UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

SECRETARÍA ACADÉMICA

COORDINACIÓN DE POSGRADO

MAESTRÍA EN DESARROLLO EDUCATIVO

ESTRATEGIAS DE TRANSFORMACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS Y COMPRENSIÓN DE SU EQUIVALENCIA UTILIZANDO UN SISTEMA ALGEBRAICO COMPUTARIZADO (APLUSIX)

Tesis que para obtener el Grado de:

Maestro en Desarrollo Educativo

Presenta:

DAVID SILVA BAUTISTA

Director(a) de Tesis: **DRA. VERÓNICA HOYOS AGUILAR**

MÉXICO, D.F. Enero, 2011

Doy infinitas gracias…
A Dios, por el camino recorrido….
A mis hijas, por ser mi fuerza y templanza…
A mi esposa, por su amor y apoyo…
A Dios, por las personas que puso en mi camino
A la vida…. Por lo aprendido y aprehendido

INDICE

INTRODUCCIÓN 1

CAPÍTULO I
ANTECEDENTES

1.1 El álgebra en el bachillerato 4

1.2 Breve revisión de la noción de equivalencia en el programa de matemáticas del primer año del bachillerato general 7

1.3 Revisión de los estándares del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de los Estados Unidos enfocados a la utilización de recursos tecnológicos en la enseñanza de las matemáticas 12

1.4 Revisión de algunos estudios enfocados a la noción de equivalencia algebraica mediante la utilización de un CAS 14

1.5 Descripción del CAS de la calculadora TI-92 Titanium de TEXAS INSTRUMENTS 24

1.6 Descripción del CAS Aplusix 26

1.7 Resumen del Capítulo I 33

CAPÍTULO II
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y MARCO TEÓRICO

2.1 Planteamiento del Problema de estudio 34

2.2 Introducción a la Problemática 35

2.2.1 Sentido de las expresiones 37

2.2.2 Justificación del estudio 38

2.3 Marco Teórico 40

2.3.1 Relación entre teoría, técnica y tarea 40

2.3.2 Los Sistemas Algebraicos Computarizados (CAS) 42

2.3.3 Un entorno para el aprendizaje del álgebra 43

2.3.4 El uso de la tecnología en la enseñanza matemática 45

2.3.5 Definición de la noción de equivalencia algebraica 46

2.3.6 Relación entre artefacto, instrumento y acto instrumental 48

2.3.7 Grados de instrumentación e instrumentalización 51

2.3.8 Resumen Capítulo II 53

CAPÍTULO III
METODOLOGÍA

3.1 Panorama general 54

3.1.1 Escenario del estudio exploratorio 54

3.2 Implementación del estudio exploratorio 55

3.2.1 Revisión de las actividades diseñadas para un Sistema de Cálculo Formal (SCF) 56

3.3 Adaptación e instrumentación de las actividades que sustentan este estudio exploratorio 60

3.3.1 Objetivo, características y descripción de las actividades aplicadas en este estudio exploratorio. Introducción al manejo, al uso y manipulación del CAS 62

3.3.2 Actividad I: Comparación de expresiones mediante la evaluación numérica 63

3.3.3 Actividad II: Comparación de expresiones mediante manipulación algebraica (con papel y lápiz) 65

3.3.4 Actividad III: Verificación de la equivalencia, mediante la re-escritura de la forma de una expresión algebraica dada, usando el CAS Aplusix 67

3.3.5 Actividad IV: Verificación de la equivalencia, sin re-escribir la forma de una expresión, mediante el uso de una prueba de igualdad 68

3.3.6 Actividad V: Verificación de la equivalencia, usando cualquiera de los métodos de CAS 70

3.3.7 Resumen Capítulo III 72

CAPÍTULO IV
RESULTADOS Y ANÁLISIS DE DATOS

4.1 Análisis de las respuestas obtenidas en el trabajo escrito de los alumnos, y las observaciones de las videograbaciones 74

4.2 Actividad I: Comparación de expresiones mediante la evaluación numérica 74

4.2.2 El caso de una estudiante de 3º de secundaria de desempeño alto (Pati) 88

4.3 Actividad II: Comparación de expresiones mediante manipulación algebraica 93

4.4 Actividad III: Verificación de la equivalencia, mediante la re-escritura de la forma de una expresión algebraica dada, usando el CAS Aplusix 98

4.5 Actividad IV: Verificación de la equivalencia, mediante el uso de la prueba de igualdad 103

4.6 Actividad V: Verificación de equivalencia, usando cualquiera de los métodos de CAS (Aplusix) 108

4.7 Resumen Capítulo IV 113

CAPÍTULO V
CONCLUSIONES 114

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 121

ANEXO I 128

INTRODUCCIÓN

La utilización de entornos tecnológicos computarizados se ha incrementado y popularizado para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, particularmente en álgebra (ver, por ejemplo, Ball y Stacey, 2003; Kieran y Saldanha, 2005*;* Kieran y Drijvers, 2006). Sin embargo, algunos investigadores reportan ventajas y desventajas de estas herramientas tecnológicas (Olive et al, 2010; Hoyos, 2009).

En relación con el aprendizaje del álgebra, Kieran y Drijvers (2006) señalan que el Sistema Algebraico Computarizado (CAS) ha potenciado la comprensión de los conceptos algebraicos de los alumnos. Argumentan que discutir sobre la forma en que el CAS presenta los resultados promueve un entendimiento profundo de los conceptos algebraicos involucrados.

Por su parte, Ball, Pierce y Stacey (2003) sostienen que en los estudiantes que denotan un bajo nivel, el CAS ayudó a incrementar su conocimiento del álgebra, pues al proponerles rutinas algebraicas éstas fueron desarrolladas exitosamente por ellos.

Este trabajo de tesis se propuso conocer y analizar cuáles son las estrategias de transformación de expresiones algebraicas que desarrollan los estudiantes de bachillerato.

Se buscó la participación de estudiantes de segundo semestre de bachillerato (de la Escuela Comercial Cámara de Comercio de la Ciudad de México) para instrumentar actividades de enseñanza, en las cuales se usó Aplusix. Este software sirvió para validar sus transformaciones y como medio facilitador para la comprensión de la noción de la equivalencia algebraica.

En este trabajo de tesis también se pretendió observar el grado de instrumentación e instrumentalización (Drijvers y Trouche, 2008; Iranzo y Fortuny, 2009) de los estudiantes cuando utilizaron el CAS en las actividades propuestas.

Las tareas de los estudiantes consistieron en transformar expresiones algebraicas con Aplusix con el propósito de analizar la relación que existe entre las expresiones producidas y, de esta manera, descubrir la noción de equivalencia algebraica.

De manera sintética se puede decir que Aplusix se usó como herramienta para obtener datos, que luego se registraron en las hojas de trabajo.

Cabe decir que algunas sesiones del estudio exploratorio fueron videograbadas. Tal respaldo se llevó a cabo, debido a que es una forma de obtener información para corroborar nuestras hipótesis acerca de la utilidad de los medios de aprendizaje alternativos.

El análisis de los datos nos permitió ver la funcionalidad del ambiente tecnológico de aprendizaje Aplusix en la transformación de las nociones algebraicas del estudiante y reconocer que los estudiantes pueden desarrollar un pensamiento matemático distinto bajo la utilización de ambientes de aprendizaje de este tipo. Si bien estos ambientes no suplen a las clases comunes de matemáticas, sí las complementan, y por consiguiente, se avanza en la posibilidad de obtener un aprendizaje significativo (ver, Moreno y Waldegg, 2004).

Esta tesis está estructurada en cinco capítulos. El primero da cuenta del estado del arte, esto es, se revisa la literatura sobre trabajos de investigación anteriores que retoman el uso de la tecnología para la enseñanza del álgebra, en especial sobre la equivalencia algebraica con el uso de un CAS. En este primer capítulo de la tesis también se encuentran las consideraciones que es necesario tener en cuenta para el uso de los CAS en el aula.

En el segundo capítulo se presenta detalladamente el marco teórico que guía este trabajo de tesis y que brinda el soporte de las actividades que nos propusimos llevar a cabo con los dos medios ambientes (papel y lápiz y CAS) en dos situaciones escolares distintas, una en un salón de clases y la otra en entrevista.

El tercer capítulo aborda la metodología de la investigación. También se describe el sitio del proyecto Algebra in Partnership with Technology in Education (por sus siglas en inglés, APTE) lo que sirvió, en conjunto con el estudio realizado por Kieran y Drijvers (2006), como fuente para el diseño y adaptación de las actividades utilizadas en este estudio exploratorio. El capítulo concluye con la descripción del proceso de diseño e instrumentación de las actividades propuestas, cuya finalidad fue la de generar aprendizajes matemáticos que son parte del currículum obligatorio en el bachillerato. Específicamente, se trató de coadyuvar a la comprensión del aprendizaje de la noción de equivalencia algebraica con el uso de un CAS.

