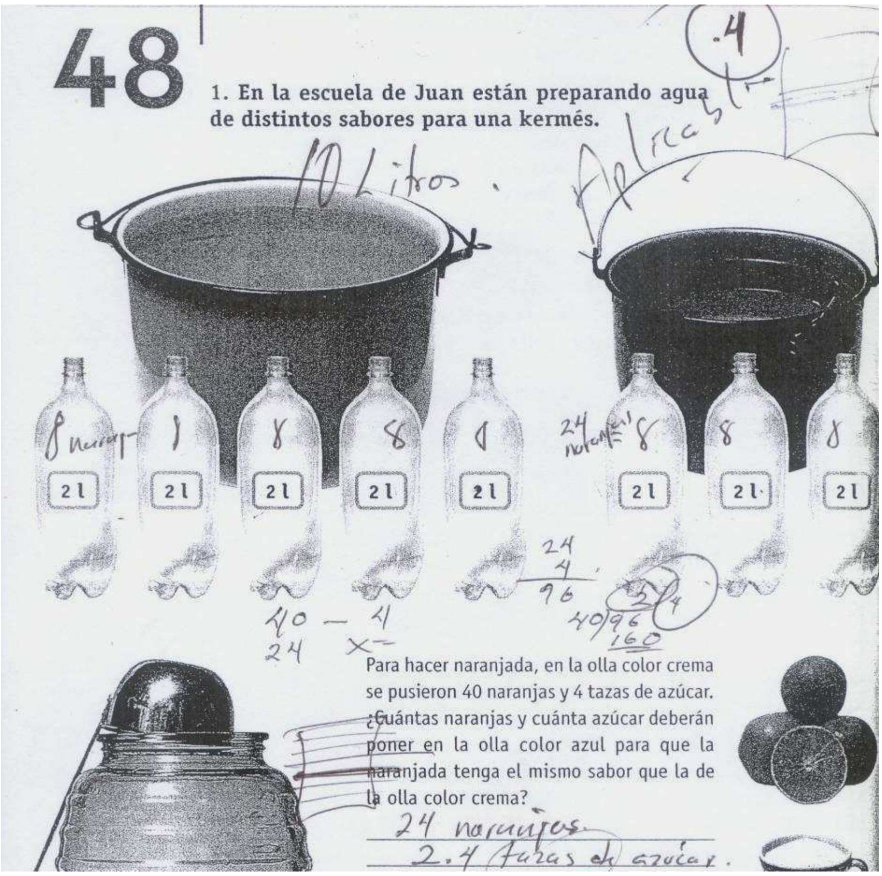


Figura 14. Procedimiento del caso 15-C3 al problema *a* y *a'*

Un caso más es el *36-C3*, profesor con 18 años de servicio, realizó estudios de normal cuando no era a nivel licenciatura y los últimos 4 años ha tenido a su cargo cuarto, quinto y sexto grados. El profesor parte del valor unitario de naranjas por taza de azúcar para aplicar la *regla de tres* (*Figura 15*) y obtener el resultado final de cantidad de azúcar, al contrario del caso 33-C3 que aplica la regla de tres para obtener el valor unitario para luego trabajar con él.

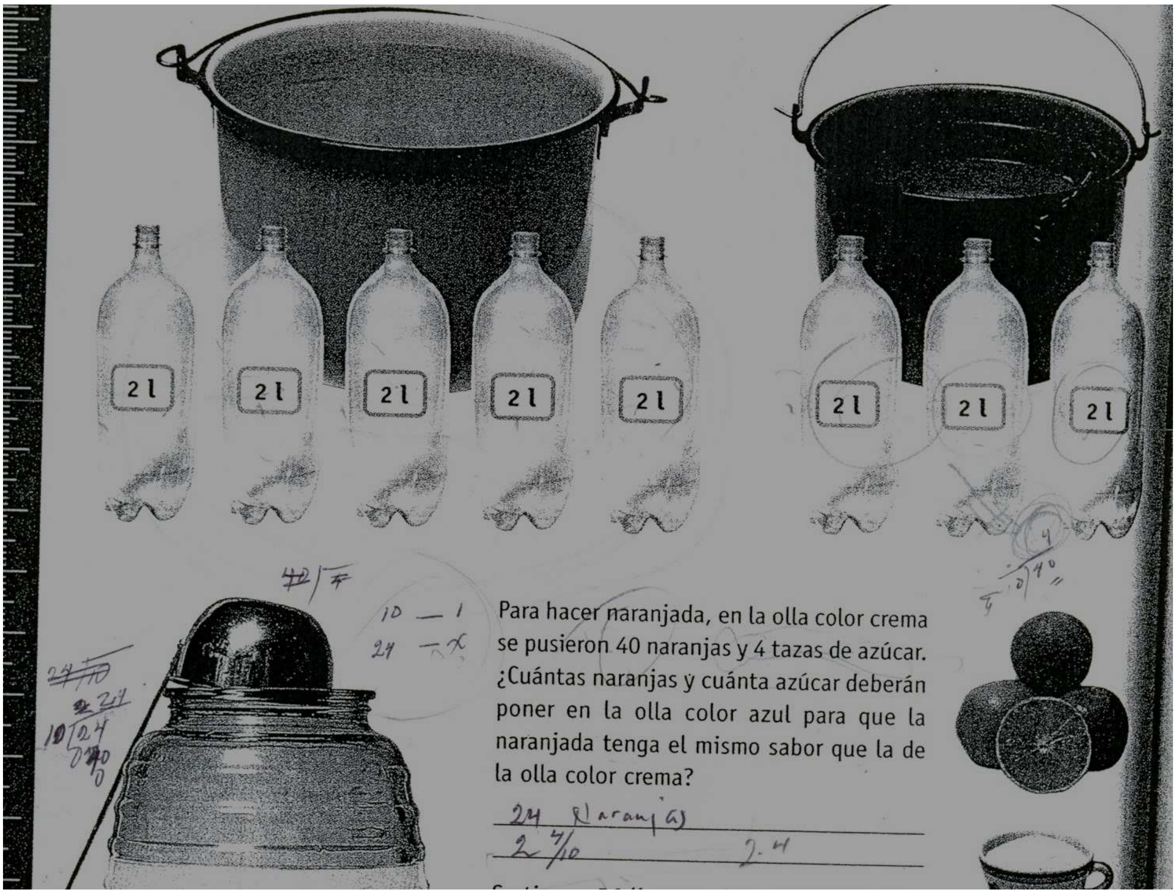


Figura 15. Procedimiento del caso 36-C3 al problema *a* y *a'*

Hallar el valor unitario de naranjas por taza de azúcar le resultó relativamente fácil, ya que si 40 naranjas son para 4 tazas, entonces 10 para 1 taza:

Entrevistado 4 (E4). (se queda pensando) …teníamos vasos en ese momento ¿no?...¡umm!...teníamos vasos, donde este… uno estaba marcando de que si 40 naranjas eran a cuatro tazas de azúcar…entonces nosotros lo que este…lo que hicimos fue una…una división… en ese momento cuando estábamos trabajando. Pero además de eso nos valimos mucho de…de esa regla…de…de…

> (*inaudible*)… pero…mira lo que pasa que decíamos "primero sacamos, si 40… y 4, pues la proporción era a 10" ¿SÍ? …" (NORERI111105)

Después de obtener la cantidad de naranjas (24), aplica la *regla de tres* 10:1::24:x, de donde obtiene 2.4 tazas de azúcar para 24 naranjas, asimismo, el número decimal obtenido lo representa en forma de fracción (*Figura 15*). El profesor parece no recordar bien la forma en que llegó al resultado, pero en la imagen 13 se aprecia su procedimiento.

Hasta aquí he mostrado las dos estrategias utilizadas para resolver los problemas 1a y 1a´. Es evidente que ante la presencia de razones fraccionarias los profesores recurrieron a diversos recursos para identificar el valor unitario, como recursos pictográficos, uso de tablas y de algoritmos, donde algunos si lo hallaron y otros no. El manejo de las fracciones representó una dificultad al momento de operar e interpretarlas (caso 15-C2). Otra consideración necesaria es la dificultad de representar el problema cuando se trata de unidades desconocidas, no comunes o tal vez no convencionales para el sujeto. En el caso 6-C3 la profesora convirtió las tazas a gramos, el caso 33-C3 consideró los decimales de una taza como cucharadas.

Sin estrategia: Un caso especial

El caso *16-C2,* es el profesor con más años de experiencia, 37, y según los datos de formación inició a laborar con un nivel máximo de estudios de educación primaria. Esa circunstancia parece justificar, en parte, la carencia en el conocimiento y dominio del tema.

En cuanto al problema *1a* y *1a'* el profesor contesta correctamente, pero parece haber copiado los resultados porque no puede argumentar su solución (*Figura 16*), sino que menciona no acordarse del procedimiento. También en la imagen del cuadernillo se aprecia la estrategia usada de valor unitario, pero no lo justifica y argumenta la respuesta, es decir, la forma en que obtuvo el valor unitario y cómo operó con él.

> *Entrevistador*: No se preocupe, este es el resultado. La idea es como identificar que de dónde, de dónde obtuvimos… cómo podemos obtener el total de azúcar para esta cantidad de agua.

Entrevistado 9 (E9). Bueno. No se si estaré bien o estaré mal, quiero que me corrija usted.

Entrevistador: Esta está bien, pero el punto es saber por qué sale esto (2.4)

E9. Bueno la siguiente, ¿queda superado esto?

Entrevistador. No porque no sabemos de dónde salió el 2.4.

E9. Dejé mi cuaderno, no se a dónde para identificarme en estas.

Entrevistador. Pero no importa si se acuerda más o menos.

E9. No. no me acuerdo. (Entrevista ALF111105, p. 1).

Figura 16. Procedimiento del caso 16-C2 al problema 1*a* y 1*a'*

El profesor señala no tener su cuaderno, pero en la imagen se aprecian algunos algoritmos que no puede explicar.

Problema 1b

El problema del que se trata ahora es de valor perdido (*Figura 17*), en un contexto de mezcla y, al igual que el problema anterior, se hace uso de cantidades continuas (agua) y discretas (limones).

Tabla 9

Estructura numérica del problema 1b

	litros	limones
Olla 1	3	?
Olla 2	4	?
Total	**7**	56

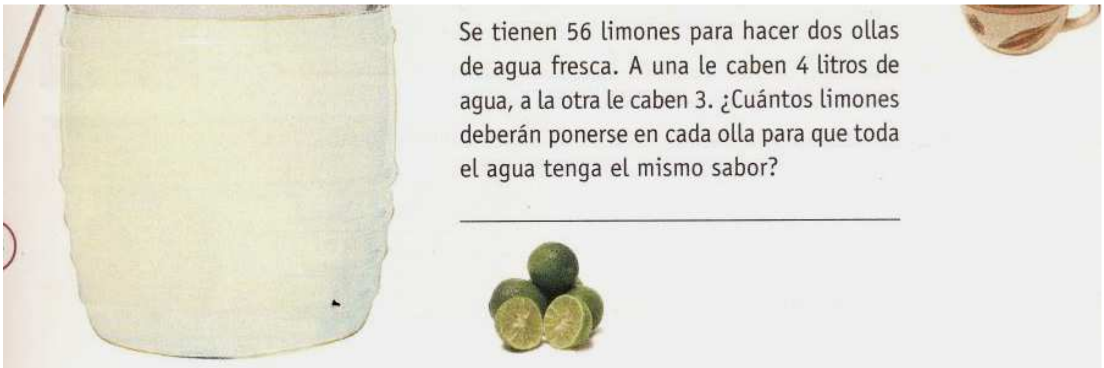


Figura 17. Problema 1b del libro de texto de quinto grado de valor faltante

El problema es semejante al primero, se da una cantidad total de limones (56) para las dos ollas, una con tres litros de agua y otra con cuatro. Para resolver el problema se tiene que pasar por identificar el número que se corresponde con el 56 (tabla 14), o sea, el 7, que es el total de litros de agua. A partir de ahí se pudieron establecer relaciones escalares y funcionales. Para trabajar con relaciones escalares existen dos razones con las cuales se puede resolver el problema: de 7:4::56:x la razón es 7/4 y de 7:3::56:x la razón es 7/3, aunque debo señalar que bastaría con la utilización de sólo una razón, ya que hallando el resultado para una incógnita (olla 1 ó 2) se halla el resultados de la otra. Las relaciones funcionales que se pueden establecer son: 56:7::x:4, donde la razón es 8/1 ó 56:7::x:3, donde la razón es la misma (8/1). De esto es evidente que establecer relaciones funcionales es la forma más fácil de resolver el problema, claro que el planteamiento también guía hacia allá.

Una incógnita del problema, que resultó muy obvio para los maestros, fue el 7, la suma de la cantidad de agua de las dos ollas, número necesario para hallar los valores correspondientes de limones para cada olla. El razonamiento realizado por los profesores estuvo dado en los siguientes términos: si 56 limones son para 7 litros, entonces cuántos limones para 4 litros y cuántos para 3 litros. De ahí la lógica de obtener el valor unitario. La relación de 56 a 7 es de 8 a 1, razón entera con la cual no se presentaron mayores complicaciones para obtener la cantidad de limones para cada olla. Esta forma de relacionar los datos es de tipo funcional y fue la única forma en que los profesores se apoyaron para desarrollar sus procedimientos. Considero que al igual que en los otros problemas, la forma de plantearlo promueve un tipo de estrategia, en este caso el valor unitario. Sin embargo, este problema también puede resolverse estableciendo relaciones escalares, inexistente en las respuestas de los profesores. Esta posibilidad es relacionar 7 litros, 4 litros y 3 litros, de donde se obtiene las razones fraccionarias 7/4 y ó 7/3, pero con la utilización de estas relaciones escalares se hubiera incrementado la dificultad de comprensión, así como el operar con ellos.

En la resolución a este problema, al igual que el problema anterior, sólo se hace uso de dos estrategias: el *valor unitario* y la *regla de tres*. La mayoría de los profesores hizo uso de la primera, sin embargo existen diferencias en los procedimientos seguidos.

Cuantificación de las respuestas y estrategias

La resolución del problema *1b* resultó tan exitosa como sucedió con el problema **1a.** El 83.3% de los profesores tuvieron una respuesta correcta, el 1.5% incorrecto y el 15.1% no contestaron. Del total de profesores que contestaron el 98.2% resolvió el problema y el 1.8% no. En un desglose por ciclos queda de la siguiente manera: Del total de profesores de segundo ciclo el 82.7% resolvió el problema, el 3.4% dio respuestas incorrectas y el 13.8% no intentó resolverlo. Considerando sólo a los que hicieron por resolver el problema, el 96% tuvo éxito y el 4% no; en tercer ciclo el 83.7% dio respuesta correcta al problema y el 16.35% no contestó. Nuevamente si se considera, en el tercer ciclo, solo el total de quienes contestaron, el 100% obtuvo una respuesta correcta.

Como puede apreciarse en la *Figura 18* la resolución del problema fue muy exitoso, al igual que sucedió con el problema *1a*, lo cual es debido al uso de razón entera con la que trabajaron los profesores, por lo que no les resultó complicado operar con ella.

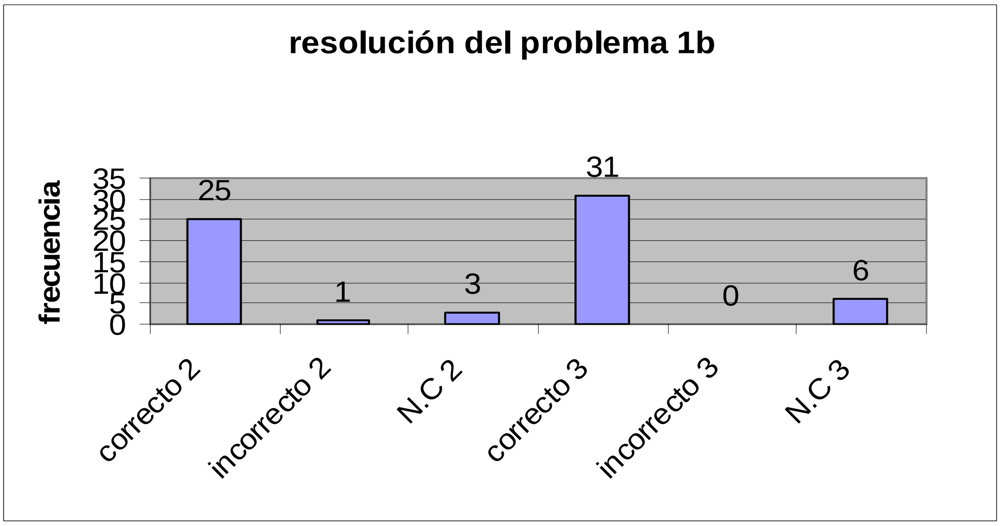


Figura 18. Respuestas al problema 1b

Así mismo, de las estrategias utilizadas *(Figura 19*) la de *valor unitario* fue la más usada por los profesores (53%). La *regla de tres* fue menos utilizada (7.5%). También hubo un alto porcentaje de profesores que no mostraron su procedimiento (24.2%), lo que pudiera estar asociado a la facilidad del problema, por lo que no resultó necesario realizar operaciones escritas.

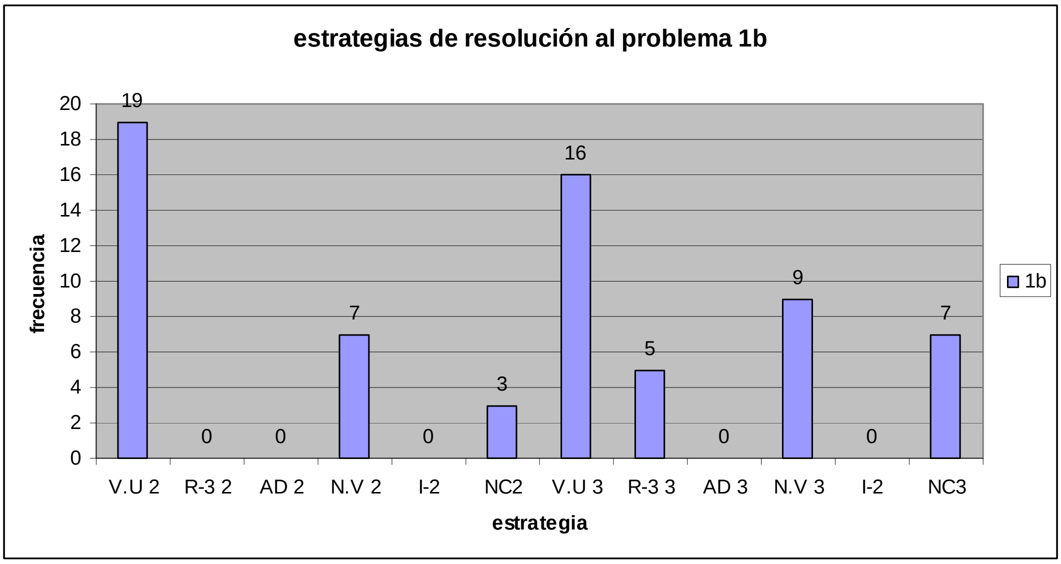


Figura 19. Estrategias empleadas en la solución al problema 1b

Las estrategias *aditiva incorrecta* (AD) y *creación de pares equivalentes* (I) no aparecieron en la resolución de los problemas hasta ahora analizados. Esta situación deja ver que el uso de diferentes estrategias está asociado a las características del problema, es decir, cuando el problema les resulta más complejo se dan a la tarea de buscar otros caminos.

Análisis cualitativo de los procedimientos utilizados

Las entrevistas con 9 profesores pertenecientes a la población estudiada, me permitieron observar algunas características en la interpretación que hacen del problema y la lógica bajo la que construyeron sus procedimientos. Así mismo, dan evidencia del conocimiento de los profesores sobre las nociones de razón y proporción.

Valor unitario

El desarrollo de la estrategia de valor unitario me permitió comprender con más profundidad las interpretaciones de los profesores, con base en las cuales resuelven el problema, a diferencia de la regla de tres, que muestra poca evidencia del razonamiento del profesor.

El caso que retomo es el 13-C2, el cual es representativo de la forma de proceder por la mayoría de los profesores al utilizar la estrategia de valor unitario

(*Figura 20*). Se trata de una profesora normalista con licenciatura en educación primaria, con 13 años de servicio. De los últimos cinco años, tres años ha tenido a su cargo el sexto grado y los dos últimos ha sido directora. Esta profesora en el problema *1a’* (cantidad de azúcar) utiliza la estrategia de valor unitario, apoyada en la representación con dibujos, al igual que otros casos mostrados anteriormente. Sin embargo, durante la entrevista ella no recuerda cómo obtuvo el valor unitario, aunque se puede apreciar en la *Figura 20* que es a partir del dibujo y reparto de las tazas.

Para la resolución del problema 1b, la profesora realiza la división de 56 limones entre 7 litros, cantidad de agua de las dos ollas juntas. Enseguida, a partir de la cantidad de limones por litro (8 a1), construye una tabla de variación proporcional: para 1 litro 8 limones, para 2 litros 16 limones, etc. Esta forma de proceder, mediante tablas, muestra una forma aditiva de operar, sin embargo, es una forma que da seguridad de que la respuesta sea correcta.

> *Entrevistador*: Se necesita… tienen 56 limones y se tienen 2 ollas, una de 3 y una de 4 litros. ¿Cuántos limones le ponemos a cada olla para que los dos sabores… para que las dos limonadas queden igual?
> ¿Qué hicieron en este caso?
> *E8*: Yo dividí.
> *Entrevistador*: ¿qué dividió?
> *E8*: Los 56 limones entre los 7 litros de 4 y 3.
> *Entrevistador*: ¿de qué le salió el 7?
> *E7*: Siete…
> *E8*: 8 por 7, 56.
> *Entrevistador*: No digo Ofe, ¿de dónde salió el 7?
> *E7*: El siete…dice en una caben 4 litros y en otra 3.
> *Entrevistador*: Aja. Entonces encontraron el valor de 8. ¿8 qué sería?
> *E8*: (pausado) 8 limones por litro. Multiplicamos 8 limones por 4 litros, 32.
> *E7*: Sí, yo aquí tengo mi tablita. Ciencuenta… lo dividí y aquí también fui haciendo mi tablita (Entrevista OFEFER111105, p. 9-10).

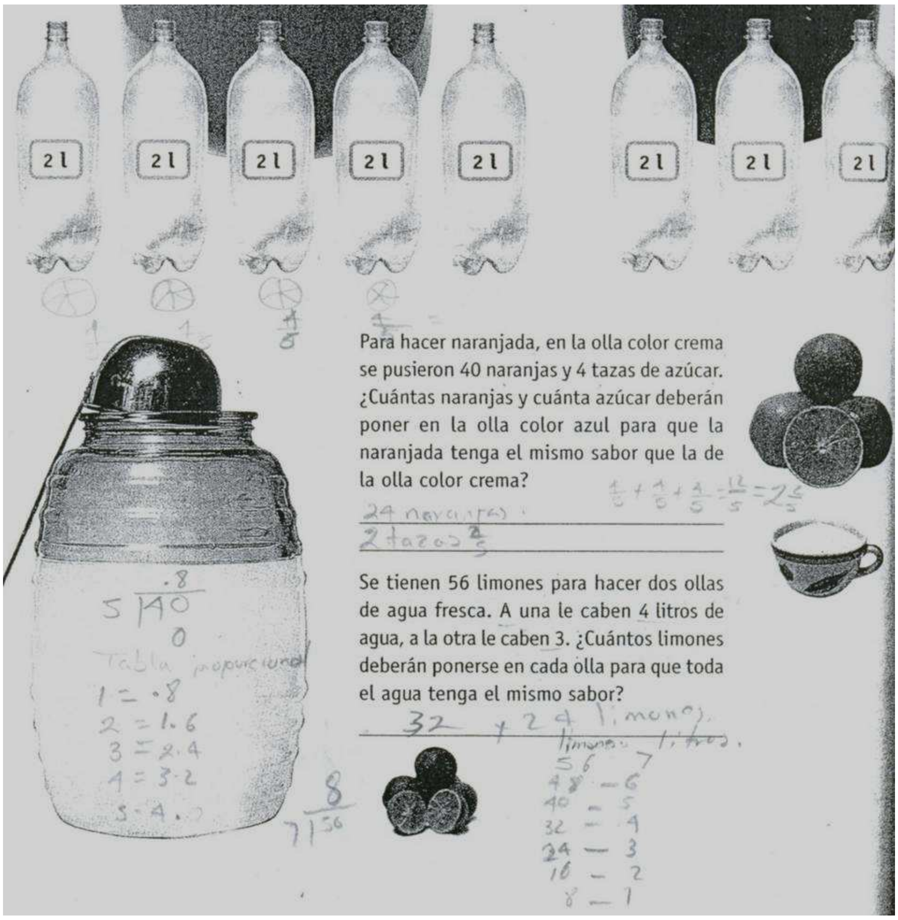


Figura 20. Procedimiento del caso 13-C2 al problema 1b

La profesora caso 13-C2 utiliza la división para obtener el valor unitario (*Figura 20*). A partir de ese valor construye una tabla, donde registra por cada cantidad de litros la cantidad de limones correspondiente y de ahí responde a lo que se le pide. Bien pudiera haber multiplicado únicamente por 3 y por 4 y hallar el resultado. Pero la tabla les da un mayor afianzamiento en la respuesta, es decir, la utiliza como una herramienta para comprobar y visualizar la proporcionalidad, así como la utilizan otros profesores (caso 33-C3).

En el análisis curricular del programa de estudios y de las lecciones de los libros de texto se muestra el peso dado a las tablas para el aprendizaje de la proporcionalidad, por lo que se podría suponer que esta situación es un reflejo de lo que se pondera en los libros de texto, como una herramienta necesaria para dar muestra de la proporcionalidad.

Las tablas de variación que construyeron los profesores permiten analizar y dar cuenta de otro aspecto sobre las soluciones dadas por los profesores: Todos los sujetos trabajaron con relaciones funcionales, aunque los profesores que hicieron uso de tablas también aplican relaciones escalares. Por ejemplo, en el caso *13-C2*, la profesora establece la relación de 56 limones para 7 litros de agua, de ahí obtiene 8 limones para 1 litro de agua, hasta aquí la relación establecida es funcional. Después elabora la tabla (*Figura 20*): para 1 litro 8 naranjas; para 2 litros, 16 naranjas; para 3 litros, 24; etc. En las tablas de variación proporcional lo que se hace es ir duplicando la cantidad que corresponde a cada espacio de medida y se deja a un lado la relación funcional establecida al principio. Es decir, como ya tenemos el punto de partida para iniciar la tabla (8 y 1), entonces la forma de proceder es 1, 2, 3, 4…. Etc y por el otro lado 8, 16, 24, 32… etc. Puede aplicarse el valor unitario, por ejemplo, 1 x 8= 8, 2 x 8 =16, 3 x 8 = 24, etc.

Otros casos que aplicaron la estrategia de valor unitario fueron 6-C3 y 32-C3 (*Figuras 4 y 5*), pero en estos casos no utilizaron tablas de variación proporcional.

> *E2*. Aquí yo le saqué mira: tengo 56 limones para dos ollas de agua fresca. A una le caben 4 litros, a otra le caben 3. Entonces en total son 7, entonces voy a repartir los 56 entre los 7 litros. Toca a 8, a 8 limones por cada litro. Ocho limoooones…cada…cada litro.
>
> *E1*. Igual acá, 4 litros, 4 por 8, 32. Y 3 litros, 3 por 8, 24 limones.
>
> *E2*. Veinticuatro.
>
> *E1*. Y ya salió. (Entrevista LUPVIA101105, pp. 8)

El caso *27-C3*, profesor no entrevistado, utiliza también el valor unitario como estrategia, pero según se muestra en la *Figura 21,* parte de los resultados y lo que intenta es validar, mediante la obtención del valor unitario y la construcción de tablas, si coinciden sus respuestas.

Según se muestra en el procedimiento, el profesor conoce que para 4 litros son 32 limones, entonces intenta buscar el valor unitario que le de cómo resultado ese valor (lado inferior izquierdo de la *Figura 21*). Su elección es el 9 sin que coincida; después construye otra tabla donde selecciona el número 8 como valor unitario, el cual si cuadra con el resultado obtenido y también con el total de limones. El procedimiento deja ver que al profesor se le dificulta la obtención del valor unitario mediante algoritmos y lo hace por estimación.

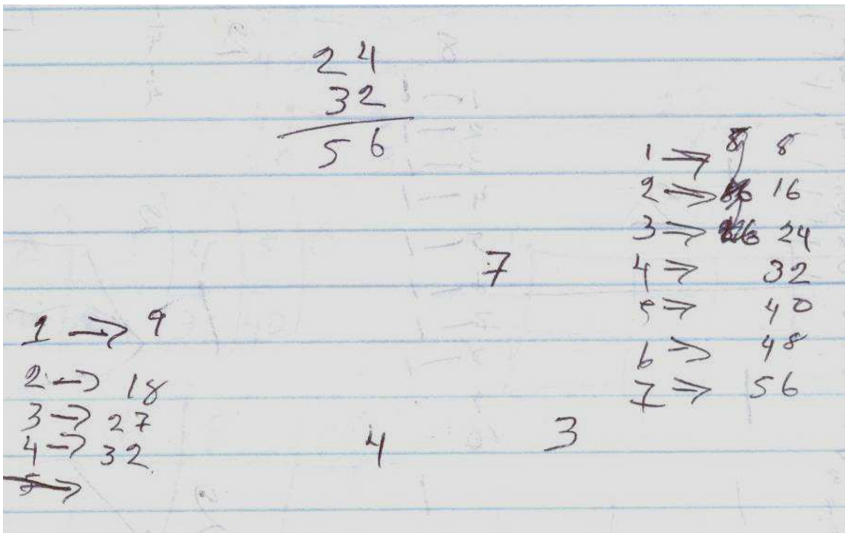


Figura 21. Procedimiento del caso 27-C3 al problema 1b

El *caso 9-C2,* profesor no entrevistado, muestra un procedimiento distinto al anterior, pero también con la estrategia de valor unitario. Este profesor parece realizar toda clase de pruebas para comprobar el resultado obtenido (*Figura 22*)

Obtiene el valor unitario a partir de la división de 56 entre 7, multiplica el 8 obtenido por la cantidad de agua de cada olla (3 y 4), suma las cantidades halladas de tales multiplicaciones y verifica que le de 56, pero no le basta con eso, sino también construye tablas de variación y lo complementa con dibujos de las ollas. De nueva cuenta, esta situación da evidencia que los dibujos sirven como forma de concretizar la situación y las tablas sirven como una forma de verificación del resultado, ya que aunque el resultado esté dado a partir de las multiplicaciones, parece que el profesor duda del resultado y lo verifican mediante tablas.

La estrategia de valor unitario es a la que más recurren los profesores, sin embargo, las formas de obtenerlo y trabajar con él varían. Algunos muestran herramientas con las que tratan de concretizar el problema, como son los dibujos, mientras otros mediante tablas o sólo la aplicación de algoritmos.

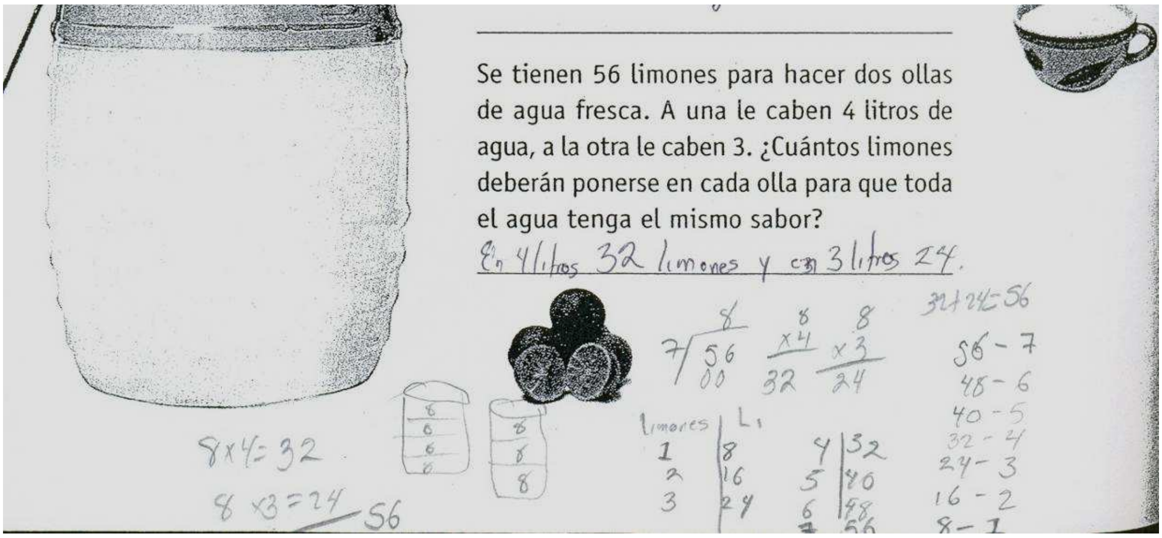


Figura 22. Procedimiento del caso 9-C2 al problema 1b

Sin estrategia: Un caso especial

El *caso 16-C2*, al igual que en el problema anterior no puede explicar su procedimiento, sin embargo, muestra el uso de la estrategia de valor unitario, donde se vale de dibujos para representar cada olla, pero no existe evidencia de dónde obtiene ese valor unitario.

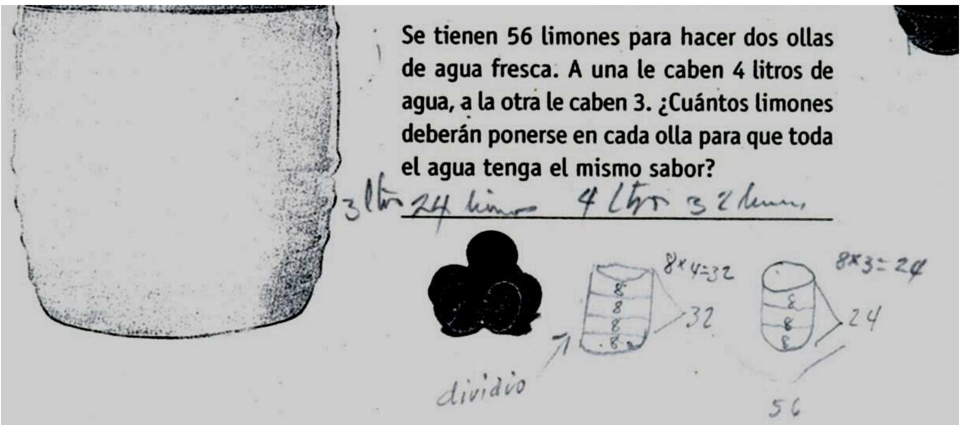


Figura 23. Procedimiento del caso 16-C2 al problema 1b

E9. Se tienen 56 limones para hacer dos ollas de agua fresca. A una le caben 4 litros de agua, la otra le caben 3 ¿cuántos limones deberán ponerse en cada olla para que toda el agua tenga el mismo sabor?

Yo hice esta operación: dividí, hice como especie de una olla… cuatro.

Entrevistador: Dividió entre 4.

E9. Acá, para saber este… cuántos este… cuántos limones…

Entrevistador: Pero si dividía entre 4 qué hubiera hecho? Divide entre cuatro y luego qué le pone, qué cantidad de limones le pone a cada parte de cuarto, a cada cuarto.

E9: Ocho este… serían…

Entrevistador: Y cómo sabe que fueron ocho, esa es la pregunta.

E9. Dividí. Ocho entre… entre de un medio.

Entrevistador: De qué?

E9. De un… un entero de estos. Por eso, por decir este es…

Entrevistador. Un entero o no?

E9. Una parte, es una parte.

Entrevistador: Pero por qué no le puso 25, 17 o algún otro número?

E9. No, no. ja, ja, ja. No se me abría el entendimiento!

Entrevistador: No, no, pero es que está bien, por eso digo que por qué 8 y no cualquier otro número.

E9: Aquí, aquí. Entonces digo aquí lo hice rápido porque la otra la estaba yo haciendo tal como es. (Entrevista ALF111105, p. 2)

El profesor señala que el valor unitario salió de dividir 8 entre un medio y trata de relacionar los datos registrados en su procedimiento, pero de nueva cuenta no halla la explicación. Esta situación da evidencia de una carencia de conocimiento por parte del profesor, ya que, aunque no recordara el procedimiento, pudo haber resuelto el problema en el momento.

Regla de tres

El caso 33-C3 es uno de los profesores que utilizaron tal estrategia, y a diferencia de la primera vez donde la utiliza para obtener el valor unitario, lo hace para obtener los resultados finales. En la *Figura 24* son visibles las operaciones de *regla de tres*. De nueva cuenta el profesor recurre a la tabla como una forma de validar su resultado.

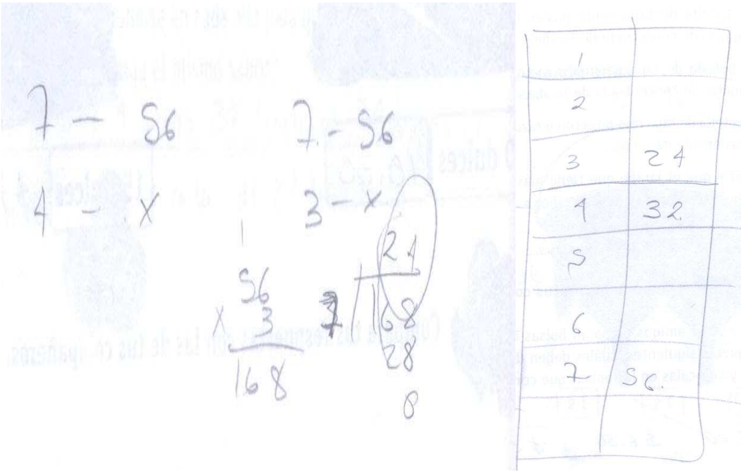


Figura 24. Procedimiento del caso 33-C3 al problema 1b

El profesor caso 15-C3 aplica también la *regla de tres* de la misma forma que el caso anterior. En la parte inferior de la *Figura 25* es visible la forma de proceder: 56 limones para 7 litros de agua, entonces x limones para 4 litros, luego realiza lo mismo pero ahora para 3 litros, es decir: 56:7::x:4 = (56) (4)/7=32.

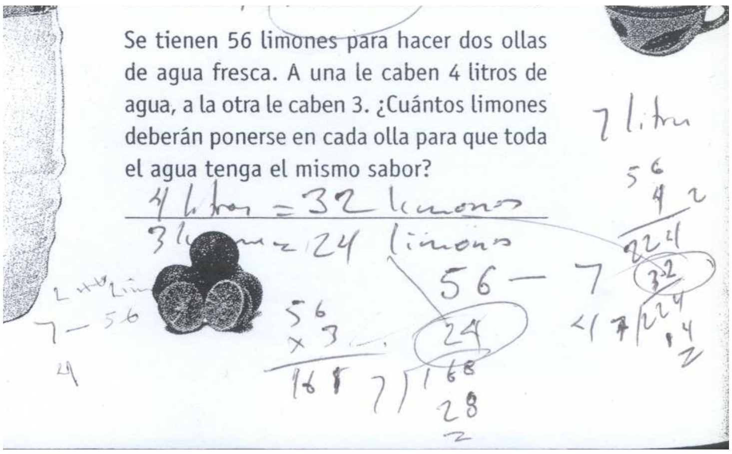


Figura 25. Procedimiento del caso 15-C3 al problema 1b

Hasta aquí los resultados del problema 1b, el cual resultó fácil de resolver para la mayoría de los profesores. Como se mostró en los datos cuantitativos, hubo profesores quienes no mostraron ningún procedimiento, lo que se pudo deberse, en algunos casos, a operar sólo mentalmente debido a la relación poco compleja entre los números dados.

Problema 2

El problema 2 (*Figura 26* y *Tabla 10*) de comparación de razones fue muy rico para explorar interpretaciones de los profesores y también fue el que mayores dificultades presentó para resolverse. En los procedimientos de solución se pusieron en juego una amplia variedad de estrategias, ya clasificadas en investigaciones sobre el tema: *regla de tres*, *valor unitario, creación de pares equivalentes, diferencia aditiva y cualitativa* (*Figura 28*).

El problema, al que esta vez se enfrentaron los profesores, es de comparación de razones y, al igual que los anteriores, está planteado en un contexto de mezcla. En cuanto a los espacios de medida utilizados se hace uso de cantidades continuas discretizadas con unidades arbitrarias (tazas y cucharadas). Por último, se trata de un problema donde las razones necesarias para resolverlo son funcionales y fraccionarias.

2. Paula y sus compañeros preparan jarabe de tamarindo para los raspados de la kermés.

En la botella de tapa verde pusieron 3 tazas de agua y 5 cucharadas de concentrado de jarabe.

En la botella de tapa naranja pusieron 8 tazas de agua y 10 cucharadas de concentrado de jarabe.

En la botella de tapa roja pusieron 6 tazas de agua y 8 cucharadas de concentrado de jarabe.

Lupe dice que el jarabe que tiene más sabor es el de la botella de tapa naranja. Pepe dice que el que tiene más sabor es el de la botella de tapa verde. ¿Quién tiene razón? ____________________

¿Por qué? ____________________

Coméntalo con tus compañeros.

Figura 26. Problema 2 del libro de texto de 5to grado de comparación de razones

Tabla 10
Estructura numérica del problema 2

	Tazas de agua	Cucharadas de concentrado
Botella verde	3	5
Botella naranja	8	10
Botella roja	6	8

Según lo demandado por el problema era necesario establecer comparaciones entre razones funcionales, descartando las escalares. De las relaciones funcionales implicadas en el problema surgen las siguientes: 3:5 (tazas por cucharada) o 5:3 (cucharadas por taza), en la segunda es de 8:10 o 10:8 y en la última es 6:8 u 8:6. Se trató de un problema que implicaba el trabajo con fracciones.

El problema plantea lo siguiente: *Pepe dice que la botella verde tiene más sabor y Lupe que la botella naranja ¿quién tiene razón?* Esta forma en que está planteado el problema provocó que algunos profesores se centraran en comparar únicamente las dos mezclas que señalan los personajes del problema y descartan la tercera opción y sus respuestas estuvieron encaminadas a sólo dos: que pepe tiene razón o que Lupe. Sin embargo, dentro de las posibles respuestas, existen cuatro: una que Pepe tiene razón (3:5); otra que Lupe es quien tiene la razón (8:10); una tercera sería que ninguno tiene la razón porque tiene más sabor la tercera botella (6:10); y por último que ninguno tiene la razón porque las tres tienen el mismo sabor.

Como ya lo indiqué, para resolver este problema era necesaria, en la mayoría de los casos, la correcta interpretación del significado de cantidades intensivas, es decir, comprender la nueva unidad (*tazas/cucharada o cucharada/tazas*) surgida de la relación de los dos espacios de medida, ya que de otra forma se llegaría a respuestas incorrectas. En otras palabras, para la resolución del problema, era de vital importancia tener conocimientos de lo que implica una relación funcional para comprender el resultado de las relaciones establecidas. Por ejemplo, si se compara 3/5 con 8/10 resulta que 8/10 es mayor, entonces puede deducirse que la botella naranja tiene más sabor porque la fracción es mayor. Ahora si comparo 5/3 con 10/8, entonces resulta que 5/3 es mayor, por lo que podría decirse que la botella verde tiene más sabor debido a que la fracción es mayor. Es aquí la importancia de comprender las cantidades intensivas, el cual es resultado de trabajar con relaciones funcionales, porque a diferencia de los primeros problemas de valor perdido, donde se pedía completar la proporción o de hallar el valor perdido, era posible obtener el resultado estableciendo relaciones funcionales o escalares, por lo que la resolución no dependía tanto de comprender las cantidades intensivas como sucedió ante este problema.

La comparación de fracciones puede resultar confusa cuando esos números representan una relación funcional, ya que necesita interpretarse las unidades que representa y no sólo el número. Es decir, la interpretación correcta de las cantidades intensivas llevaría a los sujetos a elegir la opción correcta según lo demandado en el problema. Por ejemplo, la fracción 8/10 es mayor que la fracción 3:5, pero considerando la cantidad intensiva que representan, decimos que 8/10 y 3/5 representan las tazas de agua por cucharada de azúcar, por lo tanto la razón 8/10 representa que hay más agua por cucharada de concentrado comparado con lo que representa la fracción 3/5, entonces tiene más sabor el agua donde la relación es de 3 a 5. Por otro lado, si las relaciones son tomadas de forma inversa 10:8 y 5:3, tenemos que 10/8 es menor que 5/3, pero estas fracciones representan la cantidad de cucharadas de azúcar por taza de agua, por lo tanto, la mezcla con más sabor es la de la relación 5:3. De esta manera se observa que el resultado es el mismo, sólo que se debe saber interpretar las unidades que representan esas cantidades intensivas.

Una dificultad más que se involucró en el problema, además de las cantidades intensivas, fueron las razones fraccionarias, las cuales, como se ha evidenciado, son de mayor complejidad para los sujetos. También cabe señalar que hubo casos donde se evitó el trabajo con cantidades intensivas y el uso de fracciones, ya que a través de la creación de pares equivalentes, a partir de las relaciones dadas, se llegó a la solución.

Cuantificación de respuestas y estrategias

Este problema resultó ser el menos resuelto por los profesores, apenas poco más de la mitad logró una respuesta acertada, mientras que los otros erraron o no contestaron. Además habrá de considerar las bajas de quienes contestaron correctamente mediante respuestas basadas su mera intuición.

El problema fue resuelto por un 63.7% (42 profesores), un poco menos que el apartado *1a'* del primer problema. Estos resultados muestran que una dificultad primordial está en el manejo de las fracciones y en la interpretación de la fracción como razón, en este caso también con el manejo de unidades intensivas. El porcentaje de profesores que dieron una respuesta incorrecta al problema (18.1%) fue superior al problema **1a'** que también fue difícil**.** Por último, la cantidad de profesores que no lo contestaron (18.1%) fue poco menos que en el problema **1a'**.

En comparación con los otros problemas (1a y 1b), se dispara la cantidad de profesores con respuestas incorrectas y los profesores que no contestaron. Claro que, como se ha podido observar, en los problemas 1a y 1b las razones usadas fueron enteras y no presentaron mayores dificultades para los profesores. Por lo que es posible observar que el uso de fracciones provoca mayores dificultades, tanto para operar con ellas como para interpretarlas cuando se trata de cantidades intensivas.

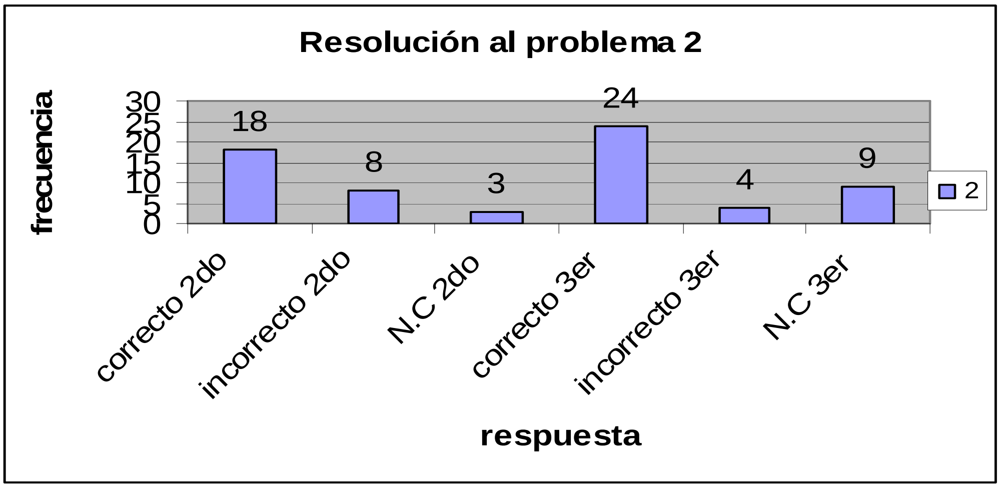


Figura 27. Respuestas al problema 2

En la *Figura 27* se aprecia que fueron más los profesores de tercer ciclo (36.4%) que resolvieron el problema, comparados con los profesores de segundo (27.3%), sin embargo, es mayor el porcentaje de profesores de tercer ciclo que no contestó 13.6% contra el 4.5% de los profesores de segundo ciclo.

Las estrategias usadas (*Figura 28*) por los profesores al resolver este problema fueron las más variadas, en comparación con las utilizadas en los otros problemas de la lección trabajada, situación debida a que la dificultad que representó llevó a los profesores a la búsqueda de más alternativas, además que en este caso se trataba de comparar y no de hallar el valor perdido.

La estrategia de *valor unitario* (V.U) fue utilizada por un 22.7% (15 profesores) de la población total, del cual el 4.5% corresponde a los profesores de segundo ciclo y el 18.2% a profesores de tercer ciclo. Es evidente que los profesores de tercer ciclo recurrieron más al uso del valor unitario, lo cual se podría deber a que trabajaban en ese momento en los grados de quinto y sexto, donde se implementa la estrategia de valor unitario en los libros de texto.

Otra estrategia aplicada fue la *regla de tres* (R-3), aunque sólo fue en dos casos, un profesor del tercer ciclo y uno del segundo. La disminución de su uso en comparación con los problemas anteriores, principalmente en el *1a'* pudo ser debido a que no existía un valor desconocido que buscar, para lo cual es útil la *regla de tres*, sin embargo, existieron dos excepciones las cuales abordaré en el apartado cualitativo.

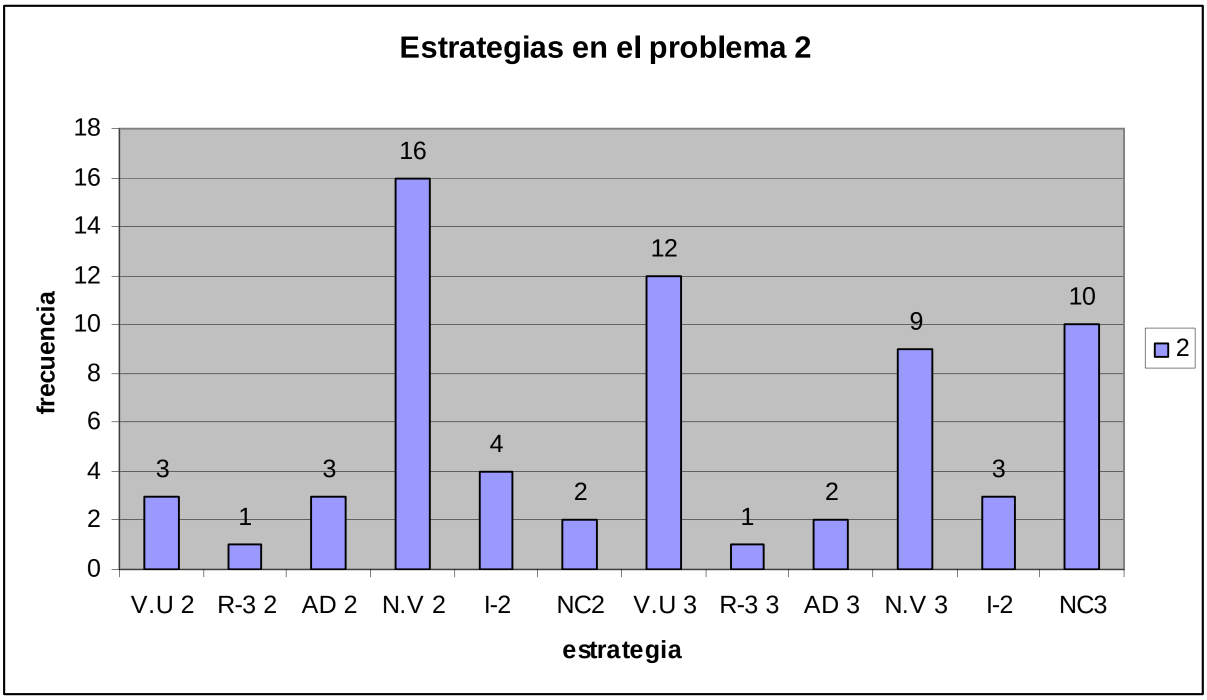


Figura 28. Estrategias empleadas en la solución al problema 2

La estrategia *aditiva incorrecta o de diferencia aditiva* (AD) tuvo lugar en la resolución de este problema (7.5 % de los profesores), estrategia que no había aparecido en ninguno de los demás problemas de la lección. Los profesores de segundo ciclo mostraron una mayor recurrencia (4.5%) que los profesores de tercero (1.5%). La diferencia entre los profesores de cada ciclo puede estar dada en función de la experiencia de los profesores, ya que los profesores de tercer ciclo tienen mayor experiencia con tareas de razón y proporción.

Otra estrategia aplicada por algunos profesores fue la *generación de pares (de razones) equivalentes* (10.5% del total), el 6% correspondió a profesores de segundo ciclo y el 4.5% a profesores de tercer ciclo. Esta estrategia de solución resultó muy interesante, ya que los profesores que la aplicaron no tuvieron la dificultad de trabajar con cantidades intensivas o con fracciones, lo que representó un obstáculo en los que si las utilizaron.

Una característica al solucionar este problema fue que una gran cantidad de profesores (37.8%) dieron la respuesta sin mostrar evidencia del procedimiento, situación no tan frecuente en los problemas anteriores. La explicación a este fenómeno está en las características del problema: la demanda de comparar las relaciones, ante la carencia de una estrategia algorítmica para hacerlo, llevó soluciones basadas en inferencia a partir de los datos e imágenes. Además, no se pide un dato numérico, sino sólo optar por una de las tres razones, la que tenga mayor sabor.

La aparición de otras estrategias en la resolución del problema 2 resalta otras características de razonamiento de los profesores y que señalo en el siguiente apartado cualitativo donde analizo los casos de profesores entrevistados.

Análisis cualitativo de los procedimientos utilizados

Los profesores entrevistados dieron, durante la explicación de sus procedimientos, un panorama más amplio de las estrategias usadas. Este apartado, al igual que sus semejantes en los problemas anteriores, va a ir acompañado por algunos casos de profesores no entrevistados, pero que dan pautas de variantes en el razonamiento para resolver el problema.

Valor unitario

La estrategia de valor unitario ha estado presente a lo largo de cado uno de los anteriores problemas y éste no es la excepción, además que ha sido la más usada por los profesores. No hay duda de que esta estrategia es la más recurrida para resolver los problemas de razón y proporción.

Las profesoras caso *6-C3* y caso *32-C3*, quienes han sido constantes en la aplicación de la estrategia de valor unitario en cada uno de los problemas resueltos, explican cómo llegaron al resultado mediante esa estrategia.

E2: Primero si lo saqué así, valor unitario. Es el más pronto. Esto se lo copie a Pita (*los números que aparecen en las botellas, 5/3, 10/8 y 8/6*). Porque cuando yo los hago, hago la cuenta. Haz de cuenta que aquí son, dice: En la botella de la tapa verde, no me acuerdo cuál era la verde… (*las lecciones están en blanco y negro*)

E1: Aquí está la verde

E2: La verde de agua…y cinco cucharadas de concentrado.

E1: Entonces dividimos

E2: ¿Por qué cinco tercios? ¿Por qué? Porque son 5 cucharadas para… ¿para qué?

E1: Son tres tazas de agua y cinco cucharadas de jarabe, entonces hicimos la división.

E2: ¡Ah, sí es cierto! Y aquí está. Sale a 1.66.

Entrevistador. Y ese 1.66 qué… ¿qué significa?