En el cuarto capítulo se presentan los datos que se obtuvieron a partir de la participación de los estudiantes de segundo semestre de bachillerato de la Escuela Comercial Cámara de Comercio de la ciudad de México, la fecha y lugar de realización de la experimentación, las herramientas para la recolección y los datos obtenidos. En este apartado también se detallan el desarrollo y avance de los estudiantes a partir de las actividades que se instrumentaron durante las sesiones de trabajo.

También se presenta el análisis efectuado a partir de las respuestas escritas de los alumnos a las hojas de trabajo. También se revisaron registros en video, y notas tomadas al término de las actividades, fruto de las discusiones y preguntas que se generaron en el aula. Adicionalmente, se muestran algunas imágenes de las respuestas y registros de los escolares.

El quinto capítulo contiene un resumen de los principales resultados del capítulo cuarto y las conclusiones generales que se derivan del estudio exploratorio que se realizó. Se resalta sobretodo la categorización de las ejecuciones de los estudiantes que aquí se pudo corroborar (ver Iranzo y Fortuny, 2009).

Finalmente, se incluye un Anexo, que presenta el guión de las actividades (I a V) y las preguntas de reflexión que se plantearon a los estudiantes en las hojas de trabajo.

CAPITULO I

Antecedentes

1.1. El álgebra en el bachillerato

Durante las últimas décadas, en México se le ha dado mayor importancia en el programa de matemáticas de bachillerato al contenido algebraico; por ello, la investigación en educación matemática también tuvo esta tendencia.

Sin ser propio de nuestro país, hacia 1990 se registraron diversos estudios que versaban sobre la utilización de recursos tecnológicos en la enseñanza de las matemáticas a nivel básico y medio superior: Logo, Excel, Cabri-Geometre, Simecalc-Math World, Mathematica, Function Machines, L´Algebrista, la Calculadora TI-92, Geometer´s Sketchpad, etc. Los referidos estudios se enfocaron, luego de que éstos se habían puesto en práctica, principalmente a la evaluación de los resultados y sólo algunos se desarrollaron bajo un contenido algebraico: Concretamente sobre la noción de equivalencia algebraica.

Quizá la falta de investigaciones, sobre temas algebraicos relacionados con el uso de nuevas tecnologías, distancia al profesor de los recursos tecnológicos actuales que complementan su labor en el aula.

En el nivel medio superior (aunque no sólo en éste) existen carencias que perjudican los procesos de enseñanza-aprendizaje. De estas carencias se desprende una serie de dificultades que afecta tanto a quien enseña como a quien aprende. Así, algunas dificultades detectadas están relacionadas con la poca capacidad de concentración e interés manifestada por el estudiante. Lo anterior es importante, ya que de la capacidad de concentración e interés de quien aprende dependerá la incorporación de un aprendizaje duradero y realmente significativo.

Rodríguez y Salazar (2004) sostienen que a la mayoría de los alumnos no les atrae el estudio de las matemáticas porque las perciben difíciles y aburridas, debido a la forma en que el profesor las enseña.

En los últimos años, las instituciones de nivel medio superior en México implementaron reformas curriculares, cuyos objetivos persiguen el logro de una flexibilidad del currículo, promover una formación integral de los individuos y fomentar el crecimiento de éstos a partir de adecuados ambientes culturales. Sin embargo, las inconsistencias entre los fines y los medios para su consecución[1] denotan la necesidad de relacionar la enseñanza de las matemáticas con la tecnología, pues así se propiciaría en el estudiante mayor comprensión y razonamiento de la disciplina.

En el programa de la asignatura de Matemáticas I de bachillerato se especifica la utilización de ésta sólo como un recurso para romper con la instrucción tradicional y no como un medio para desarrollar el pensamiento matemático.

La Matemática es una disciplina que en su proceso de aprendizaje requiere de una secuencia en el tratamiento del contenido; hay temas antecedentes que permiten abordar conceptos ubicados posteriormente; por ello, se organiza el área del conocimiento mediante asignaturas que guardan un orden lógico para su tratamiento. Así, el álgebra es un antecedente para la solución de problemas que se presentan en geometría, trigonometría y asignaturas subsecuentes.

Los conceptos fundamentales y subsidiarios, que aparecen en la organización de cada una de las asignaturas, permiten, por un lado, la formulación de macro conceptos (categorías) y, por otro lado, el tratamiento de contenidos procedimentales y actitudinales (a partir de diversos problemas que se presentan en una realidad cargada de sucesos sociales, naturales, científicos y tecnológicos).

En álgebra, una problematización referida al cálculo de las medidas de un terreno, que se conoce por su perímetro, permite establecer una expresión algebraica o modelo matemático para que a partir de éste se hallen sus posibles soluciones. En la geometría analítica, el tratamiento de lo unidimensional y bidimensional permite localizar y representar, en un sistema de coordenadas, un determinado problema para su análisis.

La estructura de contenidos procedimentales promueve el fortalecimiento de la disciplina matemática de bachillerato. En la siguiente figura se muestra la ramificación del álgebra en este nivel educativo.

---

[1]Cf. La reforma actual (Reforma integral de bachillerato 2008).

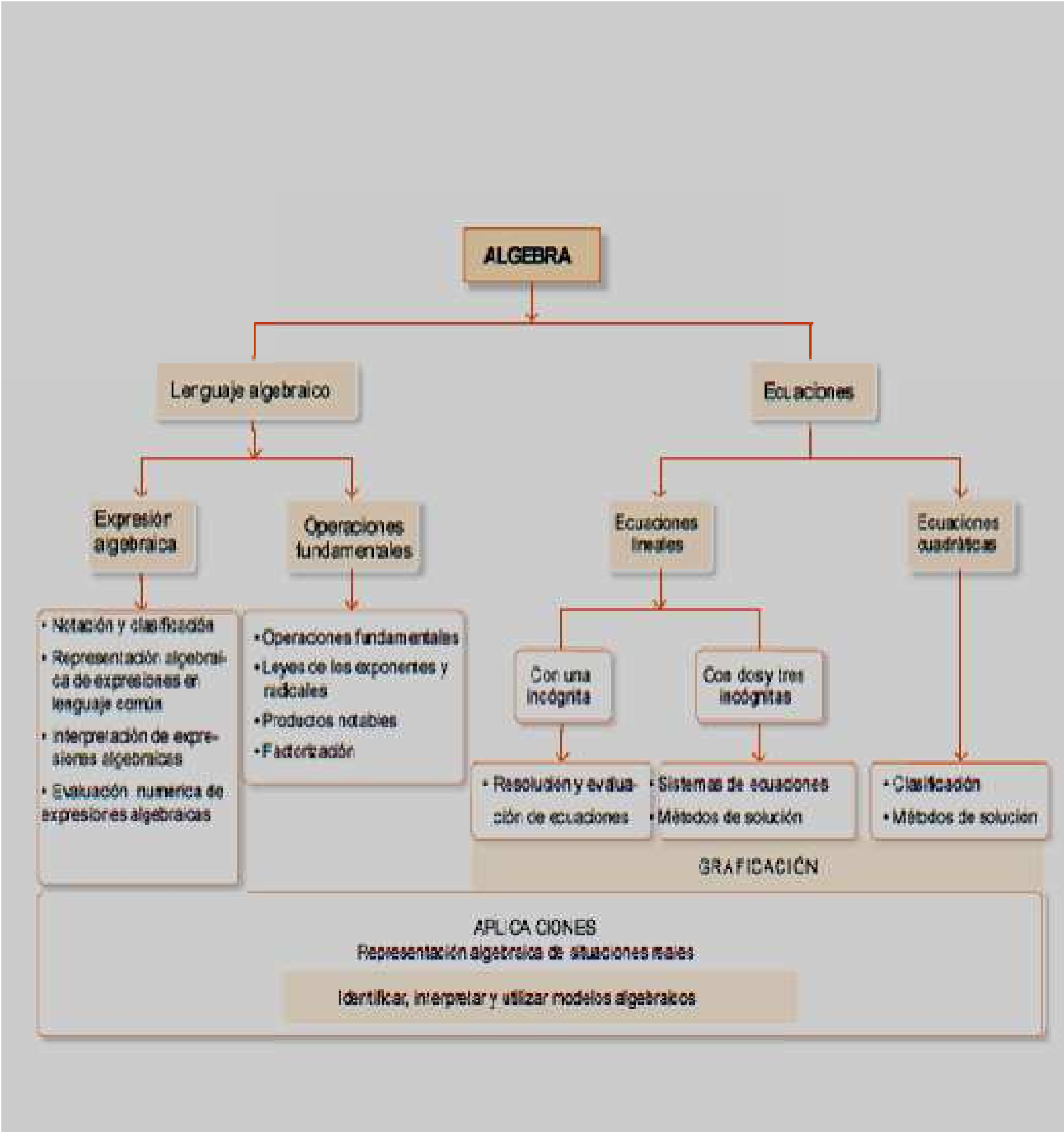


Figura. 1.1. Ramificación del álgebra en el bachillerato general.