E1: Que es una cucharada…

E2: Con 66 centésimos de la cucharada.

Entrevistador: Para…

E2: Para cada taza, por eso te digo que yo siempre saco el valor unitario. 5 entre 3, o sea 5 cucharadas para 3 tazas. Y me da…y me sale una cucharada sesenta y seis por cada taza, por eso le puse aquí "cada taza" *(en su respuesta escribió c/taza*) (ENTREVISTA LUPVIA101105, pp. 5,6).

Las profesoras comparan las razones a partir de obtener el valor unitario en decimales *(Figura 29*). Pudieron haber dividido en forma inversa (ej. 3/5), sin embargo, dado que le dan una interpretación correcta a lo que representa el cociente de la división (*cucharadas por taza*), no lo hicieron. Aquí se muestra la importancia del manejo de cantidades intensivas. Comprender la cantidad resultante de la composición de dos cantidades extensivas es primordial para resolver este tipo de problemas. Comprender que la nueva cantidad ya no es ni una (tazas) ni otra (cucharadas) de las que la componen, sino una mezcla de ambas, proporciona las bases para decidir la respuesta al problema. Aquí las maestras saben que las cantidades indican la cantidad de cucharadas de concentrado por taza de agua, y en consecuencia deciden que la botella verde (1.66 cucharadas por taza) es la que tiene más sabor.

Las maestras también mencionaron que comparar números decimales es más fácil que comparar fracciones. De la relación establecida por ellas surgieron las fracciones 5/3 y 10/8, pero, según lo señalan, les resulta complicado comparar las fracciones para saber cuál es mayor, de ahí que prefirieran realizar las divisiones para convertirlas a decimales (1.66 y 1.25), y así "por lógica" –señaló la profesora- se sabe cuál es mayor y en consecuencia cuál de las dos mezclas tiene más sabor.

> *Entrevistador*: Pero, entonces aquí ¿cómo compararon éstos *(las botellas*)?
>
> *E2*: Yo nada más con los décimos, haz de cuenta que mira, por lógica aquí sacando los décimos…un entero…también aquí saqué el valor unitario (*1.25 y 1.33*) para cada tasa y aquí también. Entonces se compara fácil.
>
> Aquí un entero, un entero. Aquí cuál es el mayor (entre 1.66 y 1.25), pues el que tiene el seis, por lógica. Se compara más fácil así. El mayor es éste (1.66) que el segundo (1.25) y que el tercero (1.33). No hay pierde, ahí si no hay pierde.
>
> *Entrevistador*: ¿con el decimal?
>
> *E2*: Con el decimal…si porque con fracción es más difícil…compararlos. Para mí es más difícil comparar las fracciones. Aprendiendo lo del…la…lo del cruzado ya es más fácil pues, pero no…no. (ENTREVISTA LUPVIA101105, p. 8).

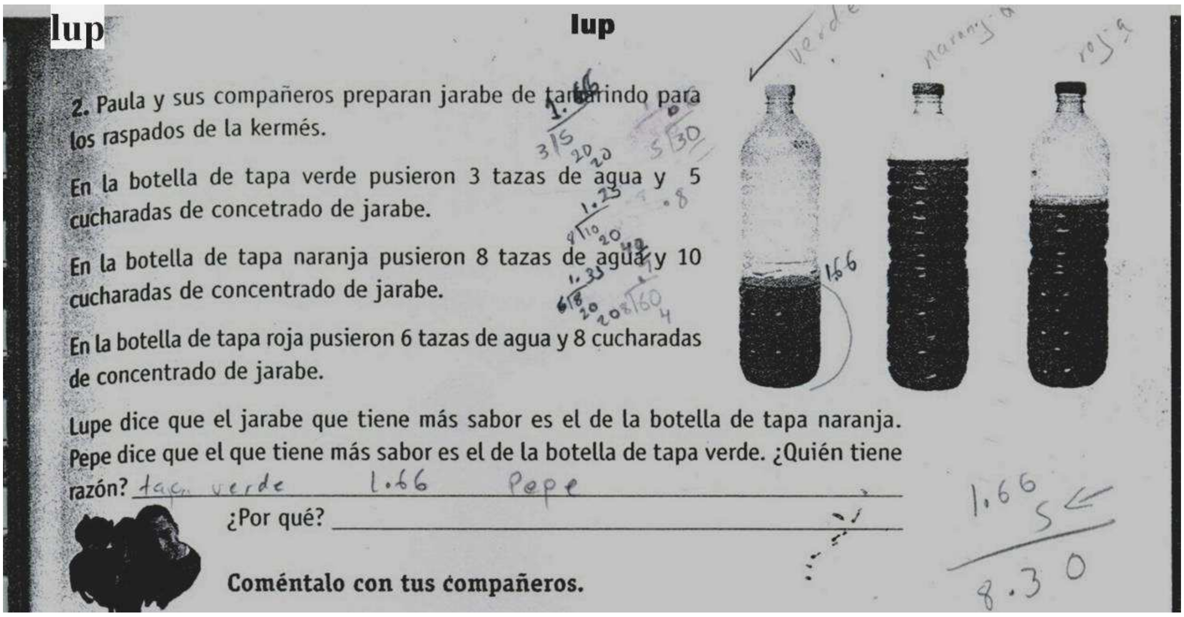


Figura 29. Procedimiento del caso 6-C3 al problema 2

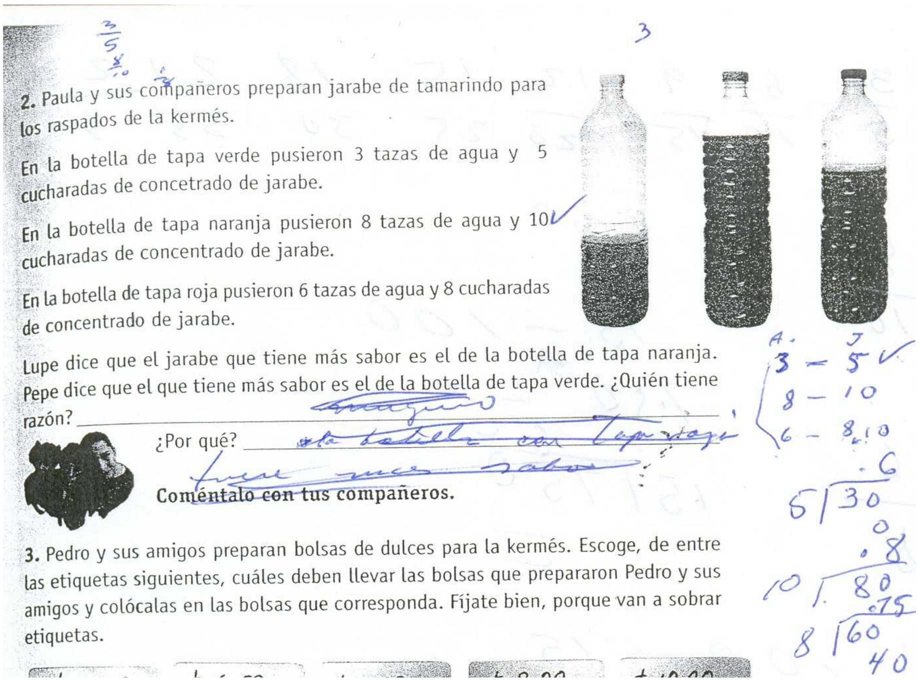
A pesar de lo exitosas que han sido las profesoras en solucionar los problemas mediante la estrategia de valor unitario presentan dificultades en el manejo de fracciones. El uso de fracciones también es una necesidad en la solución de este tipo de problemas, ya que regularmente están inmersas en ellos. Las profesoras evitaron trabajar con fracciones, pero un inconveniente de evitar trabajar con ellas y obtener el resultado en decimales es que se puede sacrificar exactitud en el resultado, aunque en este caso particular no sucede.

Por otro lado la profesora caso *32-C3* dice conocer un método para comparar las fracciones, "el cruzado", pero no recuerda bien cómo es el procedimiento, sin embargo lo realiza:

> *E2*. Para comparar, por ejemplo, fracciones: dos cuartos (2/4), qué es más grande, ocho novenos (8/9), así: 2 por 9, 18. 4 por 8, 32 y así ya se sabe que este (8/9) es el mayor y este (2/4) es el menor. Es igual que 2 cuartos es menor que 8 novenos. (silencio)…O sea para comparar cuál es mayor y menor.

La profesora explica que esa es la forma de comprobar cuál fracción es mayor, pero prefiere comparar en decimales. Claro que esto puede deberse a una falta de comprensión del procedimiento, por lo cual no le da seguridad en su respuesta como ocurre con los decimales.

En los dos casos citados, que utilizaron la estrategia de valor unitario, es claro que interpretaron correctamente las cantidades intensivas, cosa que no sucedió en otros casos: El *caso 8-C2* es un ejemplo. Este profesor no fue entrevistado pero aplicó la estrategia de valor unitario, donde evidencia un error de interpretación de las cantidades intensivas y como consecuencia da una respuesta equivocada al problema.



2. Paula y sus compañeros preparan jarabe de tamarindo para los raspados de la kermés.

En la botella de tapa verde pusieron 3 tazas de agua y 5 cucharadas de concetrado de jarabe.

En la botella de tapa naranja pusieron 8 tazas de agua y 10 cucharadas de concentrado de jarabe.

En la botella de tapa roja pusieron 6 tazas de agua y 8 cucharadas de concentrado de jarabe.

Lupe dice que el jarabe que tiene más sabor es el de la botella de tapa naranja. Pepe dice que el que tiene más sabor es el de la botella de tapa verde. ¿Quién tiene razón? ______

¿Por qué? ______

Coméntalo con tus compañeros.

3. Pedro y sus amigos preparan bolsas de dulces para la kermés. Escoge, de entre las etiquetas siguientes, cuáles deben llevar las bolsas que prepararon Pedro y sus amigos y colócalas en las bolsas que corresponda. Fíjate bien, porque van a sobrar etiquetas.

Figura 30. Procedimiento del caso 8-C2 al problema 2

En la *Figura 30 s*e pueden apreciar las divisiones que el profesor realiza con el fin de resolver el problema, sin embargo, al momento de interpretar y comparar el cociente de sus divisiones tiene dos complicaciones: una con la interpretación de las cantidades intensivas y otra con la comparación de números decimales. En cuanto a la primera complicación el profesor opta por elegir la cantidad que cree mayor, sin considerar lo que representa esa cantidad (tazas de agua por cucharada de concentrado), por tanto su respuesta es fallida. En cuanto a la segunda complicación, el profesor hace una equivocada interpretación de los números decimales, ya que los compara como si se tratara de naturales. Los cocientes obtenidos de las divisiones fueron 0.6, 0.8 y 0.75, y de ellos consideró que el 0.75 es el número mayor de los tres.

Por tal razón en su respuesta señala que nadie tiene razón porque es la tercera mezcla la que tiene más sabor.

Un caso similar al anterior es la profesora *caso 11-C3* (*Figura 31*), ya que también interpreta incorrectamente las cantidades intensivas surgidas de la estrategia de valor unitario aplicada.

La profesora, para resolver el problema, establece la relación entre el par de números de cada mezcla y lo expresó mediante fracciones (3/5, 8/10 y 6/8). Aunque las fracciones obtenidas pueden representar valores unitarios, no son vistas así por la profesora, ya que no les da un significado bajo el cual apoyarse para resolver el problema. Esta falta de comprensión de lo que representaban las fracciones obtenidas provocó que la profesora sólo se centrara en la fracción mayor.

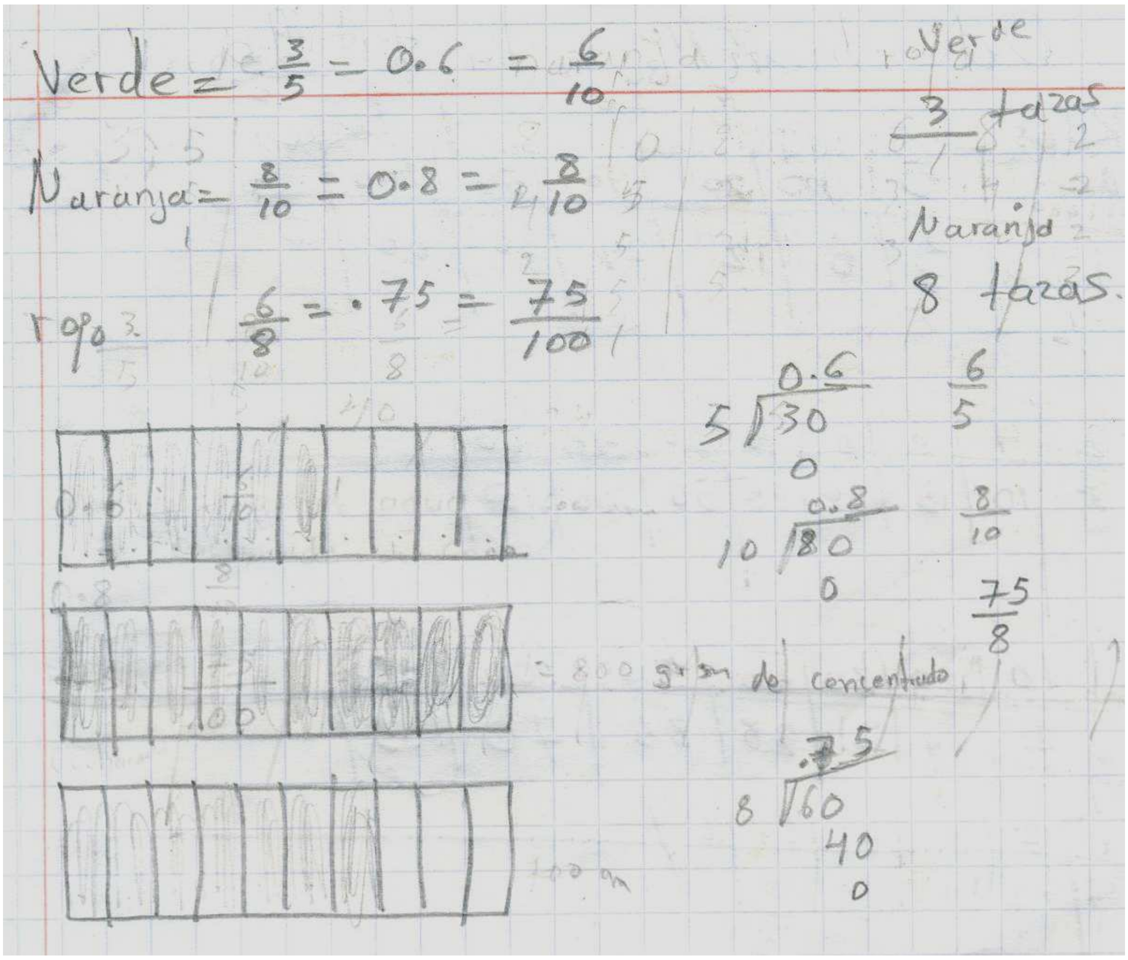
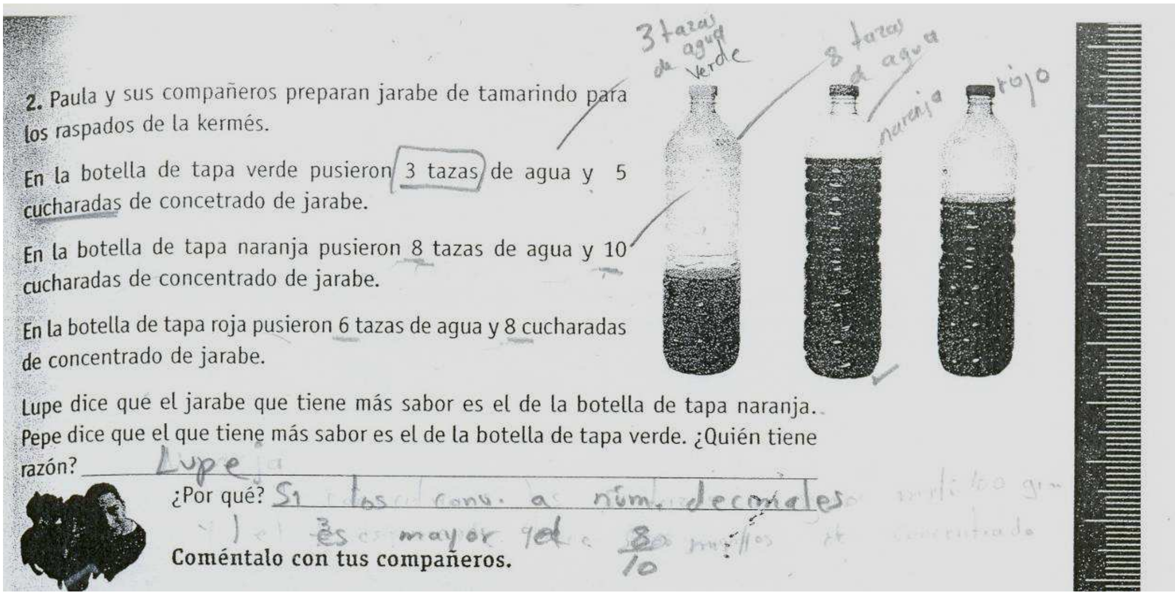


Figura 31. Procedimiento del caso 11-C3 al problema 2

Tras la dificultad para comparar las primeras fracciones para decidir cuál es mayor, opta por convertirlas a decimales (0.6, 0.8 y 0.75), para luego nuevamente convertirlas a fracciones siguiendo algunas características de los decimales. Estas conversiones de fracción a decimal y de decimal a fracción muestran sus conocimientos del algoritmo de la división y de lo que representan los números decimales según el lugar que ocupan, pero también da cuenta de una falta de dominio en identificar el tamaño que representan las fracciones. Otro apoyo en el que se basa la profesora para decidir cuál es la fracción mayor, fue mediante la representación de las fracciones en dibujos que le permitieran ver cuál era la fracción mayor.

Ante esta forma de proceder quiero señalar algunas implicaciones que limitarían el trabajo del profesor: una referida a la representación gráfica de las fracciones porque ¿qué hubiese pasado si entre las fracciones hubiera tan poca diferencia que dibujarla no fuera suficiente para distinguirla visualmente? Otra encaminada a la creación de fracciones equivalentes, porque ¿qué hubiese pasado si en la conversión de fracciones a decimales hubiese obtenido números periódicos? Tal vez no fuera exitoso su procedimiento para convertirlos a fracciones nuevamente.

A pesar de las múltiples formas, utilizadas por la profesora, para comparar las fracciones no supo interpretar el significado de las mismas por lo que su respuesta es incorrecta (*Figura 32*). La profesora no se equivocó en decidir cuál fracción era la mayor, pero por la falta de una correcta interpretación de las fracciones, como cantidades intensivas, provocó que errara en su respuesta: “Lupe, porque si los convertimos a números decimales es mayor el 8/10”.


2. Paula y sus compañeros preparan jarabe de tamarindo para los raspados de la kermés.

En la botella de tapa verde pusieron 3 tazas de agua y 5 cucharadas de concetrado de jarabe.

En la botella de tapa naranja pusieron 8 tazas de agua y 10 cucharadas de concentrado de jarabe.

En la botella de tapa roja pusieron 6 tazas de agua y 8 cucharadas de concentrado de jarabe.

Lupe dice que el jarabe que tiene más sabor es el de la botella de tapa naranja. Pepe dice que el que tiene más sabor es el de la botella de tapa verde. ¿Quién tiene razón? Lupe

¿Por qué? Si los conv. a núm. decimales

es mayor que 8/10

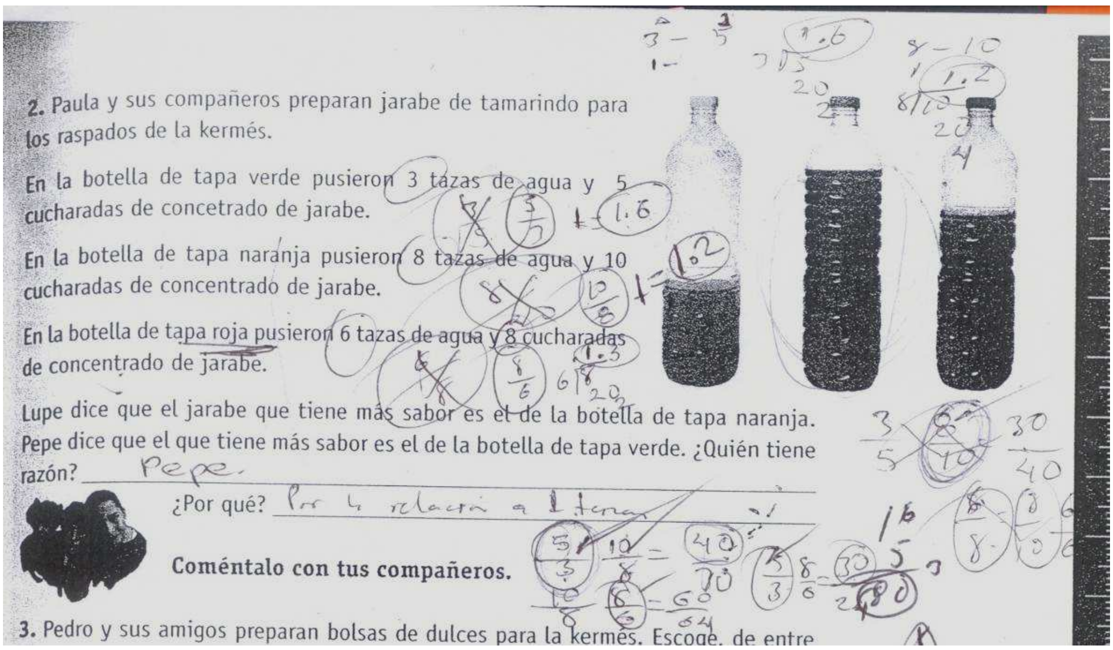
Coméntalo con tus compañeros.

Figura 32. Respuesta del caso 11-C3 al problema 2

El profesor caso 15-C3 utiliza la estrategia de valor unitario, pero para obtenerlo se vale de la *regla de tres (Figura 33)*. Este profesor realiza la comparación tanto en números decimales como fraccionarios y explica por qué se debe elegir una relación en lugar de otra (p. ej. 5/3 en lugar de 3/5), es decir, interpreta de manera correcta las cantidades intensivas obtenidas.

> *E6*: … igual una regla de 3 simple, nada más divides 5 entre de 3, te toca a 1.6, entonces una taza… de… de es… de esta tapa verde tiene 1.6 de jarabe. La otra que tiene 8 de agua y 10… 10 cucharadas de concentrado y te toca a 1.2 que es igual a una taza. La otra es de 6 tazas, 8 de concentrado, divides 8 entre de 6, te toca a 1.3.
>
> Tú te das cuenta… cuál taza está más concentrada, en este caso sería la de 1.6 que es la… la de tapa verde. 1.6, la otra es 1.2 y la otra es 1.3, pero ya lo hicimos con relación a uno… y lo puedes comprobar, bueno pero ese es otro rollo… compruebas tus… fracciones. Por ejemplo 5…tercios cómo es en relación a 10… octavos… para eso haces una regla… haces una…. Productos cruzados…
>
> *Entrevistador*: ¿Y aquí por qué 10 octavos?
>
> ***E6***: Ah porque este… Son… son 10 de jarabe y… y 8 tazas de agua. Son 10… 10 de 8 pues, o 10 para ocho como se le quiera entender.

Ahora si… yo me estaba equivocando acá porque le puse 5… 8 décimos, si tu quieres saber en relación a las tazas de agua sería 8 décimos, 8 de 10 o 8 para 10 pues por eso le puse una tache, aquí lo que pregunta es el jarabe, no pregunta l… las tazas de agua. Entonces ahora no más, tu por ejemplo dices bueno… aquí salió por ejemplo que 5… al revés, cinco quintos *(se refiere a 3/5)* en relación a 8 décimos, es mayor 8 décimos, pero ese… ese lo que… es mayor porque aquí tiene más agua nada más. Si preguntas en relación al agua este tiene más agua (*tapa naranja*). No es porque esté el nivel acá, sino porque en realidad tiene más agua y tiene menos jarabe. Entonces si pregunta por el jarabe tengo que voltear la fórmula… 5/3 en relación a 8… a 10/8… entonces me sale que, con producto cruzado… entonces me sale que la primera fracción es mayor, o sea 5/3 es mayor que 8… que 10/8, si voltean lo números este es mayor (Entrevista ABEJOR101105, pp. 7-8).


2. Paula y sus compañeros preparan jarabe de tamarindo para los raspados de la kermés.

En la botella de tapa verde pusieron 3 tazas de agua y 5 cucharadas de concetrado de jarabe.

En la botella de tapa naranja pusieron 8 tazas de agua y 10 cucharadas de concentrado de jarabe.

En la botella de tapa roja pusieron 6 tazas de agua y 8 cucharadas de concentrado de jarabe.

Lupe dice que el jarabe que tiene más sabor es el de la botella de tapa naranja. Pepe dice que el que tiene más sabor es el de la botella de tapa verde. ¿Quién tiene razón? Pepe.

¿Por qué? Por la relación a 1 taza

Coméntalo con tus compañeros.

3. Pedro y sus amigos preparan bolsas de dulces para la kermés. Escoge, de entre

Figura 33. Procedimiento del caso 15-C3 al problema 2

El profesor, al igual que las profesoras de los casos 6-C3 y 32-C3, da con la solución a partir del valor unitario (cucharadas de concentrado por taza de agua), pero a diferencia de las maestras este profesor utiliza la *regla de tres* para hallarlo, aunque sólo lo hace en las dos primeras mezclas como se aprecia en la *Figura 30*, ya que para las otras mezclas no la utiliza (3 – 5, entonces 1 – x). Parece darse cuenta que con la *regla de tres* resulta lo mismo al dividir directamente 5 entre 3 (1.66), por lo cual en los otros casos ya no tiene que plantear la regla, sino sólo divide 10 entre 8 (1.25) y 8 entre 6 (1.33). A partir de los resultados de las divisiones decide que la botella de tapa verde tiene más sabor (5/3) que la botella tapa naranja (10/8).

Como lo señalé, el profesor interpreta las cantidades intensivas correctamente, además explica las razones de elegir una forma de relacionar las cantidades y no otra: 5/3 y 10/8 en lugar de 3/5 y 8/10. Porque, según él, una está expresada en relación al jarabe y otra en relación al agua y “si pregunta por el jarabe”- dice el profesor- “entonces no puede utilizarse la relación que indica la cantidad de agua (3/5 y 8/10)”, aunque bien podría usarse.

De hecho el profesor menciona que si hubiera tomado la relación inversa a la elegida (3/5 Y 8/10) hubiera dado como resultado la razón de agua por cucharada, entonces 8/10 sería mayor, lo que significaría que a cada cucharada de concentrado de la botella tapa naranja tendría más agua que una cucharada de concentrado de la botella de tapa verde: “aquí salió por ejemplo que 5… al revés, 5 quintos *(se refiere a 3/5*) en relación a 8 décimos, es mayor 8 décimos, pero ese… ese lo que… es mayor porque aquí tiene más agua nada más. Si preguntas en relación al agua este tiene más agua (*tapa naranja*)”. Tiene razón en lo que dice, pero con ese resultado “en relación al agua” también puede deducirse la respuesta correcta porque si la proporción de agua es mayor en la botella de tapa naranja que en la botella de tapa verde, entonces la verde tiene más sabor, ya que aquí la fracción menor da cuenta de lo que demanda el problema.

He señalado algunas consideraciones de que la tabla de variación proporcional, en algunos casos, sirve como forma para comprobar si hay proporción y dar afianzamiento a sus resultados, así también, otro recurso utilizado en este caso fue los "productos cruzados". Aquí el profesor indica que con los "productos cruzados" se prueba cuál fracción es mayor 5/3 o 10/8, y según él es "otro rollo".

Aunque aplicó la regla de los productos cruzados la decisión de su respuesta estuvo en base al valor unitario expresado con números decimales. Pero ¿por qué no dio respuesta a partir de aplicar los productos cruzados desde el principio? Una posible respuesta es porque la utilización de los productos cruzados debería involucrar un conocimiento del por qué son así y no sólo verla como una regla mágica. Porque esta situación de desconocimiento del fundamento de la regla provoca inseguridad en el resultado y opta por validar su respuesta mediante una forma más comprensible, que en este caso es el valor unitario.

La comprensión de los productos cruzados pasa por la comprensión de la propiedad fundamente de la proporción "el producto de los medios es igual al producto de los extremos" ($a/b = c/d$ entonces $ad = cb$) La proporción es una igualdad de razones $a/b = c/d$, entonces si ambas razones son multiplicadas por *n*, se mantiene la proporción, $a/b(n) = c/d(n)$. Entonces $a/b(b)(d) = c/d(b)(d)$, despejando tenemos que $ad = cb$. Ahora si se trata de una desigualdad, como es ahora el caso, y aplicamos las mismas operaciones también se mantiene la desigualdad $a/b < > c/d = ad < > bc$.

Los productos cruzados se han utilizado como fórmulas, pero sin comprenderlos al igual que la regla tres. Esta incomprensión es resultado de la forma en que se enseña a los estudiantes, como lo señale en el análisis de los libros de texto, se promueve su utilización sin los antecedentes que lleven a su comprensión. Entonces el recurso de los productos cruzados, aplicado por los profesores para comparar fracciones, necesita de una comprensión de la propiedad de la proporción y de la semejanza de fracciones, las cuales no son poseídas por los profesores y por tanto parecen ser "mágicas".

Los sujetos hacen uso de procedimientos comprendidos por ellos, aunque sean los menos sofisticados. Ya que la aplicación de fórmulas o algoritmos, como los productos cruzados, a los que les tienen fe, sólo les sirven para comprobar las respuestas o en la búsqueda de la solución las ponen a prueba y elegir la que les convenza. Por tal razón, investigadores como Lesh y Behr (1988), mencionan que la aplicación de tales procedimientos, como la regla de tres, no implica un razonamiento proporcional, y agrego, tampoco lo desarrollan, aunque nuestras intenciones didácticas sean esas.

En la investigación surgieron casos muy interesantes que, al igual de los que utilizaron el valor unitario, aplicaron estrategias que muestran la comprensión de la razón y proporción, además dan pautas para promover otras estrategias en los libros de texto, y no sólo el valor unitario. Ese tipo de estrategias las señalo en el siguiente apartado.

Generación de pares equivalentes

Esta estrategia surgió ante el problema de comparación de razones y consiste en crear pares equivales de razones hasta igualar un término de las razones comparadas. Con esta estrategia los profesores evitaron comparar fracciones o números decimales y la interpretación de cantidades intensivas, por lo tanto quienes lo hicieron de esta manera dieron una respuesta correcta.

El profesor caso *36-C3* hace uso de esta estrategia (*Figura 34*) con lo cual evitó la dificultad de trabajar con fracciones y cantidades intensivas, pero muestra su conocimiento implícito sobre equivalencia de razones, lo que puede ser la base para comprender fórmulas como los productos cruzados y la *regla de tres*.

Entrevistador. ¿Y en este segundo punto del concentrado, cuál tenía más sabor?

E4: Lo que pasa que yo aquí usé las equivalencias. De acuerdo a una… tabla de variación proporcional nos fuimos…a buscar el número…número igualitario en…primer dato. Por decir en uno dice: tres tazas…cinco cucharadas de concentrado. En uno dice con… tres tazas… me dan…tiene tres tazas y cinco cucharadas…

E3. ¡de jarabe!

E4: (*escribe en una hoja*)…bueno éstas (3) son… tazas vamos a decir ¿no? Y éstas son… jarabe (5)…

E3: Jarabe…

E4: …¿sale? Este es…tengo una tapa. En la otra es…ocho y diez (*escribe*) y en la otra es…seis… y ocho…

E3: (*esta leyendo mientras E4 está hablando*) en la botella de tapa verde se pusieron tres tapas de agua…

E4: …ahora, lo que se hizo es…buscar un número equivalente entre los tres ¿sí? Por decir nosotros… les decíamos que…por qué número podíamos multiplicar y encontrar este…un equivalente. Entonces decíamos no, si nos vamos al mayor número me va a dar 24… para que me de 24, bueno ¿por cuánto multiplico esto? ¡bueno! Por tres ¿no? Y ya me da 24…24 ¿sí? O sea lo estoy multiplicando aquí por tres. Pero aquí también debo de encontrar otro 24 ¿por cuánto debo de…?...bueno aquí 24 y 24 pues… o sea que sea el…el mismo este… múltiplo, 24, 24, pero para que me de 24 yo lo multiplico por tres entonces ese tres lo debo de utilizar también por el segundo este… que es el jarabe, tres por diez me tiene que dar treinta.

Y ya encuentro aquí por decir, 24, 30 ¿no? Aquí…si tenía seis y quiero 24 ¿pues por cuánto voy a multiplicar? Por cuatro, ese mismo cuatro lo multiplico por el ocho y aquí van a haber 32. Ahora ya tengo aquí 24, 32.

En este igual tengo 3 y quiero tener 24, ¿sería por 8, no? Aquí ese 8 por el 5, me va a dar 40 y aquí me da 24. Y ya encontramos para que sea igual…en todos, pero ahí ya vemos la diferencia ¿sí? ¿Cuál tiene más jarabe? 40, 30 y 32 con…teniendo…vamos a decir el…las mismas tazas ¿no? ¡De agua! Las mismas tazas ya, ya fueron 24, 24…ya, ya lo convertimos a… lo igualamos pues…a 24. Entonces sí, ahora ya nos damos cuenta cuál es. Es la 24 y este… y 40 que…que en este caso lo decía este… Pepe…Pepe era el que tenía la razón porque nosotros ya…lo comparamos, pero también se puede hacer una tablita de variación proporcional, pero…hacer… ¡de tres entradas pues! las tres comparaciones… la duda, la duda era aquí quién era la tapa verde, quién era la tapa…pero ya cuando…cuando ya vimos a colores… ¡a no pues esta es! (Entrevista NORERI111105, p. 8)-

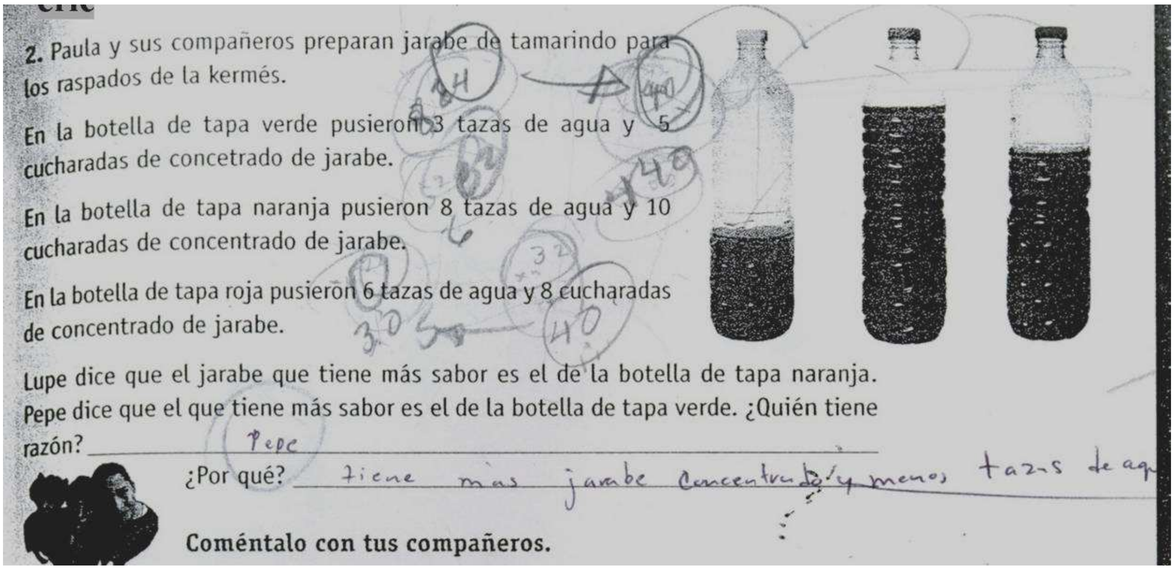


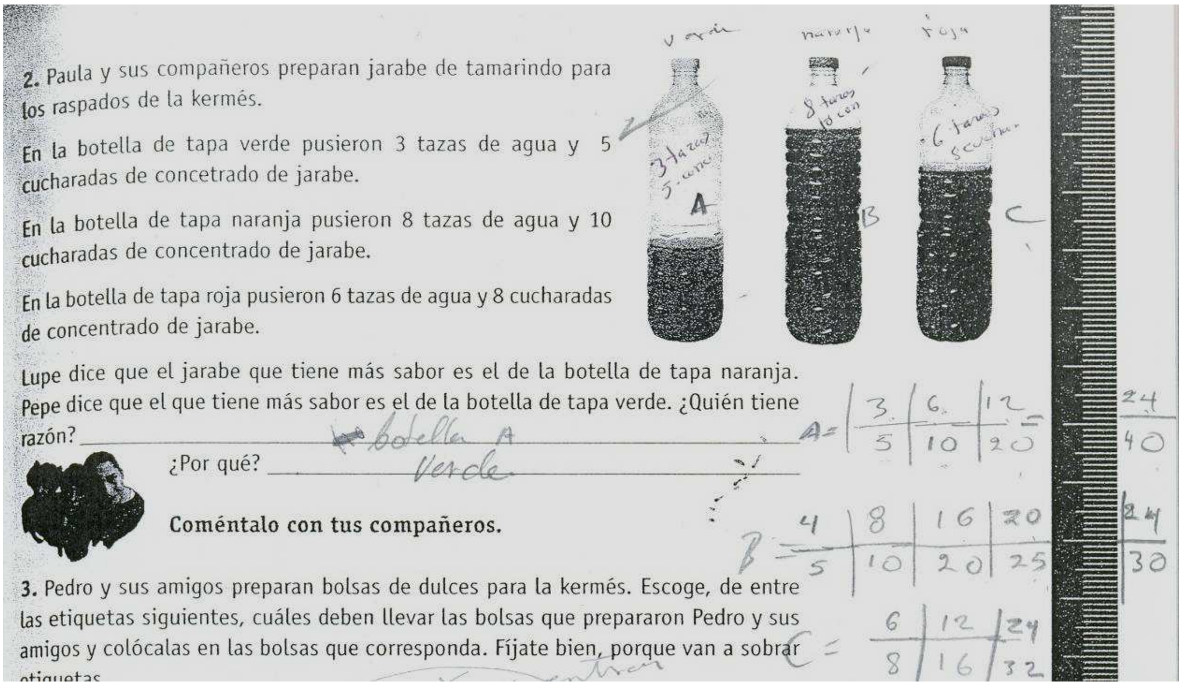
Figura 34. Procedimiento del caso 36-C3 al problema 2

El profesor obtiene, a partir de las razones dadas en el problema, sus equivalentes, de tal forma que un término de cada razón coincidiera. En términos del problema, igualaron la cantidad de tazas de agua. Ahora bien, en la obtención de razones equivalentes ocurrió un proceso escalar, ya que aplica factores que establecen la relación entre iguales espacios de medida y así obtiene las razones equivalentes. En el procedimiento seguido el profesor evidencia un conocimiento importante relacionado con la semejanza de razones: r(a:b) = r(an:bn). Esta creación de razones equivalentes le permitió hacer la comparación más fácil. Veamos, las razones dadas fueron 3:5, 8:10 y 6:8, a partir de ellas, mediante la aplicación de distintos factores (8, 3 y 4), obtuvo: **24** : 40; **24** : 30; y **24** : 32 respectivamente. Como es notorio cada factor lo aplica a ambos términos de cada razón, es por lo cual señalo que el profesor tiene conocimientos de la propiedad, antes mencionada, sobre equivalencia de razones. De esta manera es como obtiene razones más fáciles de comparar, puesto que coinciden en un término y por tanto elige la mezcla que cumple con lo demandado en el problema: la que tuviera más sabor.

Esta forma de proceder es opuesta a la de valor unitario. Para obtener el valor unitario lo que se hace es obtener el cociente de los dos números puestos en relación funcional, ya sea entero, fracción o decimal. El valor unitario corresponde a la cantidad de algo que le corresponde a una unidad, es decir se simplifica la relación dada, por ejemplo: de la relación 3 tazas a 5 cucharadas se obtiene que es 3/5 o 0.6 tazas por cucharada. Mientras la estrategia de creación de razones equivalentes consiste en aplicar un operador que iguale algún término de las razones comparadas, sin ser necesariamente uno. Ahora bien, existe semejanza entre las dos estrategias, puesto que en las dos se iguala un término de la razón y se decide en base al segundo. Según Lamon (1996) los sujetos interpretan el problema en términos de la unidad de referencia que puede ser simple como el valor unitario, o bien compuesta como es 3 a 5, retomo este planteamiento porque este profesor trabaja con unidades compuestas y así evita trabajar con fracciones.

Otro aspecto, que me parece importante de señalar, es que el problema de la incorrecta interpretación de cantidades intensivas, cuando se trabaja con valores unitarios y en un problema de comparación, está dado porque la relación se simplifica a la unidad y se pierde claridad. Por ejemplo: en la relación 3 a 5 los profesores obtienen el valor unitario 3/5 o 0.6, entonces este cociente lo ven como un número aislado y no en relación como debería ser: 3/5 a 1 o 0.6 a 1. Sin embargo, cuando se crean pares equivalentes, como lo realiza en este caso, en ningún momento se pierde algún término de la razón (24 a 40), ambos se modifican simultáneamente y al final resulta más sencilla la comparación.

Otro profesor, *caso 21-C2,* utiliza esta estrategia (*Figura 35*). La estrategia aplicada es la misma, pero difiere en cómo crear las razones semejantes. Mientras que en el caso anterior iguala un término de cada razón mediante la aplicación de distintos factores escalares, en este caso el profesor lo hace aditivamente con la construcción de tablas de variación proporcional. Sin embargo, al igual que el caso anterior, no pierde de vista a qué corresponde cada término de la relación (razón), por lo cual es fácil determinar cuál botella tiene más sabor. Los resultados obtenidos son: 24/40, 24/30 y 24/32, entonces el agua de la botella verde tiene más sabor porque a la misma cantidad de tazas le ponen más cucharadas. La forma de proceder en los dos casos, hasta ahora mostrados, ilustran una estrategia importante para evitar dificultades con la interpretación del valor unitario (como cantidad intensiva), porque en lugar de reducir la relación a la unidad, obtienen múltiplos (unidades compuestas), donde también igualan un término y no se pierde el significado de la relación. Por otro lado, evitan la complejidad de las fracciones. Mi intención no es decir que evitar el uso de fracciones sea la mejor opción, pero puede ayudar a la comprensión de otras propiedades de la proporción, de tal manera de apoyar el razonamiento proporcional.



2. Paula y sus compañeros preparan jarabe de tamarindo para los raspados de la kermés.

En la botella de tapa verde pusieron 3 tazas de agua y 5 cucharadas de concetrado de jarabe.

En la botella de tapa naranja pusieron 8 tazas de agua y 10 cucharadas de concentrado de jarabe.

En la botella de tapa roja pusieron 6 tazas de agua y 8 cucharadas de concentrado de jarabe.

Lupe dice que el jarabe que tiene más sabor es el de la botella de tapa naranja. Pepe dice que el que tiene más sabor es el de la botella de tapa verde. ¿Quién tiene razón? botella A

¿Por qué? Verde

Coméntalo con tus compañeros.

3. Pedro y sus amigos preparan bolsas de dulces para la kermés. Escoge, de entre las etiquetas siguientes, cuáles deben llevar las bolsas que prepararon Pedro y sus amigos y colócalas en las bolsas que corresponda. Fíjate bien, porque van a sobrar etiquetas

A = 3/5 | 6/10 | 12/20 | 24/40

B = 4/5 | 8/10 | 16/20 | 20/25 | 24/30

C = 6/8 | 12/16 | 24/32

Figura 35. Procedimiento del caso 21-C2 al problema 2

Otro procedimiento semejante es el *caso 29-C2,* profesora de segundo ciclo que no fue entrevistada. El desarrollo de su estrategia (*Figura 36*) consiste en simplificar las razones para hacer coincidir uno de sus términos: La primera relación es de 3 tazas con 5 cucharadas; la segunda es de 8 tazas con 10 cucharadas, la simplifica a 4 con 5; y la tercera de 6 tazas con 8 cucharadas, la simplifica a 3 con 4. A partir de la simplificación compara las razones 3-5, 4-5 y 3-4, al comparar las dos primeras, que son las que señalan los personajes del problema (pepe y Lupe), identifica que por la misma cantidad de cucharadas existe más agua en la segunda mezcla, por lo tanto indica en su respuesta que la mezcla señalada por Pepe (3 a 5) es la que tiene más sabor “porque tiene menos agua y más concentrado” que la otra mezcla (4 a 5).

En la *Figura 36* se aprecian indicios de una diferencia aditiva, sin embargo su respuesta es en base al procedimiento de creación de pares equivalentes de razones, por lo cual lo consideré como un primer razonamiento descartado por el mismo sujeto.

El procedimiento de este profesor difiere un poco del anterior, ya que identifica que algún término de cada razón es múltiplo o divisor, de ahí que no necesite igualar algún término de las tres razones mediante un común múltiplo, sino alterna según las razones que compare. Por ejemplo 3:5 con 4:5 y otra pudo ser 3:5 con 3:4. A pesar de las deducciones hechas descarta la posibilidad de comparar la segunda y tercera razón (4:5 con 3:4), es decir, descarta una posible respuesta y se centra en decidir cuál de las dos primeras razones es mayor, claro que en base a lo pedido en el problema. Una vez más es evidente que la profesora nunca pierde de vista lo que representa cada razón y por tanto su respuesta es acertada, es decir, resuelve el problema.

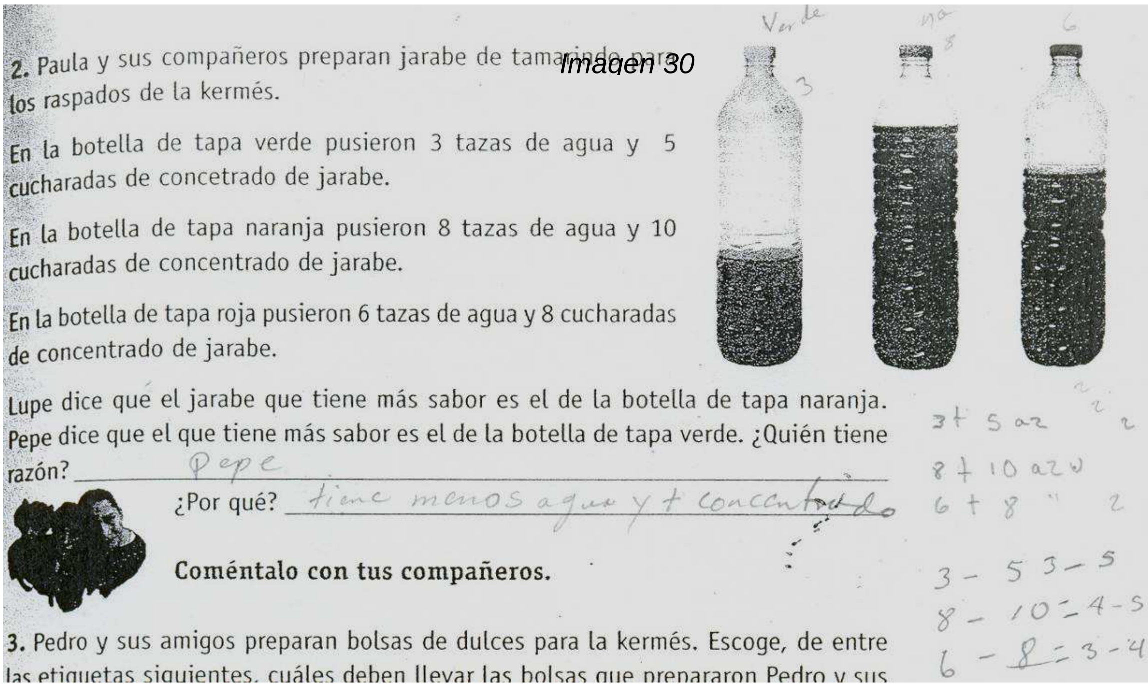


Imagen 30

2. Paula y sus compañeros preparan jarabe de tamarindo para los raspados de la kermés.

En la botella de tapa verde pusieron 3 tazas de agua y 5 cucharadas de concetrado de jarabe.

En la botella de tapa naranja pusieron 8 tazas de agua y 10 cucharadas de concentrado de jarabe.

En la botella de tapa roja pusieron 6 tazas de agua y 8 cucharadas de concentrado de jarabe.

Lupe dice que el jarabe que tiene más sabor es el de la botella de tapa naranja. Pepe dice que el que tiene más sabor es el de la botella de tapa verde. ¿Quién tiene razón? Pepe

¿Por qué? tiene menos agua y + concentrado

Coméntalo con tus compañeros.

3. Pedro y sus amigos preparan bolsas de dulces para la kermés. Escoge, de entre las etiquetas siguientes, cuáles deben llevar las bolsas que prepararon Pedro y sus

3 - 5 3 - 5
8 - 10 = 4 - 5
6 - 8 = 3 - 4

Figura 36. Procedimiento del caso 29-C2 al problema 2

Algunas dificultades en la resolución de este problema han estado relacionados una falta en el reconocimiento del significado de las cantidades intensivas cuando se trabajó con valores unitarios, otra dificultad estuvo en interpretar correctamente números decimales. A pesar de las dificultades presentadas por los profesores existen nociones de la variación proporcional en ellos, muestra de ello es que decidan obtener el valor unitario o bien mediante la búsqueda de razones semejantes que faciliten la comparación. Por otra parte, existieron casos donde el razonamiento proporcional no aparece y entonces surgen estrategias como la diferencia aditiva.

Diferencia aditiva

La diferencia aditiva o estrategia aditiva incorrecta es una estrategia errónea encontrada en la literatura sobre el tema. En los dos problemas anteriores no se utilizó esta estrategia, pero resultó que ante el problema de comparación de razones surgieron algunos casos que la aplicaron. Los profesores que la utilizaron dejaron ver una carencia de razonamiento proporcional, o bien una falta de herramientas matemáticas que les permitiera resolver el problema.

La profesora caso 7-C3 es un ejemplo de la aplicación de esta estrategia (*Figura 37*). Esta profesora había aplicado la estrategia de valor unitario en los problemas anteriores, también se valió de apoyo pictográfico en el problema 1a'. Aunque en los anteriores problemas aplicó estrategias adecuadas y que mostraron su razonamiento proporcional, en este problema no halló una estrategia adecuada.

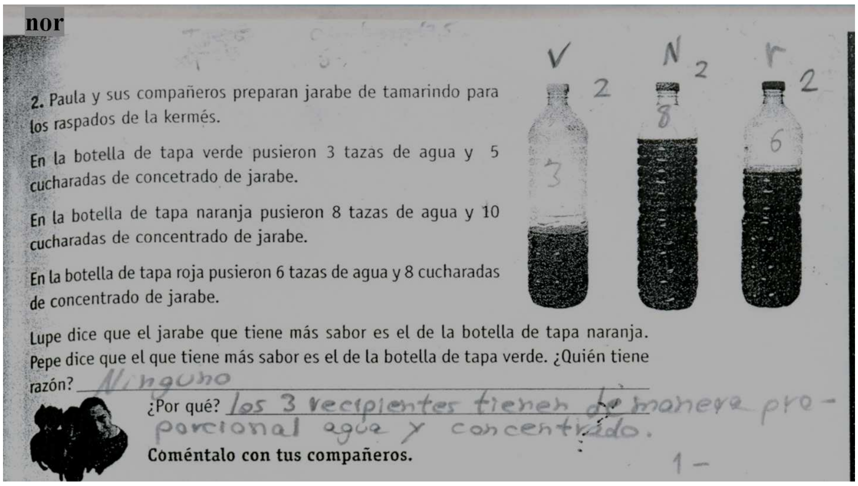
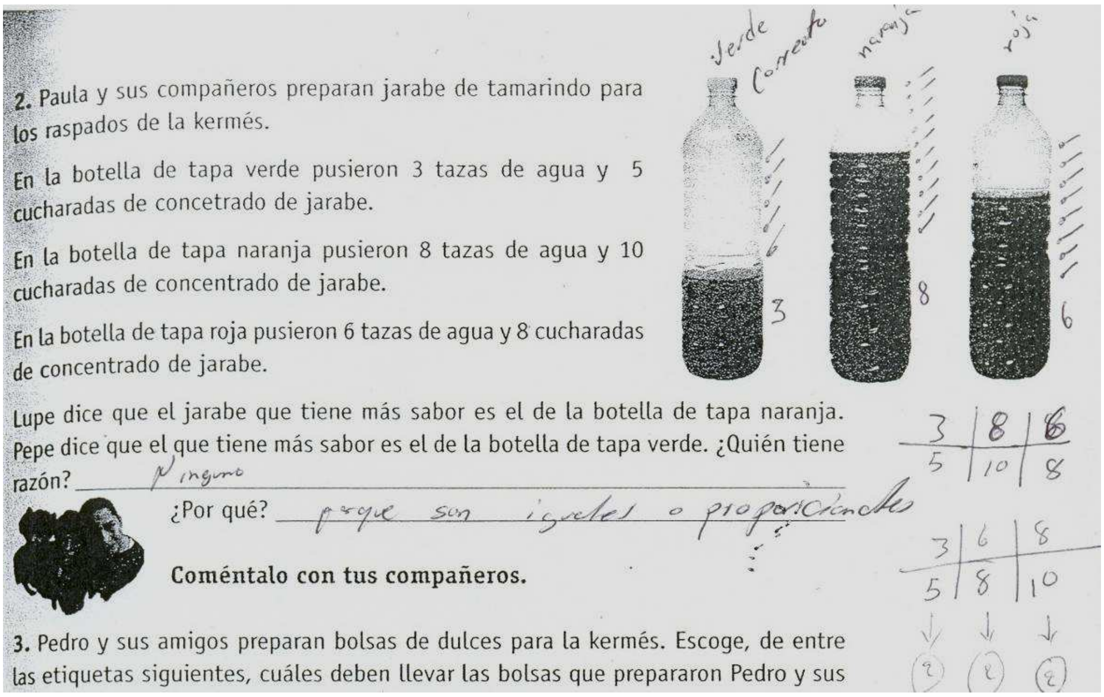


Figura 37. Procedimiento del caso 7-C3 al problema 2

En la *Figura 37* es visible que en la parte superior de cada botella coloca un número 2, el cual representa la diferencia entre los términos de cada relación: la diferencia de 3 y 5 es 2, la de 8 y 10 es 2 y la de 6 y 8 es 2. A partir de tal deducción responde que “Ninguno, porque los 3 recipientes tienen de manera proporcional agua y concentrado”. La carencia de herramientas la hizo buscar regularidades entre los números involucrados, de tal forma que diera una respuesta que le pareciese coherente, aunque sin comprender de manera correcta el significado de las diferencias halladas.

> *E3*: (leyendo) Lupe dice que el jarabe que tiene más sabor es el de la botella de tapa naranja… y abajo que la botella verde.
> Si porque si aquí pusieron…tres tazas de agua y…cinco cucha…radas de concentrado…aja…si aquí a 3… vimos la… de 3 para cinco 2; aquí igual dice…que pusieron ocho tazas de agua…y el concentrado independientemente de lo que le… de las 10 cucharadas igual nada más este…restamos de 8…sí, de 8 a las 10 cucharadas…igual este…hay de diferencia 2; en la otra igual, de seis tazas de agua, le restamos a 8 y hay de diferencia otros 2. Entonces decíamos bueno lo que…hay de… diferencia es 2, 2, 2, entonces tienen la misma cantidad de concentrado. Estimando nos fuimos también.
> *Entrevistador*: y…
> *E3*: Aja. Y si prueba aunque esta tenga más este…tazas de a…menos tazas de agua, igual tazas de agua, tiene la misma cantidad de jarabe….de… aplicado para nosotros (Entrevista NORERI111105, p. 8).