La asignatura de Matemáticas I del bachillerato general tiene su antecedente en las matemáticas de educación secundaria (que en nuestro país se considera parte de la educación básica). Según el plan de estudios de la Secretaría de Educación Pública (SEP) (2006) los estudiantes aprenden a plantear y resolver problemas en distintos ámbitos de su realidad. Así como a justificar la validez de los procedimientos y resultados cuando emplean el lenguaje matemático como un elemento más de comunicación.

Con respecto al nivel bachillerato general, el mismo plan de estudios de la SEP indica que en los estudiantes se consolidan y diversifican los aprendizajes y desempeños adquiridos y, por tanto, se amplia y profundiza en los conocimientos, habilidades, actitudes y valores relacionados con el campo de las matemáticas. Así, en matemáticas I se promueve el uso de representaciones y procedimientos algebraicos para resolver situaciones de su entorno, que implican el manejo de magnitudes variables y constantes.

En las asignaturas siguientes de este nivel, el desempeño se fortalecerá con el manejo de las relaciones funcionales entre dos o más variables, mismas que permitirán al estudiante modelar situaciones o fenómenos y, obtener, explicar e interpretar sus resultados; por tanto, en matemáticas II el fortalecimiento se da al relacionar magnitudes físicas o espaciales y también determinísticas o aleatorias, en matemáticas III mediante el cambio y la equivalencia entre representaciones algebraicas y geométricas y, finalmente, en matemáticas IV mediante el empleo de diversos tipos de relaciones funcionales.

1.2. Breve revisión de la noción de equivalencia en el programa de matemáticas del primer año del bachillerato general

Con base en un análisis del programa de matemáticas del primer año del bachillerato general (DGB/DCA/2009-03) el cual está dividido en diez bloques (Bloque I a Bloque X) y se encuentra centrado en el ámbito del álgebra, específicamente en el tema de la noción de equivalencia, se puede destacar que en el primer semestre del bachillerato se aborda el contenido de álgebra (propiedades y aplicaciones) estudiado en secundaria y se agregan particularmente algunas actividades: En el Bloque I se enseña el uso de variables y expresiones algebraicas en el contexto de los números positivos. En el Bloque II se extiende lo anterior al conjunto de los números reales, incluyendo comparaciones mediante tasas, razones, proporciones y la variación proporcional como caso simple de relación lineal entre dos variables.

En el siguiente se estudian sucesiones y series (aritméticas y geométricas) de números, bosquejando funciones discretas (lineales y exponenciales).

Los Bloques IV y V ilustran sobre operaciones con polinomios en una variable y factorizaciones básicas y de trinomios (incluyendo productos notables y expresiones racionales). Los tres siguientes Bloques: VI, VII y VIII analizan los sistemas de ecuaciones 1 x 1, 2 x 2, y 3 x 3 en estrecha conexión con la función lineal. Finalmente los Bloques IX y X exponen el estudio de las ecuaciones cuadráticas en una variable y su relación con la función cuadrática.

A partir de lo anterior observamos que el aprendizaje del álgebra es importante para todos los estudiantes y no sólo para aquellos que van a continuar en una carrera universitaria.

La noción de equivalencia es importante en el estudio del álgebra porque, generalmente, la falta de claridad de este concepto dificulta la solución de problemas algebraicos, ya que no existe: un adecuado desarrollo, encadenamiento y transformación de una expresión en sus diferentes formas equivalentes.

Aunque la idea de equivalencia algebraica está tendida en el corazón de la transformación algebraica, típicamente no es puesta en primer plano en la instrucción algebraica (Kieran y Saldanha, 2005).

La literatura de investigación sobre el aprendizaje del álgebra, aunque muy extensa (Kieran, 1992), incluye pocas investigaciones respecto al entendimiento de la equivalencia algebraica (Ball, Pierce, y Stacey, 2003; Kieran, 1984; Pomerantsev y Korosteleva, 2003; Steinberger, Sleeman, y Ktorza, 1990). Por lo anterior, el conocimiento respecto al entendimiento de la equivalencia algebraica es mínimo, lo cual se denota al cuestionarnos acerca de cómo ese entendimiento podría desarrollarse en los alumnos cuando hagan el trabajo de transformación en álgebra y se apropien de él.

Ahora bien, las manipulaciones simbólicas de las expresiones están presentes en la práctica de la escuela. Esto puede apreciarse, en el estudio de los Bloques IV y V donde se presentan operaciones con polinomios en una variable y factorizaciones básicas y de trinomios (incluyendo productos notables y expresiones racionales).

En estas actividades el estudiante tiene que realizar una serie de transformaciones algebraicas: descomponer productos, desarrollar, sustituir, resolver las ecuaciones, simplificar las expresiones, etcétera. De tal manera, en el núcleo de las tareas existe la idea de cambiar la forma de una expresión o ecuación a otra, manteniendo las equivalencias (Kieran, 2003; pp. 123). El concepto de equivalencia es básico para comprender la manipulación y transformación de símbolos; por ello a continuación se muestran algunos ejemplos de cómo los estudiantes tienen que realizar estas transformaciones en diferentes ramas de las matemáticas en donde se encuentra inmerso el concepto de equivalencia en el bachillerato:

1. **ALGEBRA**

1) $$\boxed{x^2 + (a+b)\,x + ab = (x+a)\,(x+b)}$$

$$(x+a)\,(x+b) = x^2 + ab + bx + ax = x^2 + ab + (a+b)\,x = x^2 + (a+b)\,x + ab$$

2) $$\boxed{x^2 + (a-b)\,x - ab = (x+a)\,(x-b)}$$

$$(x+a)\,(x-b) = x^2 - ab - bx + ax = x^2 - ab + (a-b)\,x = x^2 + (a-b)\,x - ab$$

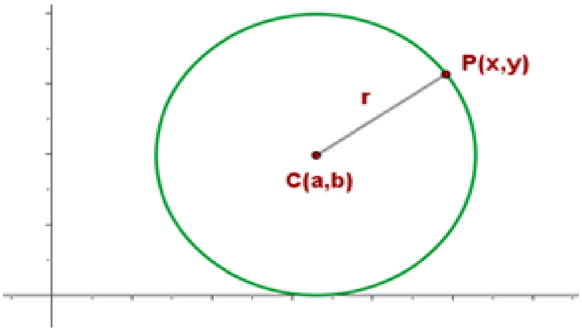
3) $$\boxed{x^2 - (a+b)\,x + ab = (x-a)\,(x-b)}$$

$$(x-a)\,(x-b) = x^2 - ab - bx - ax = x^2 - ab - (a+b)\,x = x^2 - (a+b)\,x - ab$$

4) $$\boxed{mnx^2 + ab + (mb+na)\,x = (mx+a)\,(nx+b)}$$

$$(mx+a)\,(nx+b) = mnx^2 + ab + mbx + nax = mnx^2 + ab + (mb+na)\,x = mnx^2 + (mb+na)\,x + ab$$

2. GEOMETRÍA ANALÍTICA



$$d(C,P) = r$$

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

Elevando al cuadrado obtenemos la ecuación:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Si desarrollamos:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

y realizamos estos cambios:

$$A = -2a \qquad B = -2b \qquad C = a^2 + b^2 - r^2$$

Obtenemos otra forma de escribir la ecuación:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Donde el centro de la circunferencia es:

$$C\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$$

y el radio de la circunferencia cumple la relación:

$$r^2 = \left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C$$

3. CALCULO DIFERENCIAL

Las reglas que se tienen que seguir para poder desarrollar las derivadas por incremento son las siguientes:

Derivada de una función en un punto. Dada la función f(x) continúa en el intervalo abierto I, se define la derivada en el punto "a" como:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Sí en lugar de considerar h el incremento de la variable independiente x lo sustituimos por Δx tenemos que la definición queda:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

En el caso de que hagamos h=x-a tenemos a+h=x, y la definición nos queda de la siguiente forma:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Función derivada. Dada la función f(x) continúa en el intervalo abierto I denominamos función derivada a:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Sí en lugar de considerar h el incremento de la variable independiente x lo sustituimos por Δx tenemos que la definición queda:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Como podemos ver, los conceptos y métodos algebraicos son, algunas veces, insuficientes para transformar y comprender las expresiones. De tal manera, que este tipo de tareas hacen que los alumnos sean llamados a construir nuevas estrategias de solución.