El uso de dibujos, de tal forma de concretizar lo más posible los datos del problema, es una característica en la solución de algunos profesores, como sucede con esta profesora, sin embargo cuando tales herramientas no evidencian la respuesta optan por buscar algunas relaciones numéricas que les parezcan coherentes. Este es el caso del profesor *caso 1-C2*, profesor no entrevistado, quien después dibujar las cucharadas de concentrado y al parecer no hallar respuesta al problema, opta por la diferencia aditiva (*Figura 38*).



2. Paula y sus compañeros preparan jarabe de tamarindo para los raspados de la kermés.

En la botella de tapa verde pusieron 3 tazas de agua y 5 cucharadas de concetrado de jarabe.

En la botella de tapa naranja pusieron 8 tazas de agua y 10 cucharadas de concentrado de jarabe.

En la botella de tapa roja pusieron 6 tazas de agua y 8 cucharadas de concentrado de jarabe.

Lupe dice que el jarabe que tiene más sabor es el de la botella de tapa naranja. Pepe dice que el que tiene más sabor es el de la botella de tapa verde. ¿Quién tiene razón? Ninguno

¿Por qué? porque son iguales o proporcionales

Coméntalo con tus compañeros.

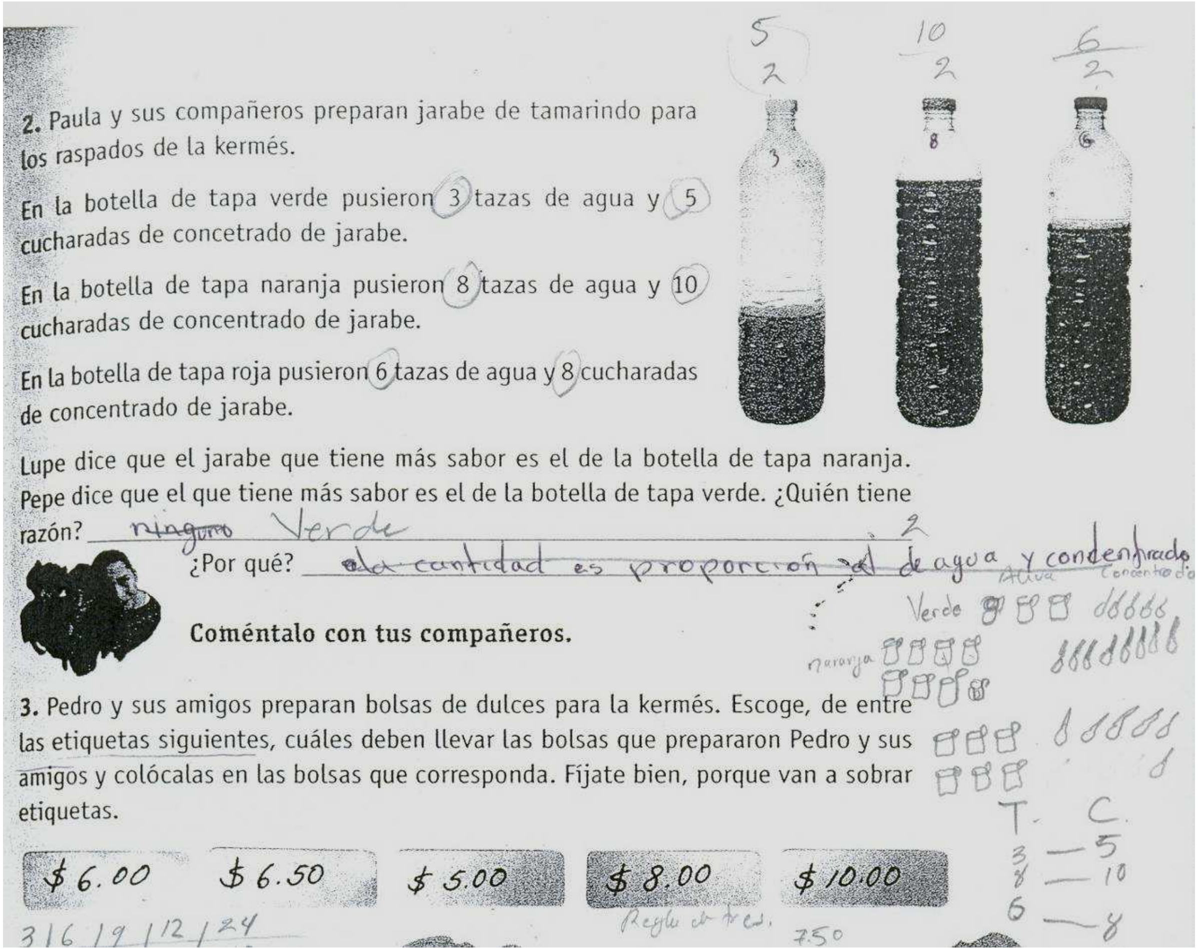
3. Pedro y sus amigos preparan bolsas de dulces para la kermés. Escoge, de entre las etiquetas siguientes, cuáles deben llevar las bolsas que prepararon Pedro y sus

3	8	6
5	10	8

3	6	8
5	8	10
2	2	2

Figura 38. Procedimiento del caso 1-C2 al problema 2

Otro caso que muestra la misma estrategia es el *9-C2*. En su procedimiento se vale de dibujos para representar las relaciones (tazas y cucharadas), pero al igual que el caso anterior no es la mejor opción y cae en la diferencia aditiva (*Figura 39*).



2. Paula y sus compañeros preparan jarabe de tamarindo para los raspados de la kermés.

En la botella de tapa verde pusieron 3 tazas de agua y 5 cucharadas de concetrado de jarabe.

En la botella de tapa naranja pusieron 8 tazas de agua y 10 cucharadas de concentrado de jarabe.

En la botella de tapa roja pusieron 6 tazas de agua y 8 cucharadas de concentrado de jarabe.

Lupe dice que el jarabe que tiene más sabor es el de la botella de tapa naranja. Pepe dice que el que tiene más sabor es el de la botella de tapa verde. ¿Quién tiene razón? ~~ninguno~~ Verde

¿Por qué? la cantidad es proporción de agua y condensado

Coméntalo con tus compañeros.

3. Pedro y sus amigos preparan bolsas de dulces para la kermés. Escoge, de entre las etiquetas siguientes, cuáles deben llevar las bolsas que prepararon Pedro y sus amigos y colócalas en las bolsas que corresponda. Fíjate bien, porque van a sobrar etiquetas.

$6.00 $6.50 $5.00 $8.00 $10.00

Figura 39. Procedimiento del caso 9-C2 al problema 2

Al igual que el caso anterior los dibujos no dieron el apoyo necesario para dar respuesta al problema, entonces opta por identificar la diferencia entre los términos de cada razón y los coloca en la parte superior de las botellas.

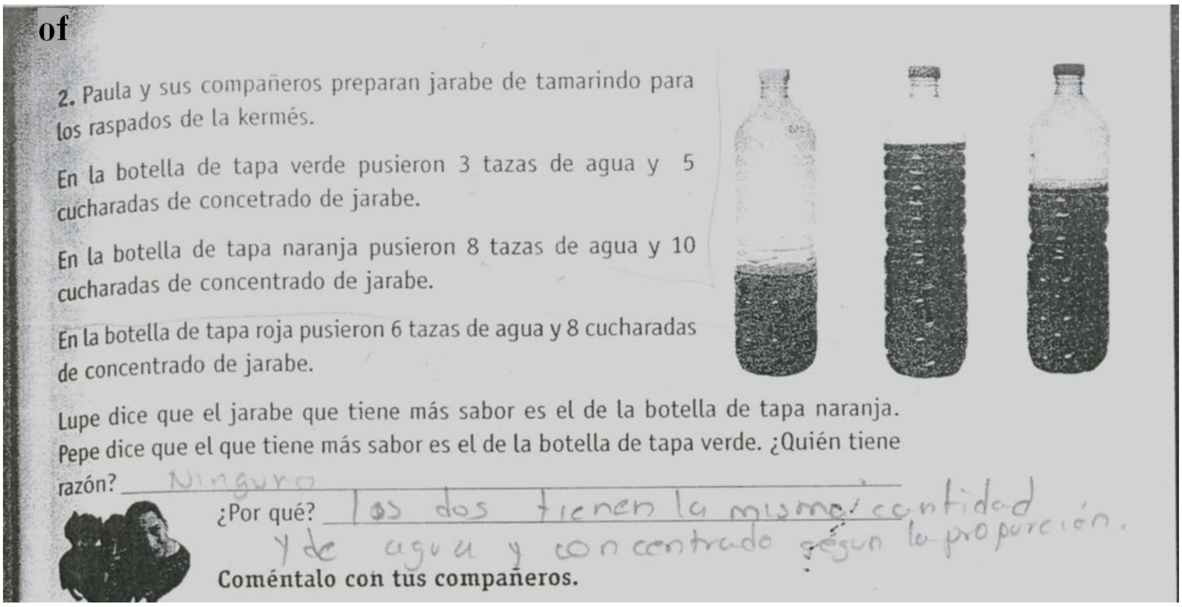
Un ejemplo más de este tipo de estrategia incorrecta (*Figura 40*) es la profesora caso *13-C2*, quien deduce su respuesta de manera similar al *caso 7-C3.*

Entrevistador: Ummm. ¿y usted cómo le hizo?

E7: Ah, porque yo vi por ejemplo que aquí… dije ¡bueno!... 3 tazas de agua… si son 3 tazas de agua… 3 tazas de concentrado, pero a esos le pusieron otros dos. Ahora, 8 tazas de agua son 10, igual 8 tazas de… 8 tapitas o ¿cómo son?... 8…

Entrevistador: cucharadas.

E7: 8 cucharadas, que da igual a una y le agregaron otras dos. Aquí igual, 6 tazas de agua y 6 cucharadas, le agregaron otras dos, por eso concluyo que…. Todas tienen igual pues. (Entrevista OFEFER111105, p. 11-12).


of

2. Paula y sus compañeros preparan jarabe de tamarindo para los raspados de la kermés.

En la botella de tapa verde pusieron 3 tazas de agua y 5 cucharadas de concetrado de jarabe.

En la botella de tapa naranja pusieron 8 tazas de agua y 10 cucharadas de concentrado de jarabe.

En la botella de tapa roja pusieron 6 tazas de agua y 8 cucharadas de concentrado de jarabe.

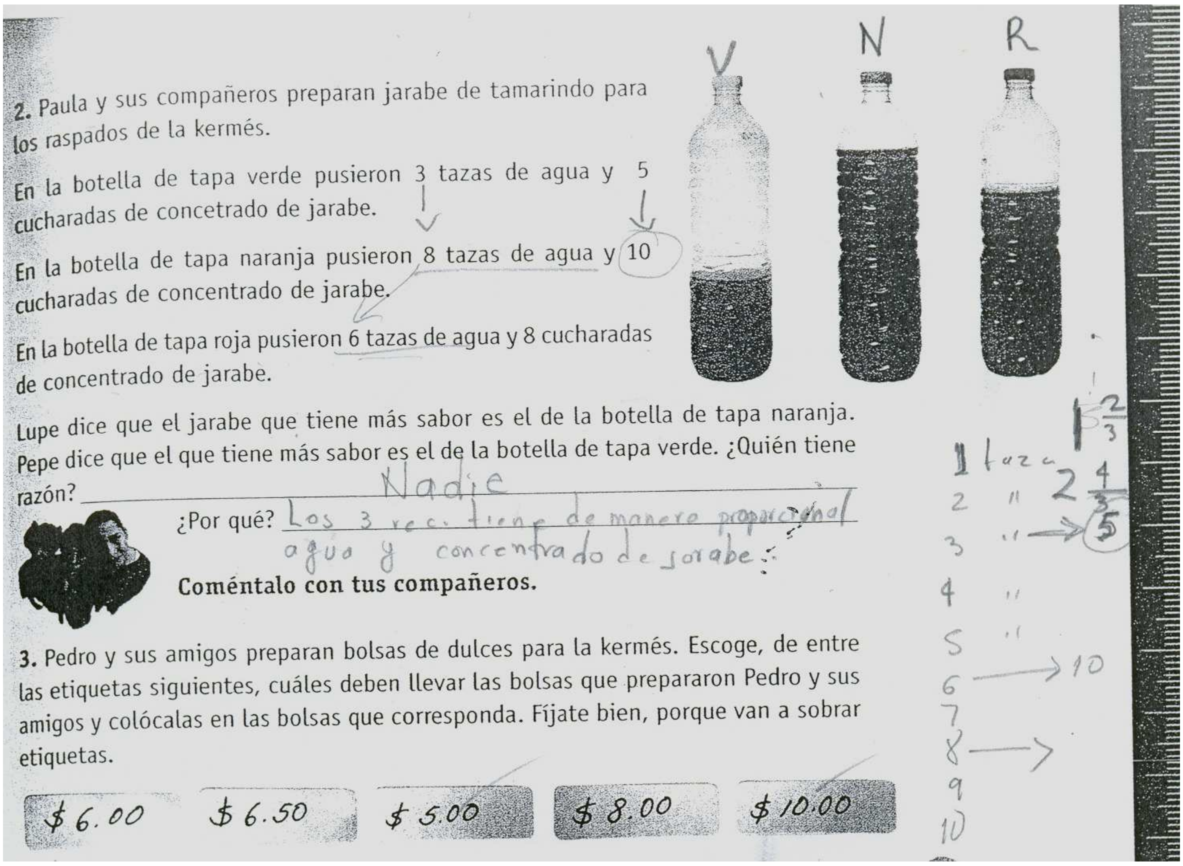
Lupe dice que el jarabe que tiene más sabor es el de la botella de tapa naranja. Pepe dice que el que tiene más sabor es el de la botella de tapa verde. ¿Quién tiene razón? Ninguno

¿Por qué? los dos tienen la misma cantidad y de agua y concentrado según la proporción.

Coméntalo con tus compañeros.

Figura 40. Respuesta del caso 13-C2 al problema 2

En los casos de diferencia aditiva, hasta ahora analizado, se han valido de relaciones funcionales (tazas con cucharadas), aunque su procedimiento sea incorrecto. Sin embargo, todo indica que existió un caso, también erróneo, donde la diferencia aditiva fue obtenida de relaciones escalares (*Figura 41*): la profesora *caso 34-C3*. En la siguiente imagen se aprecia la respuesta dada por la profesora "nadie, porque los 3 tienen de manera proporcional agua y concentrado de jarabe".



2. Paula y sus compañeros preparan jarabe de tamarindo para los raspados de la kermés.

En la botella de tapa verde pusieron 3 tazas de agua y 5 cucharadas de concetrado de jarabe.

En la botella de tapa naranja pusieron 8 tazas de agua y 10 cucharadas de concentrado de jarabe.

En la botella de tapa roja pusieron 6 tazas de agua y 8 cucharadas de concentrado de jarabe.

Lupe dice que el jarabe que tiene más sabor es el de la botella de tapa naranja. Pepe dice que el que tiene más sabor es el de la botella de tapa verde. ¿Quién tiene razón? Nadie

¿Por qué? Los 3 rec. tiene de manera proporcional agua y concentrado de jarabe.

Coméntalo con tus compañeros.

3. Pedro y sus amigos preparan bolsas de dulces para la kermés. Escoge, de entre las etiquetas siguientes, cuáles deben llevar las bolsas que prepararon Pedro y sus amigos y colócalas en las bolsas que corresponda. Fíjate bien, porque van a sobrar etiquetas.

$6.00 $6.50 $5.00 $8.00 $10.00

V N R

1 taza 1 $\frac{2}{3}$
2 " 2 $\frac{4}{5}$
3 " → 5
4 "
5 "
6 → 10
7
8 →
9
10

Figura 41. Procedimiento del caso 34-C3 al problema 2.

En la imagen también se aprecia una tabla de variación proporcional construida a partir del valor unitario de la primera relación (5 a 3) con el objeto de poder comparar las razones, sin embargo parece no tener éxito y opta por otra estrategia. En este primer intento obtiene el valor unitario de cucharadas por taza, a partir de ese valor construye la tabla y siguiendo su construcción obtiene que a 6 tazas de agua le debe corresponder 10 cucharadas de concentrado. A pesar de poder haber hecho, con ese resultado, la comparación entre las razones, como sucedió en la estrategia de creación de pares equivalentes, prefiere buscar por otro lado la respuesta al problema. Considero que lo que aquí sucedió fue una incomprensión de las razones equivalentes halladas y por tanto no le fue de utilidad.

En la respuesta plasmada en el cuadernillo el profesor señala que los tres recipientes tienen de manera proporcional agua y concentrado de jarabe. Si observemos las flechas existentes entre los datos numéricos del problema es evidente que ligan ciertos números: el 3 con el 8 y el 5 con el 10, también el 8 con el 6. Entre 3 y 8 existe una diferencia de 5 y entre 5 y 10 también; asimismo aparece otra flecha que liga al 6 con el 8, donde hay una diferencia de 2 al igual que entre 8 y 10. Y si continuamos la comparación vemos que entre 3 y 6 la diferencia es 3, y entre 5 y 8 también. Por lo tanto, creo que la respuesta del profesor estuvo basada en estas regularidades.

Ante las evidencias mostradas pareciera que la estrategia de diferencia aditiva es, en ocasiones, una salida ante la imposibilidad de hallar una estrategia que permita dar solución a los problemas, ya que, a los ojos de los sujetos, parece ser un procedimiento matemático coherente.

Regla de tres

Esta estrategia fue poco recurrida por los sujetos participantes, sin embargo, aunque mínimo, existió en cada uno de los problemas. El profesor caso 33-C3 fue consistente con la aplicación de la *regla de tres*, la aplicó en cada uno de los problemas anteriores (1a, 1a' y 1b) y en éste.

El profesor ha utilizado esta estrategia de distintas maneras: en los casos *1a* y *1a'* para hallar el valor unitario, en el *1b* para hallar el resultado final del problema y en el presente problema hace uso de ella para identificar razones semejantes y poder compararlas, es decir, mezcla ambas estrategias (*Figura 42*).

Entrevistador: ¿cómo le hiciste?

E5: ¡A ver espérate! Estoy recordando cómo le hice…

… hice una relación de… entonces digo 3 cucharadas… digo 3 tazas… tiene 5 cucharadas, entonces aquí en el 6… como aquí maneja 6 tazas, que es este que está acá (*botella de tapa roja*), 6 tazas. Primero lo comparamos este (3 a 5) con este (6 a 8) ¿si? Que son 8 cucharadas, dice que 6 tazas son 8 cucharadas ¿aja? Y acá 8 cucharadas… digo 8 tazas igual a 10… 10 cucharadas… de jarabe.

Entonces lo que hago acá es una relación… a 6 acá le sacamos 3… 3 por 5 cucharadas, entonces lo voy a confrontar con este que está acá ¿sí? Entonces si acá (*señala la regla de tres 3-5, 6-x*) le pongo 3 cucharadas y le pongo 6 cu…

6 tazas ¿cuántas cucharadas necesitaré? Entonces aquí tengo que necesito 10 cucharadas ¿no? 6 por 5, 30 ¡ajá! 10 cucharadas ¿sí?

O sea que si yo lo… yo lo resolviera con esta relación que está acá (*la de tapa verde*) entonces necesitaría yo 10 este… 10 cucharadas.

Entrevistador: Oh, sí.

E5: ¿SI? O sea al… al darme inmediatamente esto ya este… yo digo que este… … … (pensando)…

Entrevistador: Luego haces otra ¿no?

E5: aja sí, luego hago otra acá.… ¡aaah! Ahora lo confronto al revés, ahora digo si… si 6 tazas le pongo 8 cucharadas… si yo tuviera 3 tazas ¿cuántas cucharadas necesitaría? … necesitaría no más 4 ¿si? … 4 cucharadas… entonces 4 es mayor ummm… digo 5 es mayor que 4 y 10 es mayor que 8… en 2, entonces digo: bueno, aquí es mayor nada más en uno y aquí es mayor en 2. Entonces eso dice que bueno…es más… es más grande la esta… la… la cucharada con la botella… verde, que es esta que está acá. Es la de 3 tazas… de 3 a 5, esta relación es más grande…

… esta relación es más grande… (inaudible) … o sea que aquí nada más hay de diferencia uno y aquí hay de diferencia 2, ¡aja! Hay de diferencia dos…

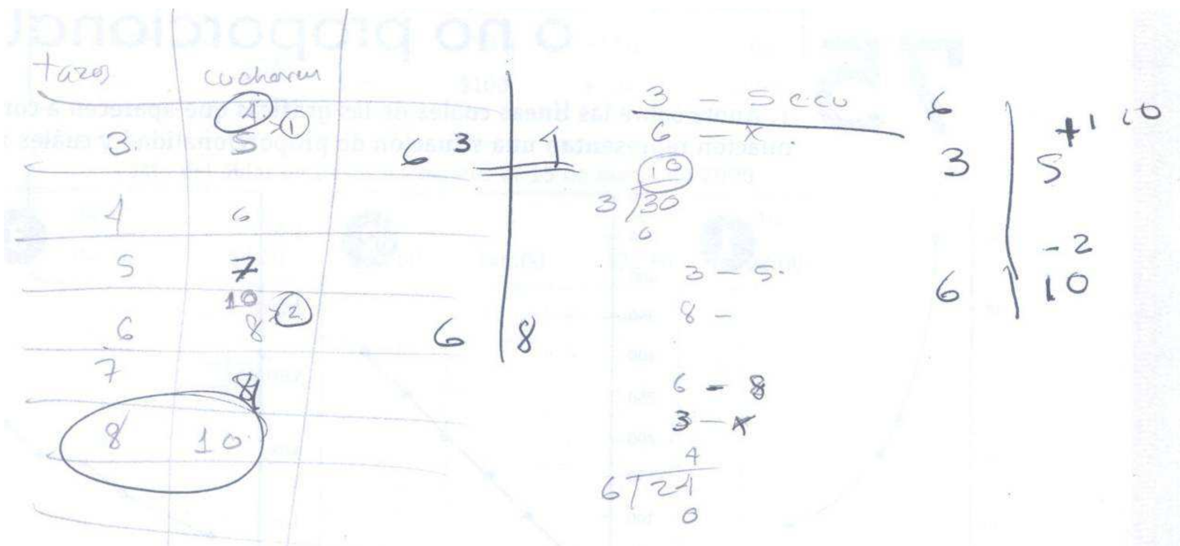


Figura 42. Procedimiento del caso 33-C3 al problema 2

Según la entrevista y la evidencia de procedimiento, el profesor aplica la *regla de tres* para crear razones semejantes y poder compararlas, pero sólo considera dos de las tres relaciones planteadas. Primero establece la relación 3:5::6:x, donde el 6 lo toma de la relación con la cual compara (6:8); a partir de ahí realizando las operaciones correspondientes obtiene que 3:5::6:10; entonces compara 6 a 10 con 6 a 8, centrado en la diferencia entre 10 y 8 indica que existe una diferencia de 2, es decir, la razón equivalente de 3:5 es mayor en 2 que 6:8. En la segunda vez que aplica la regla de tres plantea 6:8::3:x, ahora toma la otra razón (6:8) para crear una razón que coincida en un término con la primera (3:5); al aplicar la regla de tres obtiene 6:8::3:4 y entonces compara 3-4 con 3-5, y nuevamente se centra en la diferencia de uno de los términos cada razón y el resultado es 1. Es así como a partir de esas diferencias (2 y 1) el profesor elige la mezcla con más sabor, de acuerdo al siguiente razonamiento: en la razón semejante de 3:5 (6:10), su segundo término es mayor en 2 que la otra razón (6:8) y; la diferencia entre los segundos términos de las razones semejantes 6:8 (3:4) con 3:5 es 1, por lo cual, según el profesor, la primera mezcla (3-5) tiene más sabor, ya que su equivalente fue mayor en 2. La decisión del profesor, basada en la diferencia de las diferencias (2 y 1), deja ver que existe una incorrecta interpretación, ya que hubiese bastado una sólo comparación para deducir cuál razón era mayor según lo demandado en el problema.

Este profesor ha mostrado la aplicación de avanzados procedimientos como la *regla de tres* y algebra, lo que no sorprende al considerar su formación de ingeniería, sin embargo, muestra algunas dificultades en el desarrollo de un razonamiento proporcional. El procedimiento del profesor parecía seguir el camino de la estrategia de creación de pares equivalentes de razones, sin embargo, la forma en que compara es distinta, se centra en comparar la diferencia de las diferencias (2 y 1) y no en darles una interpretación de lo que implican. Sólo se deja llevar por números, sin hallar la correcta interpretación de ellos y no se da cuenta que esas diferencias son equivalentes, ya que se compararon las mismas razones. Pero, a pesar de las equivocadas deducciones, la respuesta al problema es correcta “pepe, porque es más grande la proporción 3 a 5” lo cual evidencia lo engañosas que pueden parecer las respuestas a un problema, ya que se podía dar una respuesta correcta sin existir una verdadera resolución y un verdadero razonamiento proporcional.

En la *Figura 42* se aprecia lo descrito por el profesor, además de una tabla de “variación proporcional”, la cual puede interpretarse en términos de un pensamiento aditivo porque el orden **3-5**, 4-6, 5-7, **6-8**, 7-9 y **8-10** no varía proporcionalmente, sino aditivamente. Pero la secuencia lógica que el profesor plantea en la tabla, a partir de la primer razón (3:5), coincide que obtenga las otras dos razones (6-8 y 8-10). Esto muestra una incorrecta interpretación de la variación proporcional, si es que fue tomada así, además muestra que el profesor siguió distintos caminos con los números hasta obtener algún resultado que le satisficiera o diera una respuesta lógica para él, aunque la forma de proceder no se corresponde con un razonamiento proporcional.

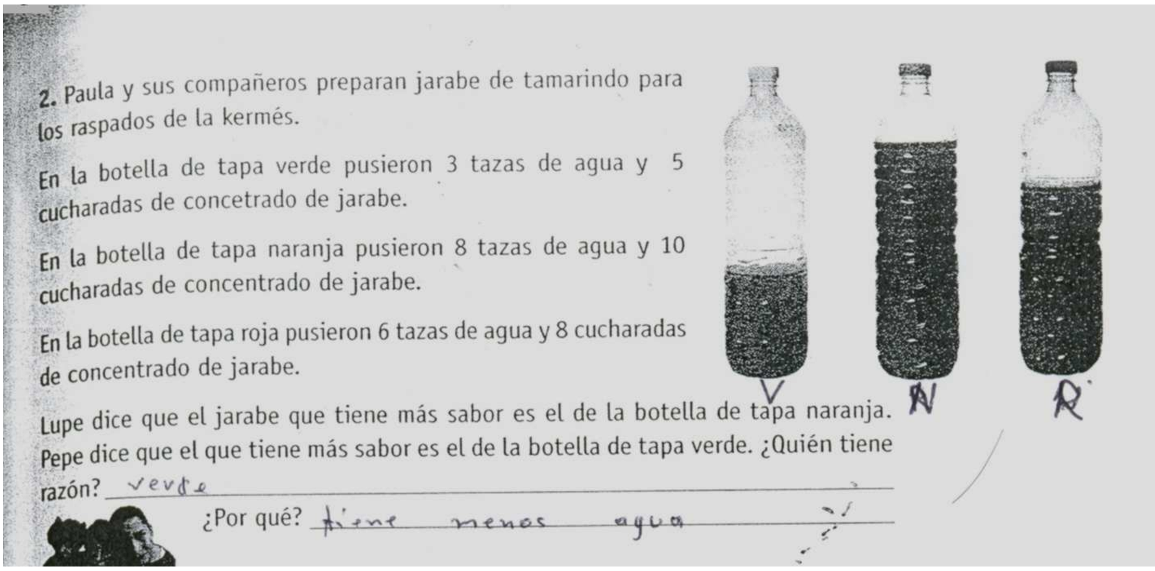
La forma de proceder del profesor, ante este problema, es mediante la búsqueda de regularidades con los números, como las diferencias de un término entre las razones dadas y sus semejantes y posiblemente la secuencia de la tabla. Esta situación exhibe una dificultad para comparar razones y más que nada para darles el significado correspondiente al expresarlas, ya que sólo se queda en un juego numérico que le resulte satisfactorio como puede ser la diferencia aditiva.

Comparación cualitativa

Dentro de esta estrategia, caracterizada por un pensamiento intuitivo, basado en la experiencia de los sujetos sin llegar a una cuantificación del fenómeno, hubo un solo caso identificado, el 15-C2 , quien resolvió el problema 1a’ en base a esta estrategia. Este profesor dio respuesta, a este problema de comparación de razones, basado en su experiencia de elaboración de pan. Según Resnick y Singer (1993) este tipo de experiencia que no depende de instrucción formal, pero sirve de base para dar solución a un problema, es un conocimiento intuitivo. Ahora bien, el hecho de no cuantificar el problema no implica ausencia de razonamiento proporcional sino de un estadio inicial de dicho razonamiento, sin embargo, puede carecer de él como sucedió en este caso.

El profesor hace una analogía con su experiencia de panadero, pero con las variables agua-color, a partir de donde señala que a menos agua tiene mayor color, lo cual sólo es posible si se mantiene la misma cantidad de color para cualquier cantidad de agua. Pues esa es la experiencia del profesor, que al aplicarla al problema, deduce que la botella que tiene menos agua tiene más sabor (3-5). El profesor centró su atención en una variable: el agua. Por eso menciona que a mayor agua menos color, de hecho la respuesta en la lección está basada en comparar la cantidad de agua (*Figura 43*). Con esto se aprecia un pensamiento intuitivo no proporcional por que no considera el cambio en las dos variables de una razón, sino una. Sin embargo el antecedente de su respuesta estuvo basado en su experiencia con la elaboración de pan:

> *E8*. Yo le puse… la verde porque guarda lo mismo. Yo cuando hago pan cuando le echamos este… el color… un color para darle color rojo al pan, entonces… menos agua más color, está más concentrado. Entonces más agua… se reparte…
>
> *Entrevsitador*: Pero fíjese, si ese fuera el caso, aquí hay 3 tazas de agua y acá hay 6 tazas de agua y acá 8 tazas de agua.
>
> *E8*: Umju, pero la cuestión es de las cucharadas que le eche usted.
>
> *Entrevistador*: Ah, ¿depende sólo de las cucharadas?
>
> *E8*. Si porque por ejemplo, si es… si yo lo que hago es poca agua y le hecho el mismo número a todos, mi color va a estar bien espeso, está más concentrado, con poco agua puedo… batir mi mezcla y se hace, y aquí tengo que repartirle más agua para que pueda darle el mismo color que tenía este. (Entrevista OFEFER111105, p. 11).


2. Paula y sus compañeros preparan jarabe de tamarindo para los raspados de la kermés.

En la botella de tapa verde pusieron 3 tazas de agua y 5 cucharadas de concetrado de jarabe.

En la botella de tapa naranja pusieron 8 tazas de agua y 10 cucharadas de concentrado de jarabe.

En la botella de tapa roja pusieron 6 tazas de agua y 8 cucharadas de concentrado de jarabe.

V N R

Lupe dice que el jarabe que tiene más sabor es el de la botella de tapa naranja. Pepe dice que el que tiene más sabor es el de la botella de tapa verde. ¿Quién tiene razón? verde

¿Por qué? tiene menos agua

Figura 43. Respuesta del caso 15-C2 al problema 2

El razonamiento cualitativo proporcional debe considerar la compensación en cada variable y término de la proporción. A pesar de errores en la analogía, porque ante un problema de este tipo los dos términos de las razones varían y no sólo uno como sucede en su experiencia. El profesor mantuvo la idea de sólo aumentar la cantidad de agua y no la de concentrado, en consecuencia de esa forma de razonar, resulta coherente que la que tiene menos agua tiene más color. También hace un señalamiento importante que sí involucra un pensamiento proporcional: dice que de la mezcla que tiene más color necesita menos para darle color requerido al pan porque si la mezcla tiene más agua necesitaría más para darle el color requerido al pan, pero eso sucede cuando no cambia una variable de las razones. En este discurso es evidente un razonamiento cualitativo de proporción.

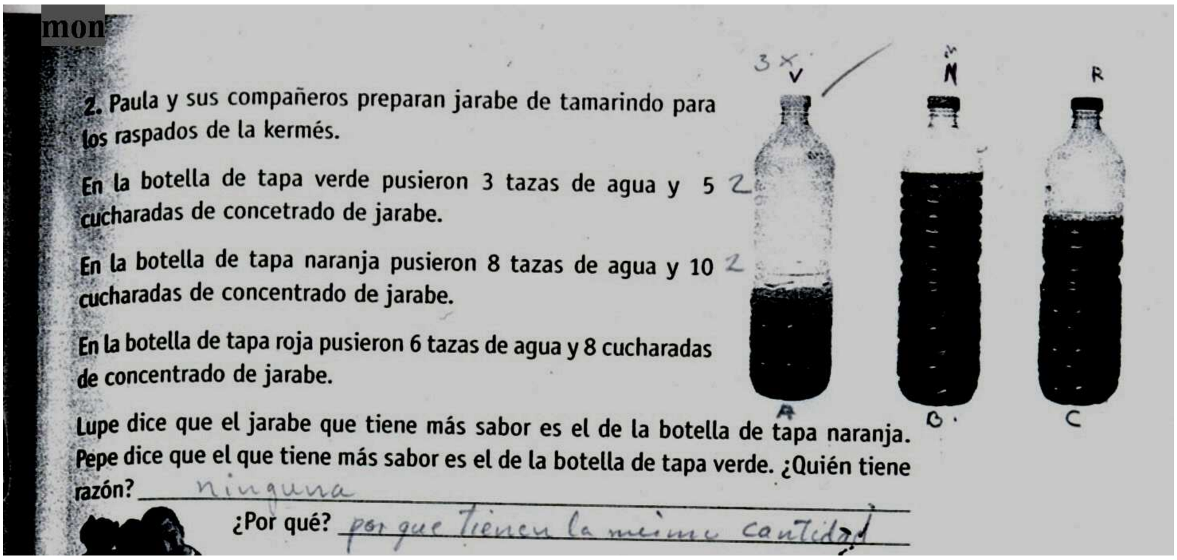
> *Entrevistador*: Y entonces ¿cómo la resolvió? ¿Nada más así?
> *E8*: Sí, yo nada más así dije. Como yo recuerdo digo ¡ah! Así hago mis preparados, entonces… aquí (*botella verde*) tengo que echarle menos a mi pan para que agarre el color que necesito, aquí (*botella naranja*) tengo que echarle más agua para que me de el color que yo necesito…
> *Entrevistador*: ¿En el segundo?
> *E8*: Aja, y aquí regular. Por eso yo digo que… el que tiene menos agua está más concentrado.
> *Entrevistador*: Y cómo podemos saber que tiene menos agua… no porque. Dice 3 tazas de agua… bueno si por esto… porque esto… para decir que tiene menos tazas de agua es porque… se fija en este dato: 3 tazas, 8 tazas.. este… y 6 tazas, pero… también tiene más concentrado ¿verdad?
> *E8*: Así es. (Entrevista OFEFER111105, p. 11).

Al hacerle notar que también existe variación en la cantidad de concentrado menciona haberse equivocado, pero que está más concentrado el sabor en la primera mezcla (3-5) que en la segunda (8-10). Podría haber alguna explicación más de fondo a su respuesta, pero al no poderla expresar o haber contradicción con lo que se le preguntó lo dejó así. Cuando menciona que a 3 tazas le ponen 5 cucharadas de concentrado cree que es mucho sabor para 3 tazas (permanece en su pensamiento la comparación con lo que hace en su trabajo), y para 8 tazas son 10 cucharadas, las cuales “se reparten más”. ¿Por qué dice que se reparten más? Aquí pudo haber relacionado unívocamente 5 a 3, entonces le toca a una cucharada por taza y las dos cucharadas restantes se reparten entre las 3 tazas y en la relación 10 a 8, le corresponde una cucharada a cada taza y se reparten las 2 cucharadas restantes entre las 8 tazas. Esta interpretación también pudo ser la explicación a su respuesta, sin embargo, no existe una evidencia empírica contundente para afirmarlo, a diferencia de la otra interpretación donde sólo considera el cambio en una variable.

> *Entrevistador*: También cambian los valores de las cucharadas…
> *E8*: Si, entonces ahí sí, si me equivoqué. Ha de haber sido porque… aquí están hablando de más concentrado de… de cucharadas de concentrado… por ejemplo aquí sí son 3 a 5…
> *Entrevistador*: ¿Son qué?
> *E8***:** 3 tazas de agua y 5 cucharadas son este… pues es… mucho color… digo mucho concentrado para 3 tazas. Pero aquí son 8 tazas de agua… y le ponen 10 cucharadas de concentrado… y se reparten más… es más agua y más repartido.
> (Entrevista OFEFER111105, p. 10-11).

Sin estrategia

El *caso 16-C2*, según lo mostrado en el cuadernillo (*Figura 44*), aplicó la estrategia aditiva incorrecta, pero la explicación dada en la entrevista no tiene relación con lo expresado de forma escrita y tampoco con lo demandado en el problema. Asimismo su explicación no da pautas para comprender su pensamiento, da respuestas ilógicas.


2. Paula y sus compañeros preparan jarabe de tamarindo para los raspados de la kermés.

En la botella de tapa verde pusieron 3 tazas de agua y 5 cucharadas de concetrado de jarabe.

En la botella de tapa naranja pusieron 8 tazas de agua y 10 cucharadas de concentrado de jarabe.

En la botella de tapa roja pusieron 6 tazas de agua y 8 cucharadas de concentrado de jarabe.

Lupe dice que el jarabe que tiene más sabor es el de la botella de tapa naranja. Pepe dice que el que tiene más sabor es el de la botella de tapa verde. ¿Quién tiene razón? ninguna

¿Por qué? porque tienen la misma cantidad

Figura 44. Respuesta del caso 16-C2 al problema 2

E9. Pepe dice que el que tiene más sabor es el de la botella de tapa verde. ¿quién tiene la razón? Ninguno.

Entrevistador: ¿Ninguno?

E9. Ninguno.

Entrevistador: ¿Por qué?

E9: Porque este… tanto la porción que dice: en la botella de tapa verde pusieron 3 tazas de agua y 5 de concentrado. O sea sabe horrible ¿no?

Entrevistador. Ja, ja, ja, ja. ¿Por qué sabe horrible oiga?

E9. Porque tiene más… más concentrado.

Entrevistador. ¿Más concentrado de qué?

E9. De… de… de jarabe.

Entrevistador. Pero más concentrado que qué otra cosa o qué?

E9. Este… podía ser menos también de azúcar.

Entrevistador. Ahí no hay azúcar.

E9. No, no. un ejemplo ¿no? pero aquí lo que me está diciendo es más… 3 tazas de agua y… y 5 cucharadas de concentrado. (Entrevista ALF111105, p. 3)

En la respuesta del profesor se aprecia que no existe comprensión alguna del problema: dice que el agua “sabe horrible” y cuando se le pide explicar con qué está comparando el concentrado señala que podría ser menos azúcar, lo cual no es una variable en el problema. Más adelante se le sigue cuestionando sobre las siguientes mezclas, a lo que señala otras incongruencias como es el involucrar lo dulce de la mezcla y la fuerza del concentrado que tampoco son variables en el problema y sin lógica en su razonamiento.

> *E9*. Para mí. Bueno la que sigue. En la botella de tapa anaranjada pusieron 8 tazas de agua y 10 de… cucharadas de concentrado de jarabe.… entonces para mí es por lo mismo, que pues no sabe… no sabe igual pues… no puede ser dulce, no puede ser más fuerte que la otra.
> *Entrevistador*: No, ¿por qué?
> *E9*. Porque para mí que el concentrado es más fuerte.
> *Entrevistador***:** ¿Más fuerte que qué?
> *E9***:** Que el agua. (Entrevista ALF111105, p. 3)

De los fragmentos de la entrevista mostrados se aprecia un total desconocimiento del tema, involucra otros ingredientes de los dados en las relaciones, lo que puede estar basado en su experiencia, no existe un razonamiento para relacionar las variables del problema, creo que ni siquiera los trata de analizar.

Problema 3

El problema 3 es de proporción y se basa en un contexto de compra-venta (*Figura 45*). Lo que demanda este problema es la búsqueda de valor perdido al igual que los problemas 1a, 1a' y 1b. También este problema considera cantidades discretas (dulces) y continuas (dinero). Una diferencia es el uso de números decimales y naturales al momento de plantearlo y en consecuencia de razones no enteras.

En este problema están involucrados dos variables: dulces-precio. La razón es de 1/2 o 2, es decir de doble o mitad, que de principio le da cierta facilidad al problema para obtener el resultado de precio por bolsa de dulces. El uso de decimales le agrega una dificultad, pero el contexto de compra-venta es muy familiar a todos lo cual compensa la dificultad agregada. También lo expresado en decimales (.50) son pesos (dinero), por lo que fácilmente son considerados por los sujetos como 50 centavos y ahí se pierde la dificultad de los decimales porque ya no hablan de decimales sino de 50 centavos, es decir, enteros.

Otra ayuda que se les da a los sujetos es que ya existen los resultados de precio por cada bolsa y deben colocarlos en la bolsa correcta.

Figura 45. Problema 3 del libro de texto de quinto grado de valor faltante

Tabla 11

Estructura numérica del problema 3

Dulces	Precio ($)
10	?
12	?
15	7.50
20	?

Cuantificación respuestas y estrategias

Sin considerar a los que no contestaron, no hubo quien tuviera una respuesta errónea al problema, lo que evidencia la facilidad que representó para los profesores. Existe un alto porcentaje de quienes no dieron respuesta, es difícil decir que fue debido a la dificultad del problema, sino más bien a la no disposición e inasistencia (*Figura 46*). El 19.6% de quienes no dieron respuesta coincide con quienes no contestaron el *problema 2*, entonces puedo decir que fue sólo la falta de voluntad de los profesores.

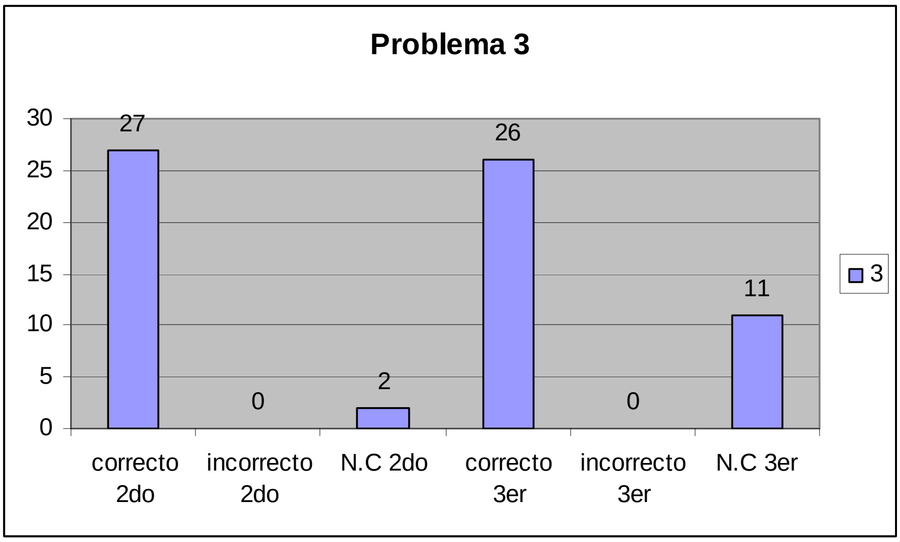


Figura 46. Respuestas al problema 3

Ante este problema sólo se utilizaron la estrategia de valor unitario (36.4%) y la *regla de tres* (6%) y el 39.4% no dejo huella de la forma de proceder, lo que pudo ser debido a la facilidad de la relación del problema, ya que pudieron haber obtenido el resultado sólo obteniendo la mitad a cada cantidad de dulces o bien mediante el valor unitario.

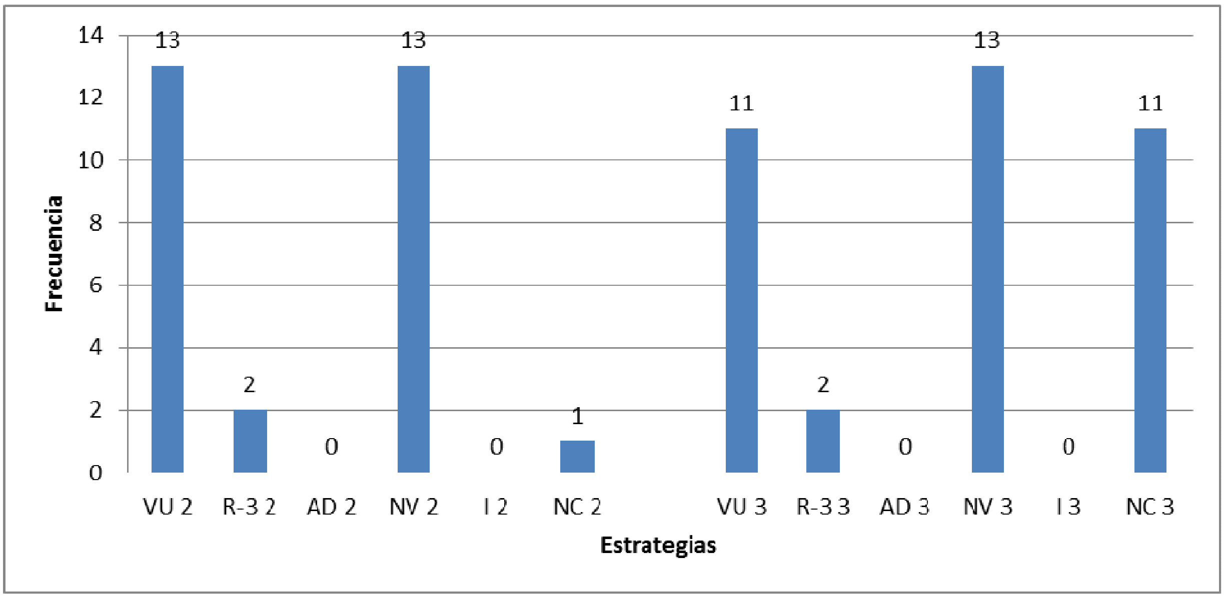


Figura 47. Estrategias empleadas en la solución al problema 3

Análisis cualitativo de los procedimientos utilizados

Las estrategias usadas, relacionadas al problema 3, fueron la de valor unitario y *regla de tres*, al igual que los problemas 1a y 1b, también problemas de valor perdido con razones enteras.

Valor unitario

En 7 de los 9 profesores entrevistados usaron la estrategia de valor unitario ante este problema, la cual fue la estrategia más recurrida a lo largo de todos los problemas. Por ejemplo, los casos 6-C3 y 32-C3 utilizaron la estrategia de valor unitario en todos los problemas. Todos los demás profesores entrevistados variaron sus estrategias según el problema.

Quienes se valieron de la estrategia de valor unitario, en general, no tuvieron mayores dificultades después de hallarlo. Las variantes existentes están relacionadas con el uso de algún recurso, como la representación pictográfica, recurso importante para comprender más el problema y poder obtener el resultado.

La profesora caso 7-C3 (*Figura 48*) y el profesor caso 36-C3 dividieron los términos de la relación dada 15:7.5 para obtener el valor unitario de precio por dulce. Después sólo multiplican por la cantidad de dulces donde necesitan conocer el precio.

Entrevistador. ¿y con los dulces? Aquí abajo. (*señalando la lección*)

E4: Aquí se me facilitó más porque ya están aquí dos..dos datos…de entrada…está el dibujo dijimos ¡no! pues siete cincuenta lo dividimos ¿no? encontrar el valor de cada dulce. Entre 15 pues qué valor me va a dar, me va a dar cincuenta centavos…

E3: Cincuenta centavos…

E4: ¡por dulce! Entonces ya es fácil: cincuenta por 10, pues ya cinco pesos; cincuenta por 12, seis pesos; cincuenta por 20, pues me dan 10 pesos, ¡fácil!

Entrevistador: ¿y usted maestra le hizo igual?

E3: Si también. Porque este…como dice nos dan los datos, o sea lo dividí (el 7.50) entre 15 dulces encontré el valor de cada dulcecito, 50 centavos. Y ya así fui multiplicando 10 por punto cincuenta, doce por punto cincuenta y obtuvimos los resultados. (Entrevista NORERI111105, p. 11)

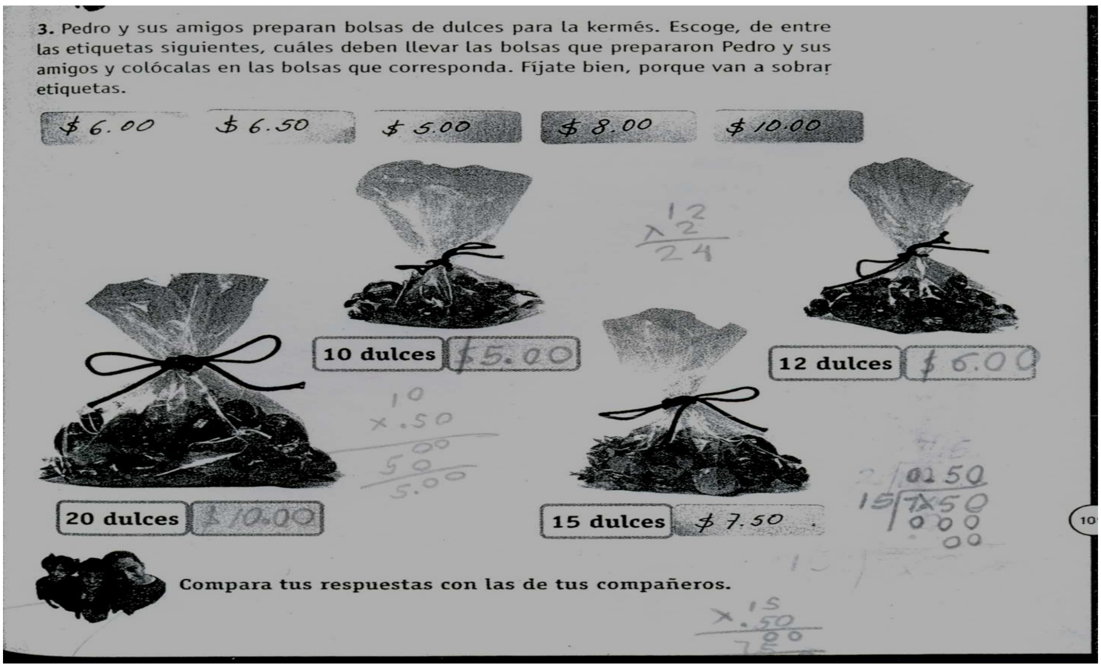


Figura 48. Procedimiento del caso 7-C3 al problema 3

La profesora *caso 7-C2* halla el valor unitario a partir de sus dibujos e ir repartiendo el precio entre los dulces (*Figura 49*). Al observar el procedimiento seguido se nota, que al contrario de los otros profesores que obtuvieron el valor unitario de precio por dulce, aquí la profesora resuelve el problema con el valor unitario de dulces por peso.

Imagen 41

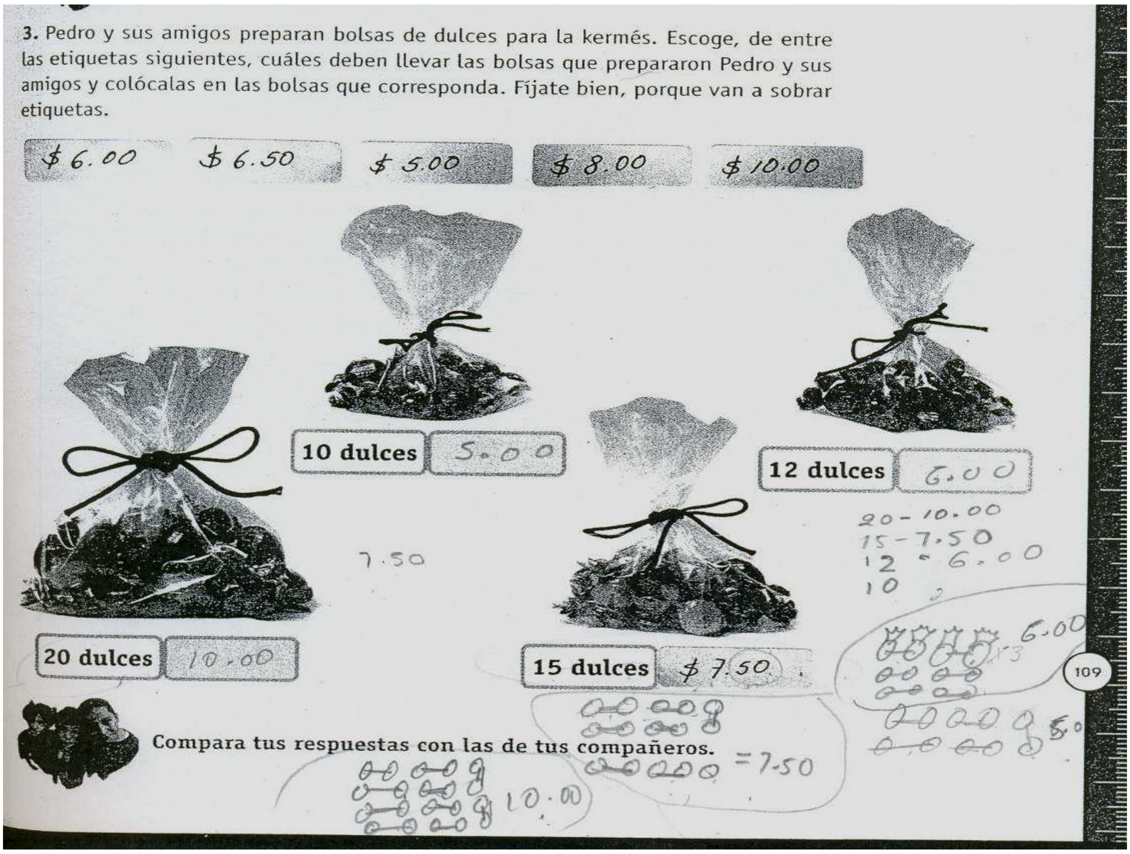


Figura 49. Procedimiento del caso 7-C2 al problema 3

El recurrir a dibujos para agrupar y poder deducir el valor unitario muestra un pensamiento matemático limitado, el cual necesita de los objetos concretos para poder manipularlos matemáticamente.

Por último, señalo que el caso 16-C2 utiliza la estrategia de valor unitario, pero ahora sí logra explicar que realiza la división y de ahí obtiene el valor, para después multiplicarlo según cada valor perdido que se busca. Este problema fue el único donde su respuesta pudo ser explicada por el profesor.

Regla de tres

El uso de la *regla de tres* se dio en pocos casos (4). De los profesores entrevistados, sólo uno aplicó la *regla de tres*, el *caso 33-C3*. En esta ocasión el profesor estableció la relación directa con la cual llegar al resultado esperado: por ejemplo 15:7.50::10:x *(Figura 50).* Ya que en el caso anterior la utilizó para hallar el valor unitario. Sin embargo, demostró que la herramienta y estrategia de que se vale el profesor para todos los problemas es la *regla de tres*, algoritmo que antes de ser usado debe ser comprendido.