En bachillerato el estudio del álgebra, específicamente el tema de la noción de equivalencia, no se desarrolla claramente, aunque el concepto de equivalencia está inserto implícitamente dentro de cada uno de los diez Bloques (I a X) ya mencionados. De hecho, a lo largo de los diez Bloques el estudiante realiza transformaciones algebraicas. Todavía más, la noción de equivalencia algebraica no es considerada importante, pese a que la identificación y realización de expresiones equivalentes podría ayudar al alumno a visualizar relaciones entre las transformaciones algebraicas y sus simplificaciones o resultados. También suele pasar que los profesores no vinculen la noción de equivalencia con la transformación algebraica porque lo perciben como tema distinto. Sin embargo, tanto la transformación algebraica como la noción de equivalencia son ejes fundamentales en el álgebra.

En nuestro país, el estudio sobre el concepto de equivalencia está poco abordado. Quizá al explorar el tema con la utilización del CAS Aplusix, como se propone en el presente trabajo de investigación, se obtenga un aprendizaje íntegro, no fragmentado, pues se estaría logrando la conexión de conceptos matemáticos.

1.3. Revisión de los estándares del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de los Estados Unidos enfocados a la utilización de recursos tecnológicos en la enseñanza de las matemáticas

A continuación se presenta una breve revisión de la utilización de recursos tecnológicos enfocados a la enseñanza de las matemáticas (etapa 9-12) dentro de los estándares de los Estados Unidos.

Según el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de los Estados Unidos, National Council Teachers of Mathematics (NCTM), (1989), en matemáticas se pone énfasis en la deducción y resolución de problemas usando las calculadoras y computadoras. Desde la perspectiva de dicho consejo los alumnos de secundaria y bachillerato deberían tener oportunidad de profundizar en la comprensión de las relaciones y funciones y ampliar, así, su repertorio de familias de funciones. También considera la necesidad de que los estudiantes utilicen herramientas tecnológicas para representar y estudiar el comportamiento de funciones polinómicas, exponenciales, racionales y periódicas, entre otras. El

NCTM señala que con el uso de herramientas tecnológicas los estudiantes aprenden a combinar funciones, a expresarlas en formas equivalentes, a componerlas y, cuando es el caso, a encontrar las funciones recíprocas, ya que los aprendices necesitan desarrollar la comprensión de las propiedades algebraicas que rigen la manipulación de los símbolos en las expresiones, ecuaciones y desigualdades para alcanzar fluidez al operar mentalmente, a mano o con máquinas para resolver ecuaciones y desigualdades.

Otras consideraciones del Consejo referido son las siguientes:

El amplio repertorio de tipos de funciones disponibles en secundaria y bachillerato para modelizar matemáticamente, debería suministrar medios poderosos y versátiles a los alumnos para analizar y describir su mundo.

Los alumnos pueden crear modelos y analizar una amplia serie de fenómenos del mundo real, con programas de manipulación simbólica, representación grafica y ajuste de curvas, así como con programas y hojas de cálculo para representar procesos iterativos.

Los alumnos deberían ser capaces de operar con soltura cuando se trata de expresiones algebraicas, de combinarlas y de cambiar su forma. Tales destrezas constituyen la base de la habilidad para hallar las soluciones de una ecuación o expresión algebraica, un objetivo que siempre ha sido central en el currículo del álgebra.

Tanto si los alumnos resuelven ecuaciones mentalmente, como si lo hacen a mano o usando un CAS, deberían desarrollar la habilidad para trabajar con símbolos para incentivar la capacidad de representar situaciones de selección de métodos apropiados de resolución y para juzgar si los resultados son admisibles. Desarrollar la capacidad de operar con símbolos algebraicos también es importante porque se adquiere habilidad para transformar expresiones algebraicas, además de expresar las funciones en formas que revelen distintos tipos de información sobre ellas.

1.4. Revisión de algunos estudios enfocados a la noción de equivalencia algebraica mediante la utilización de un CAS

En seguida se hace referencia a diferentes investigaciones que proponen el uso de la tecnología para la enseñanza del álgebra, concretamente para la enseñanza de la noción de equivalencia algebraica a partir de la utilización de un Sistema Algebraico Computarizado.

Los investigadores revisados son: Cerulli y Mariotti (2002), Ball, Pierce y Stacey, (2003), Chaachoua, Nicaud, Bronner y Bouhineau (2004), *Kieran y Saldanha (2005) y* Kieran y Drijvers (2006).

El trabajo de Cerulli y Mariotti (2002) presenta el software L'Algebrista, el cual es considerado por los autores como un "micromundo" y en donde incorporan la teoría básica de las expresiones algebraicas.

La tesis de Cerulli (Introducing pupils to algebra as a theory: L'Algebrista as an instrument of semiotic mediation, 2004) da cuenta de las actividades llevadas a cabo dentro del micromundo, las cuales consistieron en transformar expresiones primero numéricas y luego simbólicas. La cadena de las transformaciones mencionadas correspondió a la prueba de la equivalencia de expresiones dentro de la teoría de las expresiones algebraicas.

La hipótesis básica planteada por los autores refería que en el álgebra los axiomas, los teoremas y las definiciones son los elementos principales implicados en la transformación de expresiones.

La investigación de Cerulli y Mariotti (2002) incluye un experimento realizado a lo largo un año escolar en una clase de 9º grado (lo que en nuestro país equivale a tercero de secundaria). Los entornos de la secuencia de actividades y las ideas básicas que los inspiraron fueron:

- ***Introducir a los alumnos a manipulación simbólica.***
- ***Introducir a los alumnos a una perspectiva teórica.***

Dado que en este grado escolar los estudiantes consideran a las expresiones numéricas como equivalentes, cuando ellas dan el mismo resultado numérico, en las actividades del experimento se planteó el problema de comparar expresiones.

El resultado obtenido de dicha tarea fue que no es difícil negociar la interpretación de expresiones numéricas como esquemas de cálculo, que serán equivalentes si ellas dan el mismo resultado.

El micromundo L'Algebrista no es capaz de realizar ninguna transformación si no es dirigida explícitamente por el estudiante que usa y manipula los botones de los comandos.

En contraste con lo que pasa con otros manipuladores simbólicos —como la calculadora TI-92 de Texas Instruments donde el estudiante sólo introduce los parámetros de la expresión y mediante la aplicación de comandos: Solve y Expand, por ejemplo, el CAS realiza las operaciones de manera interna y luego al presentar el resultado final el estudiante debe estar en la posibilidad de interpretarlo— Cerulli y Mariotti (2002) señalan que en L'Algebrista el estudiante tiene el control total sobre la actividad de transformación de las expresiones. Además, hace explícitas las relaciones finales de entidades matemáticas que están implicadas en la manipulación simbólica. La siguiente figura muestra la pantalla del micromundo.