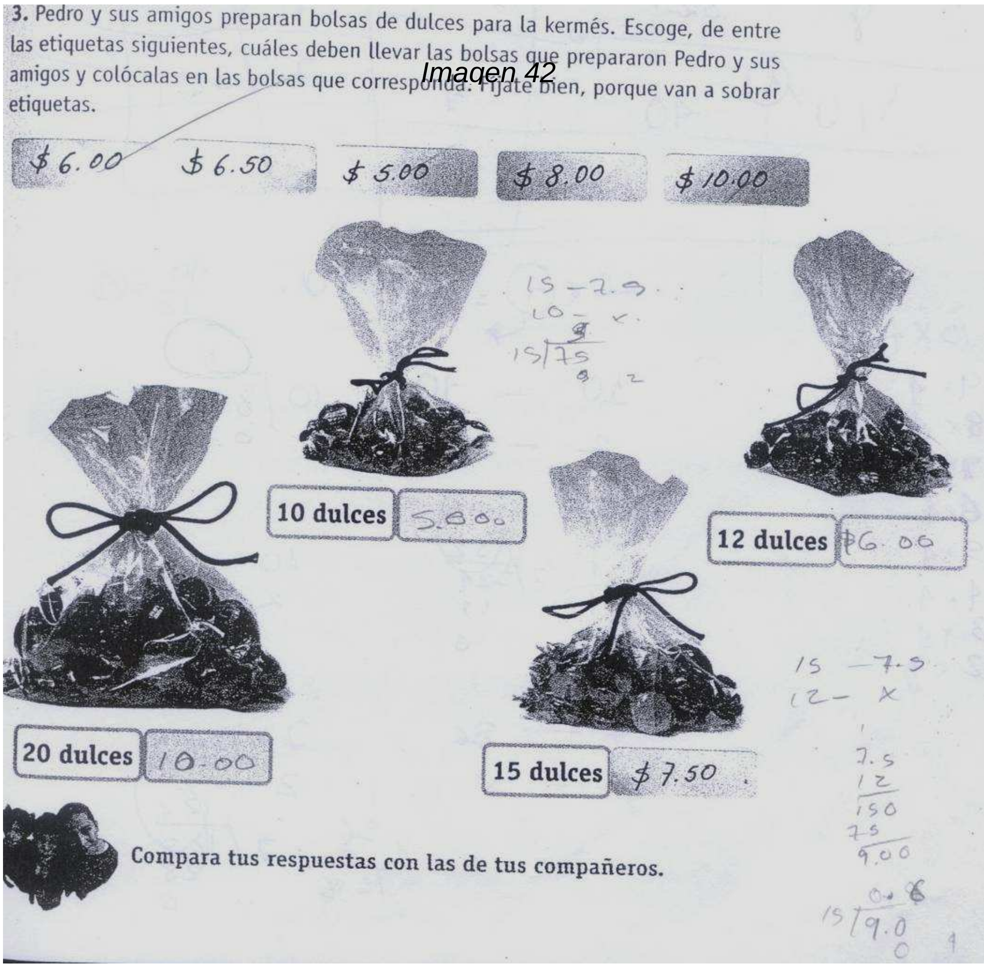


Figura 50. Procedimiento del caso 33-C3 al problema 3

Un caso especial que aplicó la *regla de tres* fue el profesor caso 28-C2, quien aplica la regla combinada con el uso de porcentajes (*Figura 51*).

El profesor aplica relaciones extrañas a partir de las cuales obtiene el valor unitario de costo por dulce: plantea que 15-100, 7.50-x. En esta forma se supone que 15 dulces son el 100%, y 7.50 es el precio de 15 dulces En el planteamiento de la *regla de tres* el profesor se vale de tres variables: dulces-porcentaje-precio y resulta inapropiado para obtener el precio de un dulce, sin embargo, aplicando las operaciones correspondientes el resultado es 50, valor interpretado como 50 centavos. En este proceder puede ser que ya conocía el valor por dulce y buscó una relación y operación que lo llevase a comprobar. Después vuelve a aplicar la *regla de tres*, pero es más extraño su proceder ahora: 15 / 7.50 y 20-100, entonces la forma de operar considerando las flechas es (20 x 7.50) x 100 / 15. Al realizar las operaciones el resultado es 1000 y el profesor lo transforma en 10.00 pesos como el precio para 20 dulces, es decir, le coloca el punto decimal bajo algún criterio que, bondadosamente, podría haber sido la división entre 100 nuevamente o más bien como no obtuvo lo deseado sólo quitó dos ceros para tener el resultado deseado. Mi hipótesis es que, como ya conocía los precios de cada bolsa de dulces, lo que hizo fue buscar operaciones que le resultaran lógicas y dieran con los números buscados sin comprender la relación proporcional entre los términos.

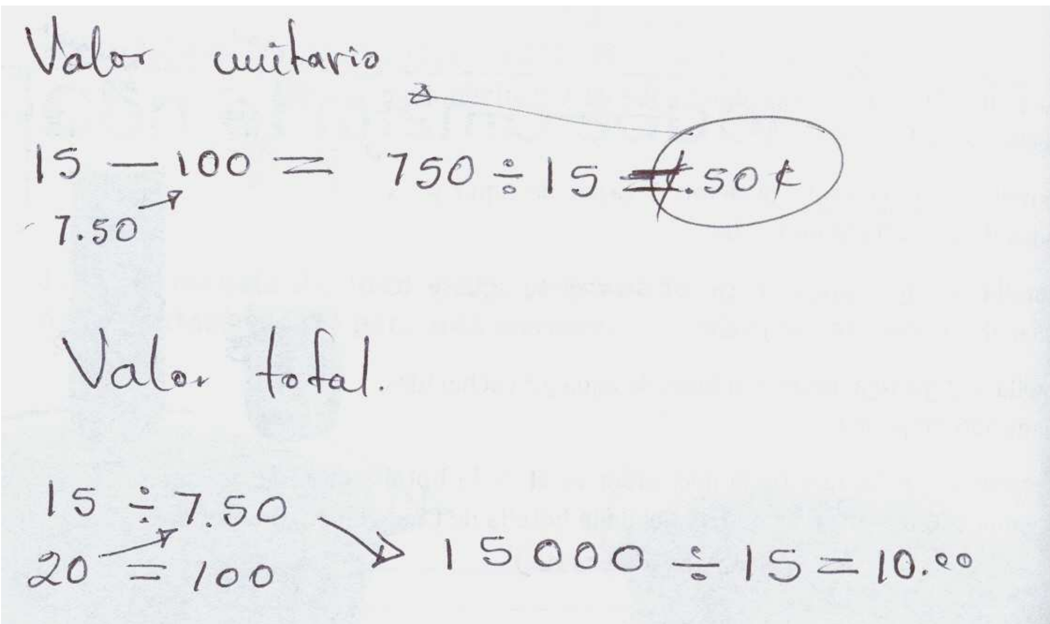


Figura 51. Procedimiento del caso 28-C2 al problema 3

El proceder de este profesor es muestra de que existen conocimientos matemáticos, pero carecen de elementos para aplicarlos al momento adecuado debido, en muchas ocasiones, a su incomprensión. Ya que cuando se carece de esta comprensión, esos conocimientos de algoritmos sólo vienen a confundir a los sujetos al resolver un problema.

El conocimiento de la materia y la formación de los profesores: algunos indicios

Según plantea Llinares y Sánchez (1990) el conocimiento profesional del profesor contiene componentes teóricos y prácticos. El quehacer del profesor se sustenta por un lado en los saberes científicos y por el otro en su experiencia. Ambos aspectos son relevantes, sin embargo, no se trata de los mismos conocimientos, tampoco que uno sea más importante que el otro, más bien son complementarios. La experiencia es importante, pero no por practicar mucho vas a logar el conocimiento de la materia que se enseña, más bien esta depende del estudio en la escuela, en los talleres, cursos o de manera autónoma. Por esta razón, me parece importante compartir algunos indicios sobre la relación entre el conocimiento de los profesores sobre el contenido, su formación académica y experiencia con dicha materia a partir de la información recaba en el cuestionario sobre sus datos personales.

El análisis que presento sobre la relación entre la formación, experiencia y conocimiento del contenido no es el objetivo de esta investigación, tampoco los datos permiten un análisis profundo y preciso de las relaciones, pero está relacionada con mi preocupación sobre la formación docente y por lo cual me parece importante compartir algunas ideas surgidas de los datos, teniendo en cuenta que las comparaciones porcentuales no son equitativas debido a que fue distinta la cantidad de profesores de cada nivel de formación académica y de los años de experiencia profesional.

En la *Tabla 12* presento los datos de formación académica de los profesores y las respuestas obtenidas, de tal forma de ubicar el éxito correspondiente a cada grupo de profesores según su formación. En la tabla descarté los problemas 1a, 1b y 3 debido a que no hay diferencias que remarcar en cuanto al éxito, así que divididos en ciclos, sólo contemplo los resultados de los problemas de mayor dificultad (1a’ y 2). Sin embargo, me voy a remitir al análisis de los datos sin considerar los ciclos, sólo su formación y resolución de los problemas en forma conjunta.

Los profesores con estudios máximos de bachillerato son siete, de ellos cinco (71.4%) dieron una respuesta correcta al problema *1a’* y seis (85.7%) al problema *2*. Es notorio el alto porcentaje de éxito para resolver los problemas que resultaron más difíciles. Cabe notar que los profesores con nivel bachillerato son jóvenes, de nuevo ingreso y se encuentran estudiando la licenciatura.

A diferencia de los profesores con bachillerato, lo profesores con estudios de Normal básica son profesores de más de 18 años de experiencia laboral que carecen de estudios de bachillerato, posible causa de que una parte importante de ellos no resolviera los problemas. De los 13 profesores con Normal básica nueve (69%) resolvieron el problema *1a’* y siete (53.8%) el problema *2*. En estos números se observa que el éxito de los profesores con Normal básica fue menor al obtenido por los profesores con bachillerato.

Tabla 12

Respuestas correctas e incorrectas en función de la formación de los profesores

Problema (P) Estudios		Solución a los problemas		Total de profesores
		P 1a’	**P 2**	
Bachillerato	C	5	6	**7**
	I	2	1	
	NC	0	0	
Normal básica	C	9	7	**13**
	I	3	4	
	NC	1	2	
Licenciatura	C	25	24	**36**
	I	3	6	
	NC	8	6	
Maestría	C	2	1	**3**
	I	1	1	

	NC	0	1	
Otros	C	2	2	**3**
	I	0	0	
	NC	1	1	
Sin datos de su formación	C	1	2	**4**
	I	1	0	
	NC	2	2	
TOTAL		**66**	**66**	***66***

C: correcto I: incorrecto NC: sin contestar P= problema

Los profesores con licenciatura fueron la 36, de ellos 25 (70.5%) resolvieron el problema *1a'* y 24 (66.6%) el problema *2*. El porcentaje de éxito es superior que el conseguido por los profesores con Normal básica, pero inferior que el conseguido por los profesores con estudios de bachillerato.

En cuanto a los profesores con maestría, de los tres existentes dos resolvieron el problema *1a'* y sólo uno el problema *2*, aunque con algunas dificultades como lo ejemplifica el caso *7-C3*.

Podría pensarse que los profesores con bachillerato saben más que los de maestría o que los de licenciatura, pero como ya lo señalé anteriormente es una comparación inequitativa, sin embargo de manera general pareciera ser que tanto los profesores con menos preparación, como los que tienen más presentan las mismas carencias en el conocimiento del contenido, en este caso de razón y proporción, no se nota una diferencia significativa entre quienes tienen mayores estudios y quienes tienen menos.

El conocimiento de la materia es un conocimiento teórico que requiere ser aprendido en la formación inicial de los profesores, en los talleres o en su estudio personal, pero un supuesto surgido de esta revisión es que *poco se atiende al conocimiento de los contenidos en la formación del profesor* de tal forma que aún con maestría presentan las mismas dificultades en el dominio del contenido, me parece que el énfasis se ha puesto en el conocimiento pedagógico y didáctico en general y poco en el conocimiento disciplinar de lo que tiene que enseñar el docente. Como lo señalé anteriormente el conocimiento de la materia es el inicio de lo demás y por lo tanto debe trabajarse desde el inicio de la formación docente.

CAPITULO QUINTO. PRECISIONES Y CONCLUSIONES

Resumen y precisiones de los procedimientos empleados por los profesores

Los procedimientos utilizados por los profesores para resolver problemas de razón y proporción en esta investigación muestran carencias en el conocimiento del contenido sobre este tema. Esta situación limita el proceso instructivo de los profesores y en consecuencia el aprendizaje de los alumnos. Los resultados de las evaluaciones en México de organismos internacionales y nacionales, así como las evaluaciones en las escuelas evidencian bajos logros en el aprendizaje de las matemáticas lo que puede estar relacionado con limitantes en el conocimiento del contenido por parte del profesor.

Hago un recuento de los hallazgos de la investigación para ir señalando algunos aspectos que evidencian estas limitaciones de los profesores participantes.

El éxito de los profesores en la solución a los problemas

El trabajo de los profesores muestra que algunos de los problemas aplicados fueron de mayor complejidad que otros. En el primero de los problemas, de búsqueda de valor perdido, de proporción múltiple con razones enteras y fraccionarias (1a y 1a'), variaron las soluciones en función de la razón involucrada. Cuando se trató de la razón 8:1 o 4:1 (40 naranjas para 5 botellas o 10 litros) el éxito fue total, es decir, todos los profesores que dieron respuesta al problema lo hicieron correctamente. No sucedió lo mismo cuando se trató de la razón fraccionaria 10:4 (10 litros o 5 botellas con 4 tazas de azúcar), el éxito disminuyó, hubo quienes no hallaron la respuesta correcta y otros que aunque resolvieron el problema les fue más difícil. Las dificultades estuvieron relacionadas con las *razones* involucradas (fraccionarias) y en la obtención del valor unitario.

Los problemas 1b y 3 resultaron también con alto porcentaje de éxito. El problema 1b, problema de valor perdido con razón 8:1 (56 limones para 7 litros de agua), fue resuelto exitosamente por todos los profesores. El problema 3 también de valor perdido y con razón 2:1 (15 dulces $7.50), fue resuelto exitosamente por el total de profesores que dieron respuesta.

El problema 2 fue en el que menos éxito se consiguió. Comparar razones fraccionarias (5:3, 10:8 y 8:6) no resultó nada fácil. Se presentaron dificultades con la identificación de las razones en juego y puesto que se trataba de relaciones funcionales, se presentó dificultad con la interpretación de las cantidades intensivas (valor unitario). Otra dificultad estuvo relacionada con la magnitud de las fracciones o su expresión en números decimales.

La resolución de los problemas de valor perdido está estrechamente relacionada a las razones implicadas, cuando fueron razones enteras el éxito fue alto y cuando fue fraccionaria disminuyó; en el problema de comparación se utilizaron razones fraccionarias y presentó la tasa más baja de éxito. En la *Figura 52* se observa el éxito ante cada uno de los cuatro problemas y cómo varía según cada uno de ellos. El *1a'* y el *2* fueron los más difíciles de resolver, ya que aumentó la cantidad de profesores que no resolvieron los problemas, en comparación con los problemas 1a, 1b y 3.

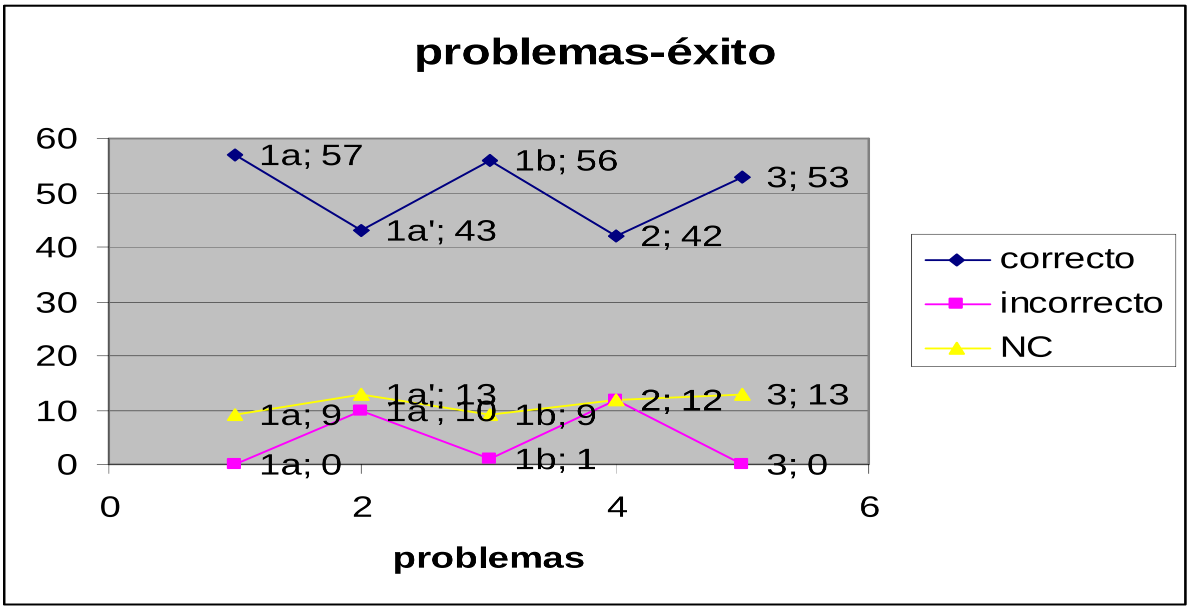


Figura 52. Tendencia de las respuestas a cada uno de los problemas.

Las estrategias empleadas por los profesores

Obtener la respuesta correcta en cada tarea dependió de sus características y del conocimiento del profesor. Las razones involucradas, el contexto y la demanda de la tarea fueron los factores que incidieron en la solución. Por otra parte, las estrategias seleccionadas, las técnicas empleadas, sus nociones de razón, de factor y de las cantidades intensivas, en conclusión, del razonamiento multiplicativo de los profesores, fueron las determinantes en la resolución de los problemas.

Problema 1a y 1b

La estrategia aplicadas por los profesores a los problemas *1a* y *1b* fue la de valor unitario. Esta estrategia resultó exitosa, aunque con algunas variantes de procedimiento y de recursos utilizados. La forma de hallar el valor unitario en estos problemas fue mediante el algoritmo de la división con dos formas de llegar al resultado final: una fue multiplicando el valor unitario para el tercero y así obtener el cuarto y otra sumando repetidas veces ese valor en una tabla de variación proporcional hasta hallar el valor buscado. También hubo quien utilizó ambos procedimientos: después de haber hallado el resultado, a partir de multiplicar el valor unitario, realizaban tablas de variación proporcional como una forma de comprobar el resultado de su operación.

Problema 1a'

En el problema *1a'* las estrategias utilizadas fueron el valor unitario y la *regla de tres*. Ante este problema que implicaba razones no enteras, la estrategia de valor unitario no fue siempre exitosa como sucedió con los problemas antes mencionados. La dificultad en este caso estuvo relacionada con la obtención del valor unitario, los procedimientos mediante el cual llegaron a obtenerlo fueron tres: Una forma fue a través de la *división* de las cantidades puestas en relación, otro fue a través del *reparto* en una representación pictórica de las cantidades, una tercera forma fue mediante la *partición sucesiva por mitad* de los términos en relación; una más, una cuarta modalidad fue mediante el *desagrupamiento* de las cantidades puestas en relación como ya lo mostré en el apartado de uso de las tablas de variación proporcional; por último, otros lo hicieron mediante la *estimación*.

Quienes utilizaron la división para obtener el valor unitario aplicaron el algoritmo de la división y posteriormente multiplicaron ese valor por el tercer término de la proporción o mediante el uso de una tabla duplicaron hasta llegar a la cantidad que le corresponde al tercer término de la proporción. Por ejemplo, en el problema *1a'* algunos dividieron 4 entre 5 o 4 entre 10 para obtener el valor unitario (0.4 o 0.8), seguido de una multiplicación para hallar la cantidad de azúcar (0.4 x 6 o 0.8 x 3 = 2.4).

El procedimiento de reparto se dio únicamente en el caso *7-C3* (*Figura 6*), el cual consistió en el dibujo de los dos espacios de medida (5 botellas, 4 tazas), luego la división gráfica de uno de ellos en tantas partes como eran el segundo espacio de medida (1 taza/5 botellas), posteriormente hicieron el reparto (4/5 de taza a cada botella), por último hicieron la suma (4/5 + 4/5 + 4/5) de las partes mediante el conteo unitario de tres veces la parte que le tocó a cada botella y finalmente llegar al resultado (2 2/5).

La tercera forma de proceder, de partición sucesiva por la mitad, se dio en el caso *25-C2* (*Figura 11*), el cual consistió en tomar las dos cantidades de la relación (10 litros a 4 tazas) y dividirlas por la mitad sucesivamente (10:4, 5:2, 2.5:1…), con el objetivo de hallar el valor unitario tazas/litro, procedimiento que no tuvo éxito, porque aunque halló el valor unitario inverso (2.5 litros a 1 taza), éste no pudo ser utilizado para encontrar la solución del problema.

El cuarto procedimiento apoyado en la tabla de variación proporcional consistió en el *desagrupamiento* de las cantidades en unidades y posteriormente reagruparlas de tal manera que a cada unidad del segundo espacio de media le correspondiera igual unidades del primer espacio de medida. Los casos 15-C2 y 27-C3 (Figuras 7 y 8) utilizaron este procedimiento, en el problema *1a'* tomaron la relación naranjas/azúcar (40:4::24:X), posteriormente se desagrupó el 40 y el 4 en unidades, luego se repartieron las 40 unidades del primer espacio de media entre las 4 cuatro unidades del segundo espacio de medida tocando 10 naranjas a 1 taza, finalmente el segundo caso halló que para 24 naranjas correspondía 2 tazas y 4/10, pero el primero no pudo identificar qué fracción de 10 eran 4 naranjas, así que sólo estimó la fracción y puso un cuarto.

La última forma de hallar el valor unitario fue mediante la estimación. Procedimiento que consistió en elegir un posible valor unitario y posteriormente, con el apoyo de una tabla, duplicar este valor hasta encontrar el cuarto termino que corresponde al tercero, o bien, estiman un posible valor unitario y con el apoyo de dibujos van colocando bajo los dibujos dicho valor y finalmente los suman. El caso 1-C2

(Figura 9) seleccionó 1/4 de azúcar para cada 1/2 litro de agua, luego, con el apoyo de una tabla, duplica estos valores hasta llegar a la cantidad que corresponde a 6 litros de agua (tres botellas). El caso 22-C2 (Figura 10) estima 1/4 taza de azúcar para un litro de agua, dibuja las botellas y va colocando dos cuartos bajo cada botellas, finalmente suma los 6/4 que corresponde a 3 botellas.

La otra estrategia utilizada para resolver este problema fue la *regla de tres*, la cual es un algoritmo que más que estrategia es una técnica. La forma en que se procedió con ella fue 10:4::6:x entonces x=2.4 (Caso 15-C3) y el resultado fue exitoso.

Otro uso que se dio esta técnica fue para hallar el valor unitario (Caso 33-C3), aquí se planteó 10:4::1:x, entonces x=0.4 y posteriormente se multiplicó o en una tabla se duplicó para hallar la solución al problema.

Problema 2

El problema menos exitoso fue el *2*, problema de comparación de razones en contexto de mezcla, donde existieron variedad de estrategias utilizadas: el valor unitario, la *regla de tres*, la construcción de pares equivalentes, la aditiva incorrecta y la cualitativa.

La estrategia de *valor unitario* tuvo dos modalidades: la primera fue dividir los consecuentes entre los antecedentes de las razones implicadas (5/3, 10/8 y 8/6), dando como resultado las cantidades intensivas cucharadas/taza 1.66, 1.25 y 1.33; y la segunda modalidad dividieron los antecedentes entre los consecuentes (3/5, 8/10 y 6/8), dando como resultado las cantidades intensivas tazas/cucharada 0.6, 0.8 y 0.75. En ambas modalidades siguió la comparación de los cocientes obtenidos (decimales o fracciones) para optar la respuesta que creían correcta. El éxito en este problema, utilizando la estrategia de valor unitario, dependió de la comprensión de las cantidades intensivas, de la comprensión de los números fraccionarios y de los decimales.

Los casos 6-C3 y 32-C3 son ejemplos de la primera modalidad, quienes hicieron una comparación correcta de las cantidades intensivas decimales. Los casos 8-C2 y 11-C3 son ejemplos de la segunda modalidad, quienes dividieron los términos sin identificar lo que representaban estas cantidades intensivas y únicamente basaron su respuesta eligieron cuál cociente era mayor, por lo que su respuesta fue incorrecta, ya que este caso tenía debieron haber optado por la menor. Además de la no comprensión de las cantidades intensivas surgió una dificultad al comparar los decimales, el caso 8-C2 eligió el cociente 0.75 mayor que 0.8 y 0.6. El caso 11-C3 requirió convertir los números decimales nuevamente en fracciones decimales y su representación gráfica.

Otra de las "estrategias" aplicadas fue la *regla de tres*. El uso de este algoritmo fue para la generación de pares equivalentes y a partir de ahí decidir la respuesta correcta. El caso 33-C3 utilizó la *regla de tres* tomando los dos términos de una razón (3:5) y el primer término de la razón a comparar (**6**:8) para generar una razón equivalente a la primera (3:5::6:x =3:5::6:10), de esta manera, teniendo los antecedentes de las razones iguales, comparó la razón equivalente generada con la que pretendía compararla(6:10 con 6:8), señalando que existe una diferencia de dos entre el 10 y el 8. Luego procedió inversamente planteó la razón 6:8 y tomó el primer término de la razón 3:5, entonces procedió 6:8::3:x=6:8::3:4, luego compara su resultado 3:4 con 3:5, llegando a la conclusión que existe una diferencia de 1 entre 4 y 5, por tanto, la razón mayor es 3:5. Al igual de quienes utilizaron la estrategia de valor unitario el profesor basa su respuesta en la selección de la razón mayor, aunque no fue posible apreciar su comprensión de las cantidades intensivas.

La estrategia de *creación de pares equivales* consistió en duplicar o partir cada una de las razones comparadas hasta encontrar un número en común, siempre y cuando fueran los antecedentes o los consecuentes. Con esta estrategia se evitó el uso de cantidades intensivas, lo que favoreció sus respuestas dando como resultado solo respuesta correctas. En esta estrategia siempre se mantienen los términos de la razón por separado y no los fusionan, por lo que les es más fácil comparar sólo un término, cuando las razones coinciden en alguno. En el uso de esta estrategia se evidencia la comprensión de la relación multívoca que guardan las razones y proporciones, es decir, los profesores conocen que para obtener razones equivalentes los dos términos de una razón deben ser multiplicados por un mismo factor para mantener la proporción, es decir, a:b (n) = a(n):b(n).

El procedimiento más usual de esta estrategia fue la igualación de los antecedentes de la razón, por ejemplo 3:5=24:40 y 8:10=24:30, posteriormente hacen la comparación no en términos de fracciones sino de las cantidades por separado, es decir, si a 24 tazas de agua le pongo 40 cucharadas de concentrado y a 24 tazas de la otra agua de sabor le pongo solo 30, es evidente que la primera agua tiene más sabor porque a la misma cantidad de agua le ponen mayor cantidad de cucharadas.

La forma en que se obtuvieron los pares equivalentes tuvo dos modalidades: una fue multiplicando directamente cada par de números por un factor que diera como resultado un común múltiplo de los antecedentes (3:5 por 8 y 8:10 por 3); otros mediante la duplicación en tablas (3:5 = 6:10 = 9:15…etc); y un procedimiento más fue mediante la simplificación de los pares de cantidades (3:5=**3:5**, 8:10=**4:5** y 6:8=**3:4).** Quienes utilizaron este último basaron su comparación tanto en los antecedentes como en los consecuentes (3:5 con 3:4 y 4:5 con 3:5), pero como la comparación permite tener presente siempre la relación entre los espacios de medida no tuvieron mayor dificultad. Además este procedimiento es más elaborado porque no solo iguala duplicando sino particionando. Lo que hay que reconocer es que quienes utilizaron esta estrategia muestran comprensión de las relaciones multívocas, correspondientes al pensamiento proporcional o multiplicativo.