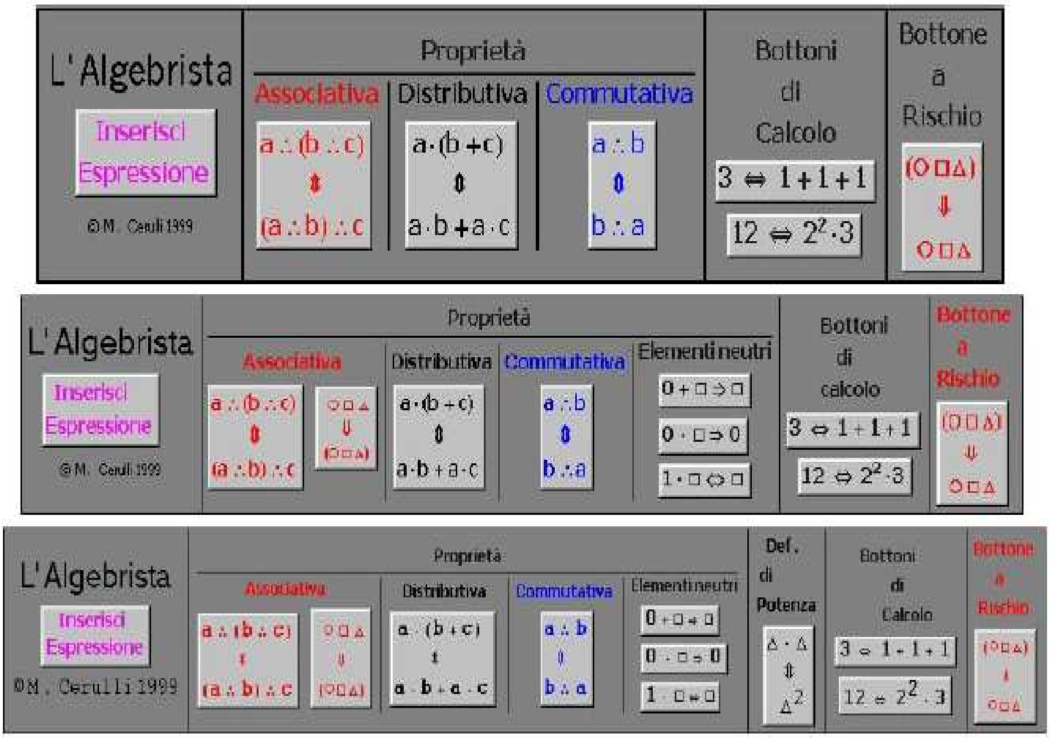


Figura 1.4.1 Pantalla del micromundo L´Algebrista.

En el estudio de Cerulli y Mariotti (2002) el concepto de relación de equivalencia fue el subalterno básico principal para la manipulación simbólica, lo que representó el punto de partida de las actividades para los estudiantes. Finalmente los estudiosos mencionan que de acuerdo con la teoría Vygotskiana, las expresiones y comandos pueden ser pensados como signos externos de la teoría algebraica. De tal manera, que pueden convertirse en instrumentos de mediación semiótica. Así, pueden ser utilizados por el profesor para inducir a los estudiantes a la manipulación sintáctica como una actividad teórica.

El siguiente estudio revisado es el de Artigue, M. (2002a). En éste, la noción de equivalencia algebraica se analizó a partir del trabajo realizado por los estudiantes a quienes se les propuso pasar una expresión algebraica de una forma a otra mediante transformaciones algebraicas. Para lograr lo anterior el autor defendió su planteamiento: "*Los Problemas de equivalencia surgen como algo que va más allá de lo que es normal en el salón de clases*."

El estudioso empleó un CAS como un “apalancar para promover el trabajo sobre la sintaxis de las expresiones algebraicas, que es algo muy difícil de motivar en ambientes usuales" (Artigue, 2002a, 265), lo cual forzó a los estudiantes para que se enfrentaran a la solución de problemas donde involucren la noción de equivalencia y de simplificación algebraica.

La tercera investigación explorada del concepto de equivalencia y del uso del CAS, es la de Ball, Pierce y Stacey (2003). Ellos mencionan que la capacidad de reconocer expresiones algebraicas equivalentes de manera rápida y con confianza, se torna necesaria para hacer matemáticas en asociación inteligente con el álgebra computacional. El trabajo de estos tres investigadores aporta la idea de “expectativa algebraica”, misma que consideraron una habilidad algebraica paralela al cálculo numérico. Ellos monitorearon el progreso de esta habilidad por más de dos años en un grupo de 50 estudiantes al inicio del 11º grado (segundo año de Bachillerato) con quienes utilizaron un nuevo instrumento: la prueba de expectativa algebraica. También utilizaron las cuatro operaciones básicas y la raíz cuadrada, en el aprendizaje del álgebra con un CAS.

En esta investigación Ball, Pierce y Stacey (2003) indican que los estudiantes comenzaron la llamada prueba de expectativa algebraica con poca destreza y confianza y, por tanto, sus avances fueron modestos. Sin embargo, hacia el final del trabajo con los estudiantes, confirman en su estudio la importancia de sortear obstáculos apoyándose en un CAS, el cual debería incorporarse explícitamente en los planes de estudios.

Esta prueba algebraica descubrió lo esencial que resulta la toma rápida de decisiones (en tiempo real), ya que reflejó cómo la expectativa algebraica provee la observación en curso constante y, casi inconsciente, de los resultados algebraicos; por ello, fue elemental exponer preguntas que tuvieran un tiempo limitado para responder. Cabe decir que la prueba fue diseñada para ser administrada mediante la aplicación de una presentación en Microsoft PowerPoint con un tiempo de 10 segundos entre cada pregunta.[2] Dada la necesidad de una buena concentración el tiempo de la prueba no podía exceder más de 5 minutos, aproximadamente 25 preguntas fueron aplicadas, mismas que fueron seleccionadas sobre la base de investigaciones anteriores acerca del aprendizaje del álgebra o del uso del CAS.[3]

La pertinencia y la validez fueron examinadas por experimentados profesores de matemáticas, a quienes se les preguntó si esperaban, o no, que los estudiantes en los grados 11º y 12º (segundo y tercer año de bachillerato respectivamente) podrían establecer rápidamente la noción de equivalencia en las expresiones algebraicas sin la utilización de procedimientos o cálculos escritos.

Ball, Pierce y Stacey (2003) indican que sin ser estudiante cualquier persona, dependiendo de su edad y su etapa, puede poseer una "buena expectativa algebraica”. Lo anterior influyó en la creación de los ítems de la prueba de expectativa algebraica.

En la figura 1.4.2. se presenta el tipo de ítems utilizados por Ball, Pierce y Stacey (2003) cuando realizaron la prueba de expectativa algebraica. También se observan los resultados obtenidos en la misma.

---

[2] Tiempo basado en una prueba previa realizada por Pierce (2002).
[3] Cf. Drijvers, 2000; Kieran, 1992; MacGregor y Stacey, 1997

Item no	Item	Item Facility Feb 01	Item Facility Sep 02	Well-placed certainty Feb 01	Well-placed certainty Sep 02	Misplaced certainty Feb 01	Misplaced certainty Sep 02
21	$\frac{2a^3 + 5}{a^2} \quad 2a + \frac{5}{a^2}$	10	40	4	36	38	16
12	$\frac{s}{t} + \frac{p}{t} \quad \frac{-(s+p)}{-t}$	16	36	6	22	30	12
16	$\frac{4+b}{4} \quad 1 + \frac{b}{4}$	16	56	8	32	32	12
20	$\sqrt{2} + \sqrt{y} \quad \sqrt{2+y}$	18	34	10	22	42	44
11	$a + p \quad q \quad \frac{a+p}{q}$	24	52	18	36	58	34
4	$\frac{12x}{6x} \quad 2x$	24	58	20	42	54	30
7	$\sqrt{16x - 4y} \quad 2\sqrt{4x - y}$	26	48	14	24	26	16
3	$\frac{2+x}{y+2} \quad \frac{x}{y}$	28	40	20	20	32	42
15	$2x^2 - y^2 \quad (2x - y)(2x + y)$	28	82	18	42	38	10
17	$6 + (4a + 2b) \quad 2 \quad 6 + 2a + b$	34	28	16	14	12	8
10	$\frac{1}{3} + \frac{1}{y} \quad \frac{2}{3+y}$	34	62	14	36	28	10
9	$\frac{a-b}{d-c} \quad \frac{a}{d} - \frac{b}{c}$	38	38	34	26	16	26
14	$sin(2x) \quad (sin\,2)x$	54	64	24	36	8	6
8	$h - x^2 \quad x - \pm\sqrt{h}$	54	90	28	76	12	2
5	$\frac{12x}{6x} \quad 2$	56	70	36	58	34	20
23	$(b+a)^2 \quad a^2 + b^2 + 2ab$	58	94	42	78	28	2
2	$n^2(n^3 + 1) \quad n^5 + n^2$	60	88	32	78	32	4
1	$x \quad y \quad y \quad x$	72	96	52	92	22	0
24	$\sqrt{xy} \quad \sqrt{x+y}$	82	96	66	92	6	2
13	$2f - g + 3f - g \quad 5f - 2g$	88	94	64	72	4	2
22	$2y + 6 \quad 2(y \quad 3)$	92	94	78	82	6	0
6	$5m \quad m^5$	92	100	78	94	6	0
	Average over items	46	66	31	51	26	14

Key: <40% | 40-75% | >75%

Table 1: Algebraic Expectation Quiz results Feb 2001 and Sept 2002 (N=50)

Figura 1.4.2. Items utilizados y resultados obtenidos en la prueba de expectativa algebraica.

En la figura expuesta puede observarse que cada item contiene dos expresiones algebraicas. Se pidió a los estudiantes decidir si estas expresiones eran o no equivalentes.

Finalmente en su estudio Ball, Pierce y Stacey (2003) mencionan que los resultados obtenidos demuestran que los estudiantes prácticamente no tienen confianza y, por consiguiente, tienen poca facilidad para reconocer la equivalencia algebraica. Afirman que el reconocimiento de la equivalencia algebraica, incluso en casos sencillos, fue un obstáculo importante para los estudiantes. Así, ellos definen y analizan la expectativa algebraica en relación con elementos como saber convenciones y propiedades básicas de las operaciones, y tener desarrollada la capacidad de identificar la estructura y las características claves de las expresiones algebraicas.

La cuarta investigación revisada, sobre el tema de la noción de equivalencia y el uso de los sistemas algebraicos computarizados que esta tesis incluye, es la de los franceses: Chaachoua, Nicaud, Bronner y Bouhineau (2004) quienes describen el uso del CAS Aplusix en una clase de 10º grado (1er año de bachillerato) para mostrar la influencia de estas herramientas tecnológicas en la construcción de competencias en álgebra. Concretamente, evaluaron el trabajo de los estudiantes durante una secuencia dedicada a la descomposición de productos en factores y a la solución de ecuaciones algebraicas. Esta secuencia fue una lista de ejercicios que los estudiantes tuvieron que resolver utilizando el CAS Aplusix con el modo de retroalimentación del sistema activado (validación de la equivalencia entre las transformaciones). Analizaron el comportamiento de los estudiantes en el Pre-test. Observaron las dificultades de éstos para aplicar los conocimientos previos aprendidos en el 9º grado.

Chaachoua, Nicaud, Bronner y Bouhineau (2004) aplicaron un Pre-test y Post-test con diferentes tipos de ejercicios de temas algebraicos de 9º grado (tercero de secundaria) usando siempre el CAS Aplusix.

A continuación se muestra el tipo de ejercicios utilizados y los resultados obtenidos en el Pre-test y Post-test.

T0: $ax + b = 0$ ***T1:*** $ax + b = cx + d$ ***T2***: $(ax + b)\times (cx + d) = 0$

T3: $(ax + b)\times (cx + d) = (ex + f)\times (gx + h)$

Type of problems	Pre-test	Post-test
T_1	46%	74%
T_2	3%	63%
T_{3c}	27%	71%
Total	18%	68%

Figura 1.4.4. Evolución de los estudiantes entre el pre-test y el post-test (porcentajes de los ejercicios resueltos con ayuda del CAS Aplusix).

Chaachoua, Nicaud, Bronner y Bouhineau (2004) presentan la figura 1.4.5 para exponer las acciones llevadas a cabo por María, alumna participante. Los investigadores describen las capacidades y estrategias desarrolladas por María quien resolvió la equivalencia entre sus transformaciones. Lo anterior fue posible gracias a la retroalimentación que le proporcionó el CAS Aplusix, lo que a su vez le permitió detectar y corregir sus errores.

$(x+2)\ (x-3) = (x+2)\ (x-4)$ Solve $\vert$ $(x-3) = (x-4)$ 1) María duplica la ecuación dada. Entonces, selecciona y borra (x +2) en cada lado.	$(x+2)\ (x-3) = (x+2)\ (x-4)$ Solve $\not\Updownarrow$ $(x-3) = (x-4)$ 2) Hace clic en el botón verificar. Aparece una flecha roja tachada indicando la no equivalencia.
$(x+2)\ (x-3) = (x+2)\ (x-4)$ Solve $\vert$ $x^2-x+2x-5 = x^2-4x+2x-8$ 3) María elimina la ecuación y en el siguiente paso muestra una forma ampliada de la ecuación dada.	$(x+2)\ (x-3) = (x+2)\ (x-4)$ Solve $\not\Updownarrow$ $x^2-x+2x-5 = x^2-4x+2x-8$ 4) Hace clic en el botón de verificación y se comprueba una vez más que en la respuesta no hay equivalencia.
$(x+2)\ (x-3) = (x+2)\ (x-4)$ Solve $\vert$ $x^2-3x+2x-6 = x^2-4x+2x-8$ 5) Elimina 5 y María inserta 6 en este lugar. Luego 3 para introducir un cambio en–x que ahora es -3x.	$(x+2)\ (x-3) = (x+2)\ (x-4)$ Solve $\Updownarrow$ $x^2-3x+2x-6 = x^2-4x+2x-8$ 6) Se hace clic en el botón de verificación y recibe una respuesta de si equivalencia.

Figura 1.4.5. Algunas transformaciones realizadas por María en el CAS Aplusix.

En general, los resultados obtenidos por Chaachoua, Nicaud, Bronner y Bouhineau (2004) reflejan que los estudiantes cambiaron sus respuestas con mayor facilidad que cuando utilizan papel y lápiz (ambiente tradicional). Señalan que los estudiantes no dudaron en probar nuevas estrategias de transformación, lo cual demuestra, según los investigadores mencionados, la influencia de las herramientas del CAS Aplusix en la construcción de competencias en álgebra.

Chaachoua, Nicaud, Bronner y Bouhineau (2004) concluyen su estudio confirmando su hipótesis sobre la dimensión didáctica de la disponibilidad de la verificación de la equivalencia. El CAS Aplusix puede ser visto como un medio para la validación, en el sentido dado por Brousseau (1997), ya que el estudiante puede saber si su respuesta es correcta o no, sin la intervención del profesor, lo que puede reducir el efecto del contrato didáctico, en el cual los estudiantes tratan de adivinar el resultado esperado por el profesor al momento de evaluarlos.

El quinto estudio revisado sobre el tema que este trabajo de tesis trata es la de Kieran y Saldanha (2005). En este trabajo analizan el razonamiento de los estudiantes de secundaria. Algunos de ellos participaron en un estudio exploratorio de enseñanza en el salón de clases, en el que se usó el CAS de la calculadora TI-92 de Texas Instruments. En conjunto con el ambiente tradicional (uso de papel y lápiz) los investigadores promovieron la reflexión sobre la equivalencia algebraica.

Kieran y Saldanha (2005) presentan la participación de 15 estudiantes, mismos que habían aprendido las bases de las técnicas de factorización y resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas durante el año anterior. También habían usado calculadoras graficadoras sobre una base regular. Sin embargo, no tenían experiencia previa con las calculadoras de manipulación simbólica. Los resultados de una prueba preliminar indicaron que estos estudiantes eran muy calificados en la manipulación algebraica.

Como ya se dijo, para la realización de dichas actividades se proporcionó a los participantes las calculadoras TI-92 de Texas Instruments. El resultado indicó que la mayoría de los estudiantes supieron cómo hacer transformaciones algebraicas para resolver las ecuaciones lineales simples. No obstante, también hubo participantes que no relacionaron estos conocimientos con la producción de expresiones equivalentes.

Según Kieran y Saldanha (2005), el razonamiento sobre las expresiones en relación con su forma común permitió a los estudiantes averiguar si las expresiones dadas eran equivalentes o no. También mencionan que muchos estudiantes tuvieron dificultades para diferenciar la noción de equivalencia de la de igualdad.

- La siguiente ecuación tiene como soluciones $x = 2$ *y* $x = 2/3$

$$x\,(2x - 4) + (-x + 2)^2 = -3x^2 + 8x - 4$$

(i) ¿con precisión qué significa esto, decir que, " los valores 2 y 2/3 son las soluciones de estas ecuaciones "?

(ii) use CAS para mostrar que:

(a) los dos valores de arriba son de verdad soluciones,

(b) no hay ningunas otras soluciones

- ¿son las expresiones del lado izquierdo y derecho ecuaciones equivalentes?

Figura.1.4.6. Pregunta del Post-test que revela la interpretación de la equivalencia.

El análisis preliminar del post-test indicó, por un lado, que la idea de la forma común (una noción que fue explicada al inicio de la instrucción) fue importante porque ayudó a los estudiantes a evaluar la equivalencia de determinadas expresiones algebraicas. Por otro lado, también encontraron pruebas suficientes que muestran las diferencias entre el concepto de igualdad y el de equivalencia, pues muchos estudiantes denotaron que éste no es claro. Tal situación manifestada, por parte de los estudiantes, estuvo presente a pesar de que participaron en una secuencia instructiva, diseñada para dilucidar las diferencias y resaltar el avance conceptual de la igualdad y la equivalencia.

Una de las conclusiones del mencionado trabajo de Kieran y Saldanha (2005) refiere que no se debe subestimar la relación conceptual entre la igualdad y la equivalencia, pues de alguna manera también aclara las diferencias entre ellos. De hecho, los investigadores descubrieron que las implicaciones entre las dos nociones no son insignificantes y nos recuerdan que la instrucción tiene que ser consciente de esa posibilidad.