La *estrategia aditiva incorrecta*, basada en un razonamiento aditivo, es decir, basada en la diferencia externa o interna de los pares de cantidades comparadas. La mayoría de quienes utilizaron esta estrategia decidió su respuesta en función de la diferencia externa entre las tazas de agua y las cucharadas de concentrado. Un caso basó su respuesta en la diferencia interna de tazas con tazas y cucharadas con cucharadas. De las relaciones dadas 3:5, 6:8 y 8:10 la diferencia de 3 y 6 es igual que la diferencia de 5 y 8; la diferencia de 6 y 8 es la misma que de 8 y 10, y la diferencia de 3 y 8 y de 5 y 10 también es la misma por lo tanto todas las aguas tienen el mismo sabor.

La estrategia de comparación cualitativa se dio en un caso, basa su experiencia en su oficio como panadero, pero la respuesta al problema la da a partir de la consideración de una sola variable: la cantidad de concentrado, por lo que no que el razonamiento proporcional no se encuentra presente.

Problema 3

En la solución al problema 3 fue uno de los fueron resueltos exitosamente por la mayoría de profesores. Para resolverlo se aplicaron dos estrategias, el valor unitario y la *regla de tres.* La mayoría utilizó la primera estrategia, utilizando el algoritmo de la división para hallar el valor unitario, otros lo hicieron mediante el reparto apoyados en el dibujo de las cantidades (15 dulces para $7.50), a partir de los cuales realizaron el reparto (2 dulces para $1.00) y así llegar al valor unitario (1 dulce/50 centavos). Una vez hallado el valor unitario algunos multiplicaron ese valor por el tercer término de la proporción y así hallar el cuarto, otros sumaron repetidamente y otros más contaron la cantidad correspondiente en los dibujos hechos. Estas diferencias es posible se deban la habilidad en el uso de algoritmos por un lado y otras a la certeza que les da su procedimiento, más que a un nivel superior en el razonamiento proporcional, aunque tampoco lo podemos descartar. También puedo señalar que el contexto cotidiano de compra facilitó el manejo de la razón 1/2, ya de por sí una relación fácil.

Los usos que los profesores le dieron a la tabla de variación proporcional

La tabla de variación proporcional fue uno de los recursos al que los profesores recurrieron para resolver el problema. También es un recurso al que los maestros y libros de texto recurren para promover el aprendizaje del tema. En el caso de las tablas de variación proporcional el 13.63 % de los profesores la utilizaron en promedio (*Figura 53*), aunque de distinta forma: una de ellas fue para verificar las soluciones (*Figuras 12, 13 y 24*), otra fue para hallar el valor unitario (*Figuras 7, 8, 11*) y la tercera fue para hallar la solución al problema a partir de duplicar el valor unitario (*Figuras 9, 10 y 12*).

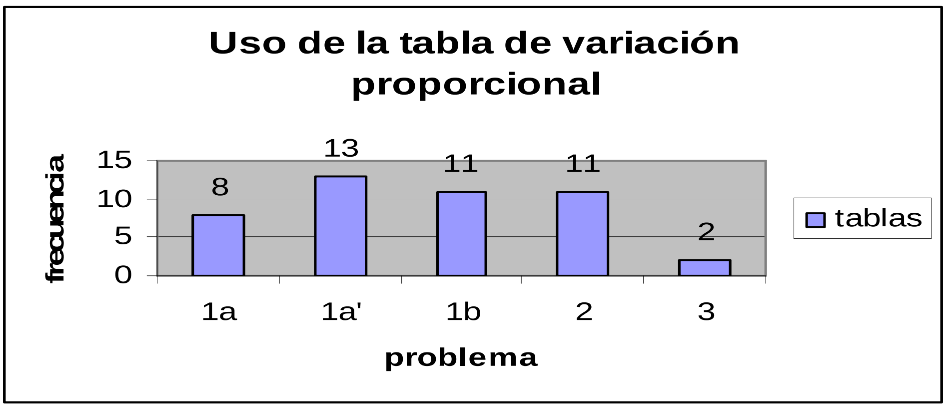


Figura 53. Frecuencia del uso de la tabla de variación proporcional

La primera forma consistió en que una vez obtenido el resultado del problema el profesor utilizaba la tabla para comprobar que su respuesta fuera correcta. Lo que hacía era duplicar el valor unitario hasta ubicar que el resultado obtenido anteriormente correspondía al de la tabla.

La segunda forma fue para hallar el valor unitario, procedimiento que tuvo dos modalidades: la primera mediante la *partición* sucesiva por mitades y la segunda por desagrupamiento. Estos procedimientos los describo en el apartado de las modalidades para la obtención del valor unitario en el problema *1a'*.

El tercer uso de la tabla fue para obtener la respuesta final al problema, con dos modalidades dependientes de la demanda del problema: valor faltante o comparar razones. El uso que se le dio a la tabla para hallar el valor faltante consistió en la duplicación del valor unitario, obtenido previamente, hasta encontrar el valor faltante. En el problema de comparación de razones, la tabla fue usada para hallar pares de números equivalentes que coincidieran en alguno de los términos que permitiera a los profesores hacer la comparación (Figura 35).

Respecto al uso de las tablas el profesor caso 33-C3, quien las utilizó para verificar su respuesta, habla de la importancia de las tablas para resolver los problemas de razón y proporción.

> ***E6****.* Lo que pasa es que… el registro de una tabla te permite, eh… proporcionar más datos, hacer comparaciones, pero necesariamente tiene uno que calcular primero, primero tienes que calcular y luego tus… tendrías tu tabla, pero primero es el cálculo pues.
>
> Ya una vez que tu calculaste, puedes deducirlo en la tabla, puedes aumentarle, disminuir porque para eso sirven las tablas de proporción. Puedes aumentarle el doble, uno más, si le aumentas 1 a una cantidad, también le aumentas a todo, o sea la misma cantidad, si le aumenta dos, dos le aumentas al otro. A eso se refiere proporcionalidad, o le aumentas doble, triple, disminuyes. Le puedes quitar uno punto cuatro, uno punto nueve, lo que tú quieras, pero a los dos… a las dos… a las dos líneas (*se refiere a las columnas de una tabla*) y… y el resultado siempre te va a salir correcto (Entrevista ABEJOR101105, p. 4).

Conclusiones

Del recuento y precisiones hechas de lo hallado en esta investigación quiero plantear las conclusiones en tres direcciones: El razonamiento proporcional de los profesores, el conocimiento del contenido por parte del profesor y propuestas de formación e investigación.

El razonamiento proporcional de los profesores

Algunas conclusiones de este trabajo, que enriquecen o corroboran los resultados de la investigación sobre razonamiento proporcional, están en función de las características de los problemas planteados y de las estrategias empleadas por los profesores.

Las tareas de valor faltante fueron fáciles de resolver cuando la razón utilizada por los profesores fue entera (8/1) o fracción sencilla (1/2), pero cuando la razón fue una fracción más compleja (4/5) resultó ser complicado resolver el problema. En cambio, el problema más difícil fue cuando se trató de comparar razones fraccionarias (5/3, 8/6 y 10/8).

Las estrategias utilizadas dependen de la demanda de la tarea. Cuando se trató de halla el valor faltante las estrategia fue el valor unitario la principal o la regla de tres, aunque ésta fuera para hallar el valor unitario. En cambio cuando se trató de comparar razones las estrategias se diversificaron: valor unitario, regla de tres, generación de pares equivalentes, diferencia aditiva, comparación cualitativa y la mayoría no mostró su procedimiento, a diferencia de los problemas de valor perdido, que casi inmediatamente saben que hallar el resultado depende de hallar el valor unitario.

La estrategia de *valor unitario* fue la más utilizada cuando se trató de un problema de valor faltante, en cambio cuando fue de comparación de razones su uso fue reducido.

La obtención del valor unitario resultó complicada cuando la razón fue fraccionaria (4/5), en cambio cuando la razón fue entera o de un medio fue muy fácil hallarlo.

Los procedimientos para obtener el valor unitario fueron diversos: la división, el reparto con apoyo gráfico, la partición sucesiva por la mitad, el desagrupamiento y la estimación. De estos la división, el reparto y desagrupamiento tuvieron éxito al hallar el valor unitario, en el caso de la partición sucesiva por la mitad y de la estimación no sucedió así.

La estrategia de valor unitario en el problema de comparación de razones, exitosa en algunos casos y no exitosa en otros, presentó dificultad con la comprensión de las cantidades intensivas y la comparación de fracciones y decimales.

La estrategia de *creación de pares equivalentes* se presentó únicamente en el problema de comparación de razones, la cual fue siempre exitosa. El proceso de duplicar, característica de la comprensión de las relaciones multívocas, permitió crear pares de números equivalentes sin perder de vista las unidades en relación, ya que una vez igualado uno de los términos de cada par, era evidente la diferencia de sabor entre una mezcla y otra.

La estrategia de diferencia aditiva se presentó únicamente en el problema de comparación de razones. Este procedimiento de comparar en base a la diferencia interna o externa de los pares de números comparados es resultado de la incomprensión de las razones.

La estrategia de *la regla de tres*, un algoritmo que para su aplicación depende de la identificación de los términos en juego, su ubicación correcta y la ejecución de la regla de multiplicar los medios o extremos y lo dividir el resultado por el tercer dato conocido, no da cuenta del razonamiento proporcional de quien la usa, sólo del dominio de un algoritmo. Sin embargo, en un caso se le dio un uso limitado: la obtención del valor unitario, pudiendo ser para hallar el resultado final.

La *comparación cualitativa* fue procedimiento basado en la experiencia del individuo, sin embargo, el caso aplicó esta estrategia no contempló las dos variables en relación, sino una.

Hubo un caso *sin estrategia* que no tenía idea de cómo resolver los problemas, no puedo decir más sobre su razonamiento porque no le encontré la lógica de sus respuestas.

Hubo casos que no mostraron sus procedimientos en todos los problemas, pero fueron más el problema *1a'* y más aún en el problema *2* lo que sugiere varias cosas. En el caso del problema *1a'* parece ser que se debió a la imposibilidad de hallar el valor unitario y prefirieron no compartir sus procedimientos. En el caso del problema 2 esta situación está relacionada con la imposibilidad de hallar una estrategia para comparar y sus respuestas las basaron en su intuición.

Las *tablas de variación proporción* son un recurso importante para resolver los problemas de proporcionalidad. En algunos casos para verificar la respuesta, en otros para hallarla y unos más para resolver parte del problema, como fue la búsqueda del valor unitario.

Por último, no hay muchos datos que den cuenta de la influencia del *contexto* en la solución del problema, pero sí pude apreciar que en el contexto del problema 3 (costo de dulces) resultó muy familiar para los profesores y les permitió resolver el problema. Aunque el contexto de agua de sabor pareciera familiar no lo es en el sentido que se planteó, nadie iguala el sabor del agua de naranja en la forma como se pide en el problema, tampoco nadie o muy pocos comparan el sabor considerando ingredientes, sino probando.

Finalmente puedo señalar que efectivamente los problemas de razón y proporción son difíciles. El reconocimiento de la relación multívoca, la noción de razón, la noción de cantidad intensiva y del reconocimiento del factor de proporcionalidad es indispensable para poder resolver tareas sobre el tema.

El conocimiento de los profesores sobre el contenido de razón y proporción y sus implicaciones

Como lo señalé en el apartado teórico, conocer el contenido implica el conocimiento de la disciplina, dominio de procedimientos heurísticos y algorítmicos, de conceptos o nociones, es decir es el conocimiento especializado de lo que se va a enseñar. La aproximación a este conocimiento del contenido de razón y proporción por parte del profesor fue a partir de los procedimientos empleados ante tareas de proporcionalidad. De este análisis concluyo que:

En primer lugar, considerando que las situaciones de razón y proporción que resolvieron los profesores, contenidas en el libro de texto de quinto grado y destinadas a los alumnos para el aprendizaje del tema, resultaron ser un problema para ellos como se muestra en la investigación. Por esta razón, puedo afirmar que existen carencias en el conocimiento del contenido matemático, puesto que una tarea matemática se convierte en problema cuando el individuo no tiene una solución inmediata o un procedimiento preestablecido que garantice su solución, por lo tanto, es pertinente que estas tareas sean problemas para los alumnos, pero no deberían serlo para los profesores porque son ellos quienes las utilizan para enseñar el contenido y deberían tener el conocimiento previo de procedimientos que garantizaran la solución. Esta circunstancia es una limitante para el trabajo de los profesores.

En segundo lugar, considerando que hubo dificultades para hallar la solución y errores que la impidieron relacionados al desconocimiento de conceptos -cantidades intensivas, razón, factor-, de operaciones y comparación de números -fracciones o decimales-, de diversidad de estrategias, o de aplicar un razonamiento aditivo cuanto demanda un razonamiento multiplicativo, es un problema mayúsculo, puesto que esta situación deja con muy pocas o sin herramientas al profesor para una enseñanza exitosa. Dificulta o impide planear situaciones de aprendizaje, guiar el aprendizaje de los alumnos durante la enseñanza y valorar sus logros, como lo señala Grossman, et al. (1989),

También esta situación de desconocimiento del contenido que viven los profesores, según Grossman, et al. (1989), es una de las causas que promueven que el libro de texto sea el principal y a veces el único recurso para enseñar y aprender, por lo que muchas veces los alumnos que sobresalen es por mérito propio o apoyo fuera de la escuela.

En tercer lugar, considerando que no existe una relación significativa entre las deficiencias de conocimiento del contenido de razón y proporción de los profesores y su grado de estudios (bachillerato, licenciatura, maestría), puedo suponer que en la formación docente no se ha dado un espacio curricular para que los profesores aprendan las matemáticas que les permitan estar un paso adelante de lo que se enseña en la primaria. Según mi experiencia en la escuela normal pública y en la licenciatura en educación primaria de la UPN, se trabajan la didáctica de las asignaturas, dando por hecho que ya tiene conocimiento del contenido matemático.

Otro supuesto es que los bajos logros de los alumnos en matemáticas, además de estar asociados a la dificultad cognitiva del tema y a condiciones contextuales de los estudiantes, están condicionados por el conocimiento del contenido del profesor.

Propuestas para la formación docente e investigación

Es urgente que en las escuelas formadoras de los docentes de primaria se implemente el estudio de las matemáticas como disciplina a la par de su didáctica y sus procesos de aprendizaje. Por una parte, porque esto permitirá que el profesor tenga herramientas para comprender, enriquecer o modificar los contenidos curriculares cuando sea necesario; por otra parte porque enriquecerá los procesos de planeación, instrucción y evaluación.

Con los profesores en servicio me parece importante crear cursos, talleres, diplomados o especialidades que favorezcan el conocimiento disciplinar de las matemáticas.

¿Cómo es la relación entre el dominio del contenido y el desempeño docente? ¿Las deficiencias de aprendizaje de los alumnos sobre algún tema se deben a la dificultad del contenido, a la forma enseñanza o son un reflejo de las dificultades del profesor? ¿Qué pasa con el conocimiento del profesor sobre otros contenidos de matemáticas? Son preguntas que me parece sería importante indagar, aunque me parece que estas deben ser a la par de accionar, por lo que la investigación-acción es un camino recomendable.

Referencias

Alatorre, S y Figueras, O. (2004) Proportional reasoning of quasi-illiterate adults (razonamiento proporcional de adultos con poca escolarización), en *PME28* Bergen, Norway 14–18 July 2004.

Ávila, A. (2001). Los profesores y sus representaciones. Sobre la reforma a las matemáticas. *Perfiles Educativos*. XXIII (93), 59-86.

Ávila, A., Block, D. y Carvajal, A. Investigaciones sobre educación preescolar y primaria (2003). En López, A., (Ed), *Saberes Científicos, Humanísticos y tecnológicos: proceso de enseñanza y aprendizaje (pp. 49-149)*. México: Grupo Ideograma Editores.

Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion (número racional, razón y proporción). In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 296-333). NY: Macmillan Publishing.

Bishop, Alan (1992) International perspectives on research in mathematics education (Perspectivas internacionales de la investigación en educación matemática) en Douglas A. Grows (Ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* USA: Mac Millan Pub. Co.

Bonilla, E. (1989) La educación matemática: una reflexión sobre su naturaleza y sobre su metodología. *Educación matemática*, 1, 2, 28-42.

Carvajal, A. (2001, mayo-agosto) El uso del libro de texto visto desde la etnografía. *Revista Mexicana de Investigación educativa.* 6 (12), 223-247

Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. (3a. Ed.) (Gilman, C., Trad.). Buenos Aires, Argentina: Aique. (Trabajo original publicado en 1991).

Cohen, L. y Manion, L (2002) *Métodos de investigación educativa* (2ª Ed.), Madrid, España: La muralla.

Ernest, P. (1992) Epistemological basis of qualitative research in mathematics education: a postmodern perspective (Bases epistemológicas de la investigación en educación matemática) en Douglas A. Grows (Ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. USA: Mac Millan Pub. Co.

Fernández, F. (2001). Proporcionalidad directa. En Castro. G (Ed.)*. Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria*. Madrid, España: Síntesis.

Fiol, M. y Fortuny, J. (1990) *Proporcionalidad directa. La forma y el número*. Madrid, España: Síntesis.

Flanders, N. (1977) La cadena de acontecimientos en el aula E investigación sobre la eficacia docente basada en el análisis de la interacción verbal de la clase. En N. Flanders. *Análisis de la interacción didáctica*. Salamanca: Anaya

Flick, U. (2002) An *Introduction to "Qualitative Research"* London: Sage Publications.

Freudenthal, H. (1983). *Didcatical Phenomenology of Mathematica* Structures. Reidel, Dordrecht. (Luis Puig, trad.).

Fullan, M. y Hargreaves, A. (1999). La escuela que queremos. Los objetivos por los que vale la pena luchar. México: SEP

Furinghetti, F. & Pehkonen, E. (2002) Rethinking characterizations of beliefs (39-57). In Leder, G., Pehkonen, E. and Törner, G. (Eds). Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education? Dordrecht/Boston/Londos: Kluwer Academic Publishers

Giddens, A. (1993) La producción y reproducción de la vida social (pp. 95-131). En A. Giddens. (1993) *La nuevas reglas del método sociológico*, Buenos aires: Amorrortu.

Greaves, C. (2001, mayo-agosto) Política educativa y libros de texto gratuito. Una polémica en torno al control de la educación. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*. 6 (12), 205-221.

Grossman, Wilson y Shulman (2005) Profesores de sustancia: el conocimiento de la materia para la enseñanza. (Pedro de Vicente Rodríguez, Trad.) *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado, 9, 2* (Trabajo original publicado en 1989).

Guerra, M. T. y López, D. M (2011, abril-junio). Las actividades incluidas en el libro de texto para la enseñanza de las ciencias naturales en sexto año de primaria. *Revista mexicana de investigación educativa.* 16 (49), 441-470.

Hart, Kathleen (1988). Ratio and Proportion (Razón y Proporción)*. En Number-Concepts and Operations in the Middle Grades Vol. 2*. USA: Lawrence Erlbaum Associates, National Council of Teachers of Mathematics.

Kang, W. y Kilpatrick, J. (1992) Didactical Transposition in Mathematics Textbooks*. In For the Learning of Mathematics* 12, 1 (February 1992).

Kilpatrick, J., Rico, L. y Sierra, M. (Eds.) (1992) Historia de la investigación en educación matemática*. Educación matemática e investigación* (pp. 15-8). Madrid, España: Síntesis.

Kilpatrick, J. Rico, L. y Gómez, P (Eds.), (1994) Investigación en educación matemática: su historia y algunos temas de actualidad*. Educación Matemática, "una empresa docente" (*pp. 1-18*)*. Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

Lamon, S. J. (1996) Ratio and Proportion: cognitive foundations in unitizing and Norming. En Hare, G. and Confrey, J., (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*. Albany, N.Y.: SUNY PRESS.

Lawton, C. (1993). Contextual Factors Affecting errors in Proportional Reasoning (Errores provocados por factores contextuales en el razonamiento proporcional). *Journal for Research in Mathematics Education*. 24 (5), 460-466.

Lesh, Richard (1988). Proportional Reasoning (Razonamiento proporcional)*. En Number-Concepts and Operations in the Middle Grades Vol. 2*. USA: Lawrence Erlbaum Associates, National Council of Teachers of Mathematics.

Levav-Waynberg, Anat and Leikin Roza (2006) Solving problems in different ways: teachers' knowledge situated in practice. In Novotná Jarmila, Moravá, Hana, Drátká, Stehiliková Nad'a *Proceedings 30th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, 4, 57-64. Prague: PME.

Liakopoulou, María (2011, diciembre) The Professional Competence of Teachers: Which qualities, attitudes, skills and knowledge contribute to a teacher's effectiveness?[La competencia professional del professor: ¿Qué cualidades, actitudes, habilidades y conociientos contribuyen a la efectividad del professor?] *International Journal of Humanities and Social Science, 1(21), 66-78*

Llinares, S. (1994). El profesor de Matemáticas. Conocimiento Base para la Enseñanza y Desarrollo Profesional. En García, V. (Ed) *La enseñanza de las Matemáticas en la Educación Intermedia* (pp. 296-337). Barcelona, España: RIALP.

Llinares, S. y Sánchez, M. (1990). El conocimiento profesional del profesor y la enseñanza de las matemáticas. En Llinares, S. y Sánchez, M. (Eds) *Teoría y*

Práctica en Educación Matemática., colección Ciencias de la Educación, Sevilla, España: ALFAR

Lo, J. (2004) Prospective elementary school teachers' solution strategies and reasoning for a missing value proportion task. En *PME28*. Bergen, Norway 14–18 July 2004.

Luna, E. (2002) La participación de docentes y estudiantes en la evaluación de la docencia. En Rueda, M. y Díaz, A. (Eds.) *Evaluación de la docencia. Perspectivas actuales.* México: Paidos.

Martínez (2006) Educación matemática para todos. México: Comité Regional Norte de Cooperación con la UNESCO.

Mochón, Simón y Morales Flores, Melchor (2010, abril) En qué consiste el "conocimiento matemático para la enseñanza" de un profesor y cómo fomentar su desarrollo: un estudio en la escuela primaria. *Educación Matemática*, 22 (1), 87-113

Monereo, C., Castelló, M., Clariana, M., Palma, M. y Pérez, M. L (1998) Estrategias de enseñanza y aprendizaje. México: SEP

Moreno, L. y Waldegg, G. (2004) Aprendizaje, matemáticas y tecnología. Una visión integral para el maestro. México: Santillana

National Research Council (2005) *Advancing Scientific Research in Education. Committee on Research in Education*. Lisa Towne, Lauress L. Wise, and Tina M. Winters (Eds) Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, DC: The National Academies Press.

Niss, M. (1996). ¿Por qué enseñamos matemáticas en la escuela? En Puig, L. y Calderón, J. *Investigación y didáctica de las matemáticas* (pp. 19-30) Madrid, España: Ministerio de educación y ciencia.

Nunes, T. y Bryant P. (1997). Las matemáticas y su aplicación: la perspectiva del niño. México: Siglo XXI

O´Daffer, P.G.; Clemens, S. y Charles, R (1992). Preálgebra. E.U.A.:Addison-Wesley

Peltier, M. (1999, diciembre). Representaciones de los profesores de la escuela primaria sobre las matemáticas y su enseñanza. *Educación Matemática*, 11 (3), 5-24.

Perrenoud, P. (2004). Diez nuevas competencias para enseñar. México: Grao/SEP

Pirie, Susan (1998) Working toward a design for qualitative research (Trabajando hacia un diseño para la investigación cualitativa) en Anne Teppo (ed.) *Qualitative Research Methods in Mathematics Education*. Virginia, EUA: NCTM.

Powell, A. B. and Hanna Evelyn. Understanding teachers' mathematical knowledge for teaching: a theoretical and methodological approach (comprendiendo el conocimiento matemático de los profesores: una aproximación teórica y metodológica). In Novotná Jarmila, Moravá, Hana, Drátká, Stehiliková Nad'a *Proceedings 30th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, 4, 369-376. Prague: PME.

Resnick, L. & Singer, J. (1993). Protoquantitative origins of ratio reasoning. In T. Carpenter, E. Fennema, & T. Romberg (Eds.) Rational Numbers: An Integration of Research. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Rezat Sebastian. A model of textbook use. In Novotná Jarmila, Moravá, Hana, Drátká, Stehiliková Nad'a *Proceedings 30th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, 4, 409-416. Prague: PME

Rockwell, E. y Mercado, R. (1986). La práctica docente y la formación de maestros en Rockwell, E. y Mercado, R. (Eds) *La escuela, lugar del trabajo docente. Descripciones y debates (pp.* 63-74). México: Cuadernos de Educación DIE

Robert, A. y Robinet, J. (1989) Representaciones de los profesores de matemáticas sobre las matemáticas y su enseñanza. *Cuadernos del DIDIREM* No. 1. (Ávila, S. Trad.).

Rockwell, elsie (1995). De huellas, bardas y veredas: una historia cotidiana en la escuela en E. Rockwell (Ed.) l*a escuela cotidiana* (pp.13-57). México: Fondo de Cultura Económica.

Rojas Soriano Raúl (2000) 9ª edición "Formación de investigadores educativos" Una propuesta de investigación. México: P Y V.

Ruiz, Ma. L. (2003) Aprendizaje y matemáticas en Chamorro, Ma. Didáctica de las matemáticas (pp. 32-68). Madrid, España: Pearson

Ruthven, K. (2002). Linking Researching With Teaching: Towards Synergy of Scholarly and Craft Knowledge (Uniendo investigación y enseñanza: hacia una sinergia entre lo académico y el conocimiento práctico). *En* English, Lyn (Ed.), *Handbook* *of International Research in Mathematics Education*. London: Laurence. Erlbaum Associates, Publisher.

Santos Trigo, Luz Manuel (1997). Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Saucedo, M. E., Hermosillo, A. (2004). Los libros de texto en la clase de matemáticas. En Avila, A. (Ed.) *La reforma realizada. La resolución de problemas como vía del aprendizaje en nuestras escuelas* (pp. 165-214). México: SEP.

SEP (1993) Educación básica. Primaria. Plan y programas de estudio. México: SEP

SEP (s.f.) Matemáticas. Cuarto grado. México: SEP

SEP (2000) Matemáticas. Quinto grado. México: SEP

SEP (2001) Matemáticas. Sexto grado. México: SEP

Stenhouse, L. (1987) "¿Qué es un currículo?". En L. Stenhouse*. La investigación cómo base de la enseñanza.* Madrid, España: Morata.

Stenhouse, L. (1987). "El currículum hipotético". En L. Stenhouse. *La investigación cómo base de la enseñanza.* Madrid, España: Morata.

Schwartz, J.L. (1987). Intensive quantity and referent-transforming arithmetic operations (cantidad intensiva y el referente transformador en las operaciones aritméticas). *Paper presented at the Research Agenda Conference on Middle School Mathematics*, Dekalb, Il., April 1988.

Thompson, A.F. *Creencias y concepciones de los maestros*. Síntesis de la investigación. En Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 127-146). EUA: (Sáiz, M. Trad.)

Tyler, Ralph W. (1982). *Principios básicos del currículum.* Buenos Aires: Troquel.

Vargas, M.A. (2001, mayo-agosto). Actividades de producción oral y escrita en los libros de español. Aproximaciones a un análisis de dos libros de destinados a primer grado de primaria. *Revista Mexicana de investigación educativa* 6 (12), 249-261

Vergnaud, G. (1990) La teoría de los campos conceptuales. En *Recherches en Didactique de Mathématiques*, 10 (2-3), 133-170.