El recorrido que se hace del estado del arte finaliza con la revisión de la investigación de Kieran y Drijvers (2006), el cual fundamenta, en gran parte, este trabajo de tesis. Ellos enfocan su trabajo en la relación dialéctica entre el pensamiento teórico y la técnica. Apoyan su investigación en un sistema de álgebra computarizada (CAS) y en un ambiente de papel y lápiz. En otras palabras, el marco teórico de su estudio consistió en el acercamiento instrumental y en una adaptación de la teoría antropológica de Chevallard.

El objetivo principal de ellos persiguió el esclarecimiento entre el pensamiento teórico de los estudiantes y las técnicas que usan en ambos ambientes de comunicación (papel y lápiz y CAS).

Kieran y Drijvers (2006) realizaron dos experimentos en clases de 10º grado. El primero fue sobre la equivalencia, la igualdad y la ecuación y, el segundo, relacionado con la generalización y la demostración dentro de la descomposición de factores. Aunque los dos asuntos son bastante diferentes, las conclusiones de los pensadores señalan la importancia de la co-emergencia de la teoría y la técnica en ambos casos. En su trabajo prestaron atención a la potencialidad de los sistemas algebraicos computarizados (CAS), de uso general para realizar cualquier tipo de procedimiento algebraico.

Guiaron su estudio a partir de la pregunta central: *¿De cuántas maneras la interacción entre la técnica y la teoría fomenta el pensamiento algebraico de los estudiantes al trabajar en un ambiente combinado de CAS/papel-y-lápiz?*

Las perspectivas que asumieron para dar respuesta a esta pregunta fueron varias, entre ellas es que ven a los CAS como un instrumento matemático y consideran el empleo del CAS como un caso particular del empleo de un instrumento. De ahí que, el trabajo de Vygotsky sobre el empleo de instrumentos está en la base del trabajo de Kieran y Drijvers (2006). Así, parafrasean la noción de instrumento como una extensión del cuerpo. En este sentido, los CAS, que son un instrumento cognoscitivo, pueden ser vistos como una extensión de la mente.

Refieren la existencia de muchas publicaciones que muestran un valioso acercamiento al entendimiento de las interacciones de CAS-estudiante y su influencia en la enseñanza y el estudio: Artigue, 1997, 2002a; Lagrange, 2000, 2005; Trouche, 2000, 2004a, b; Guin et al., 2004. La aportación de las mencionadas investigaciones ha sido aplicado no sólo a la integración del CAS en el estudio de las matemáticas, sino también al empleo de hojas de cálculos (Haspekian, 2005) y sistemas de geometría dinámicos (Falcade, 2003).

Kieran y Drijvers (2006) propusieron a los estudiantes, que participaron en su experimento, que escribieran su interpretación acerca del trabajo realizado en el medio tradicional y el realizado con el CAS. Lo anterior sustrajo nociones matemáticas, mismas que fueron objeto de reflexión y discusión en el salón de clases y, ello, facilitó el reto de puntualizar ideas y distinciones algebraicas. Una de las tareas principales en el trabajo de Kieran y Drijvers (2006) consistió en la tarea de Evaluación Numérica, cuyo objetivo principal fue que los estudiantes notaran que algunos pares de expresiones parecen siempre terminar con resultados iguales, y así, denotar un primer acercamiento a la noción de equivalencia basada en la igualdad numérica.

Según los estudiosos, lo señalado se relaciona con dos aspectos reflejados en la noción de equivalencia de expresiones algebraicas; la equivalencia de dos expresiones se relaciona con el valor numérico, lo que a su vez deriva la idea de que los “valores de salida son iguales para todos los valores de entrada”. Proponen que la noción de equivalencia de expresiones desde una perspectiva algebraica significa que las expresiones se pueden reescribir en una forma algebraica común. Por lo tanto, la progresión conceptual intencionada de esta secuencia de enseñanza, con el 10^{o} grado, radica en que los estudiantes desarrollan un entendimiento integrado sobre la equivalencia de las expresiones, en las cuales las perspectivas numéricas y algebraicas son coordinadas. Al concluir su investigación observaron que la técnica y la teoría surgen en la interacción mutua.

Además, para que los estudiantes obtuvieran expresiones equivalentes, usando las funciones de resolución del CAS, necesitaron usar papel y lápiz para resolver expresiones algebraicas a mano. Así, se recalca que los ambientes propuestos por el CAS combinan dos tipos de técnicas: técnicas de papel y lápiz y técnicas de CAS. Las actividades propuestas por Kieran y Drijvers (2006) sobre los ambientes indicados demuestran cómo las técnicas dan lugar al pensamiento teórico, y viceversa, y de cómo las reflexiones teóricas conducen a los estudiantes a desarrollar y utilizar técnicas. Hacen énfasis en que las técnicas usadas para resolver una expresión algebraica pueden ser aplicables a una amplia gama de problemas. Por último, mencionan que la relación real entre la Tarea, la Técnica y la Teoría (TTT) dependen de la situación planteada.

1.5. Descripción del CAS de la calculadora TI-92 Titanium de TEXAS INSTRUMENTS

A continuación se realiza una breve descripción de las capacidades del CAS: calculadora TI-92, a partir de la revisión del manual de usuario de dicha calculadora.

El conjunto de actividades (I a VIII) que Kieran y Drijvers (2006) desarrollaron en su estudio, retomadas y adaptadas en esta tesis (sólo la parte 1 de la actividad I), fueron pensadas y diseñadas para su realización mediante el uso y manejo del CAS de las calculadoras de Texas Instruments (TI), particularmente de los modelos TI-92 o TI-Voyage 200.

La principal diferencia entre una calculadora con CAS y una calculadora tradicional o graficadora se encuentra en la habilidad, de la primera, para trabajar simbólicamente con expresiones y fórmulas, en lugar de trabajar sólo numéricamente, debido a su sistema de álgebra computacional. Por ejemplo, una expresión como $a + b$ es interpretada siempre como "la suma de dos variables", y no como "la suma de dos números" (con valores asignados).

Una calculadora con CAS nos permite automatizar manipulaciones tediosas o difíciles. Así, puede desarrollarse el binomio de Newton en la expresión $(x – 10)^{500}$. La calculadora logra evaluar y simplificar las expresiones algebraicas simbólicamente; por ello, al introducir (x^3-x^2-8x+12)/(x+3) devuelve $x^2 - 4x + 4$. La respuesta de forma predeterminada es clara, ya que se muestra cómo sería escrito en papel; en vez de x^2-4x+4 devueltos por las calculadoras que son incapaces de desplegar superíndices o subíndices.

El modelo TI-92 incluye habilidades como:

- La descomposición en factores de expresiones algebraicas. Incluye la descomposición en fracciones parciales.
- La simplificación algebraica. El CAS puede, por ejemplo, combinar varios términos en una fracción para encontrar un denominador común.
- La evaluación de expresiones trigonométricas a los valores exactos. Así, el Sin (60 °) devuelve $\frac{\sqrt{3}}{2}$ en vez de 0,86602.
- La resolución de ecuaciones para una variable determinada. El CAS no sólo puede resolver una sola variable en función de otra, sino también puede resolver sistemas de ecuaciones. Para las ecuaciones cuadráticas donde hay múltiples soluciones, devuelve todos ellos.
- Las ecuaciones con infinitas soluciones se resuelven mediante la introducción de constantes arbitrarias en: Solve (tan(x+2)=0,x) devuelve x = @ n1 π -2, con la @ n1 para representar cualquier número entero.

- En la búsqueda de los límites de funciones, incluye los límites infinitos y los límites de una sola dirección.
- La diferenciación simbólica y la integración. Las derivadas y las integrales definidas se evalúan con exactitud, según sea posible.
- La elaboración de gráficas de ecuaciones paramétricas (ecuaciones polares).

La siguiente figura presenta una imagen de la pantalla de la calculadora TI-92 de Texas Instrument.

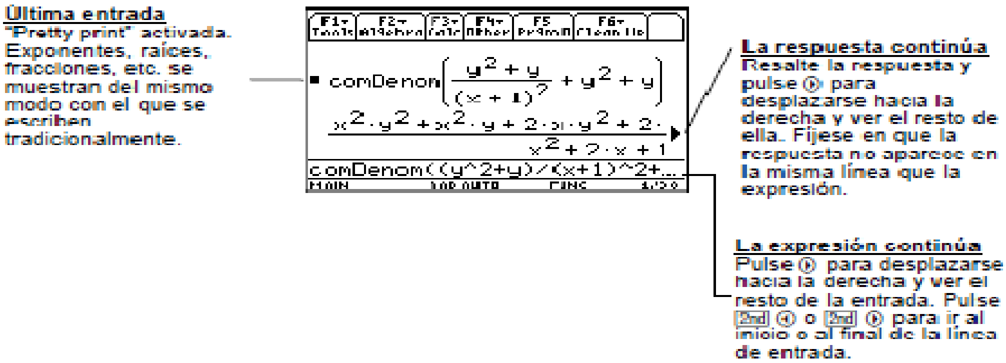


Figura 1.5.1. Pantalla principal de la TI-92.

En síntesis, el CAS de las calculadoras de Texas Instruments (TI-92), herramienta de tecnología avanzada, contiene la mayoría de los paquetes de cómputo, los cuales son seleccionados para la enseñanza de las matemáticas y en particular del álgebra. Este CAS tiene las funciones de cálculo de una calculadora científica. Su capacidad gráfica la convierte en un medio para abordar distintos aspectos del currículo de matemáticas de educación básica y media superior: manipulación numérica y algebraica; graficación de funciones; procesador geométrico Cabri-Géomètre; edición y manipulación de matrices y, en particular, tablas similares a una hoja de cálculo.

1.6. Descripción del CAS Aplusix

Según el manual de usuario y manual del editor, el CAS Aplusix, diseñado por Chaachoua, Nicaud, Bronner y Bouhineau (2004), es una herramienta informática que respalda el aprendizaje del álgebra.

Está dirigido principalmente a alumnos de nivel medio o secundario. No obstante, algunos ejercicios (aritméticos) pueden plantearse incluso en grados menores. Con los CAS Aplusix y las calculadoras graficadoras de Texas Instruments (TI-92 y la TI-Voyage 200) pueden resolverse diferentes ejercicios: calcular (para el cálculo numérico), desarrollar y simplificar, descomponer en factores, transformar y resolver (ecuaciones, desigualdades, o sistemas de ecuaciones).

Con el CAS Aplusix, específicamente en el "modo" de ejercitación, puede comprobarse y completarse correctamente los ejercicios. En este "modo", los estudiantes resuelven ejercicios, paso a paso, desarrollando sus propios cálculos, lo cual es una enorme diferencia con respecto a las calculadoras con CAS (TI-92 y TI-Voyage 200), ya que sólo se requiere que la sintaxis introducida de los datos sea correcta para que la calculadora muestre un resultado final. Así, el estudiante no interviene en el proceso de resolución y transformación algebraica.

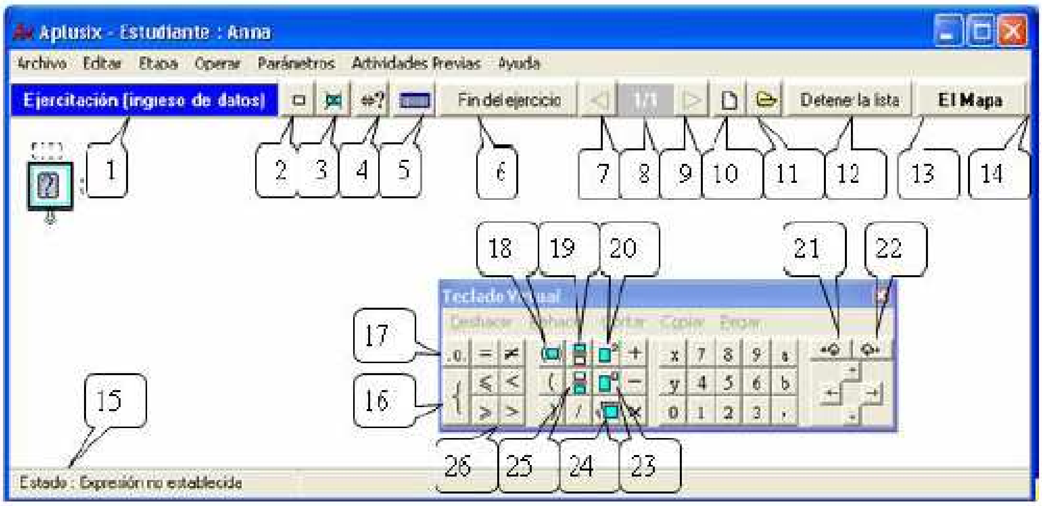
Aplusix está compuesto por tres aplicaciones:

Primera. Gestión del ambiente del alumno: Aplusix.exe que, además, permite al docente ver las actividades previas realizadas por cada estudiante;

Segunda: Editor de ejercicios: AplusixEditeur.exe que facilita la creación de archivos de ejercicios o problemas. Tiene su propio manual de empleo dedicado al docente.

Tercera: Programa de administración: AplusixAdmin.exe que admite la exposición de las clases desde el servidor de acuerdo a decisiones didácticas establecidas. Tiene su propio manual de empleo.

La figura 1.6.1. presenta una síntesis esquemática de la pantalla principal del CAS Aplusix con sus respectivas referencias.



<u>Referencias</u>

Número	Nombre
1	Nombre de la actividad en curso
2	Borra la etapa en curso (contenido del cuadro)
3	Borra la etapa en curso y subsecuentes
4	Verifica la equivalencia entre las etapas
5	Exponer el teclado virtual
6	Permite pasar a indicar el fin de un ejercicio/problema en curso y modificar un ejercicio/problema terminado.
7	Acceso al ejercicio/problema precedente en la lista
8	Indica la posición de un ejercicio/problema en la lista
9	Acceso al ejercicio/problema subsiguiente en la lista
10	Produce una nueva página, es decir, un ejercicio vacío
11	Permite abrir un archivo alg que contiene una hoja de cálculo o un archivo .exo que contiene ejercicios/problemas
12	Detiene la actividad en curso y retoma a la actividad de ejercitación
13	Acceso al "mapa" que organiza y contiene las familias de ejercicios
14	Barra de herramientas
15	Barra de estado
16	Corchete izquierdo, es el operador lógico «y»
17	Operador lógico «o»
18	Doble paréntesis
19	Fracción
20	Cuadrado
21	Borra a la izquierda
22	Borra a la derecha
23	Potencia
24	Raíz cuadrada
25	Fracción
26	Operadores de relación

Figura 1.6.1. Síntesis esquemática de la pantalla principal del CAS Aplusix.

En el CAS Aplusix los estudiantes hacen sus propios cálculos (como lo hacen con papel y lápiz), aunque no enseña directamente normas, reglas y mecanismos aritméticos y algebraicos, mismos que ayuda a aplicar correctamente, lo cual conlleva realimentación y retroacciones de información pertinente (puntaje, comentarios, etc.). Por lo anterior, es diferente de los otros medios de aprendizaje formales para el álgebra que requieren el uso de un comando para realizar cada acción (Beeson, 1996), por tanto, para conmutar 4 y *x* en 4 + *x*, tiene que aplicarse un comando que contiene la identidad a + b = b + a, en vez de escribir *x* + 4, o realizar un arrastre y soltar *x.* Además de estas interacciones, la mayoría de estos sistemas hacen todos los cálculos.

Mientras que en los comandos de la TI-92 el estudiante no puede cometer errores, por consiguiente, no puede aprender de la corrección de sus errores, con el Aplusix los estudiantes desarrollan libremente sus transformaciones en los rectángulos que contienen las expresiones. Los pasos dados por los estudiantes en el CAS Aplusix son verificados y validados por el sistema que calcula la equivalencia de las expresiones y muestra el resultado.

El resultado de la verificación se muestra en los distintos vínculos:

- Un trazo negro simple significa "verificación no realizada".
- Un trazo negro doble ( ) entre dos expresiones significa que las dos expresiones son iguales. Una doble flecha (entre dos expresiones o inecuaciones significa que son equivalentes. Lo mismo ocurre con los sistemas de ecuaciones.
- Un trazo azul doble con una cruz azul ( ) significa que hay una expresión "inacabada" o "indefinida".
- Un trazo rojo doble tachado con una cruz ( ) significa que se tiene una relación de dos expresiones "no iguales", dos expresiones, ecuaciones o inecuaciones "no equivalentes" o dos sistemas de ecuaciones "no equivalentes".

Según Chaachoua, Nicaud, Bronner y Bouhineau (2004), para el caso de Aplusix dos expresiones, o ecuaciones e inecuaciones son equivalentes si y sólo si tienen el mismo conjunto de soluciones (manual de usuario, p.15).

Aplusix también proporciona información del proceso de transformación de las expresiones algebraicas en proceso de solución (véase la figura 1.6.2).

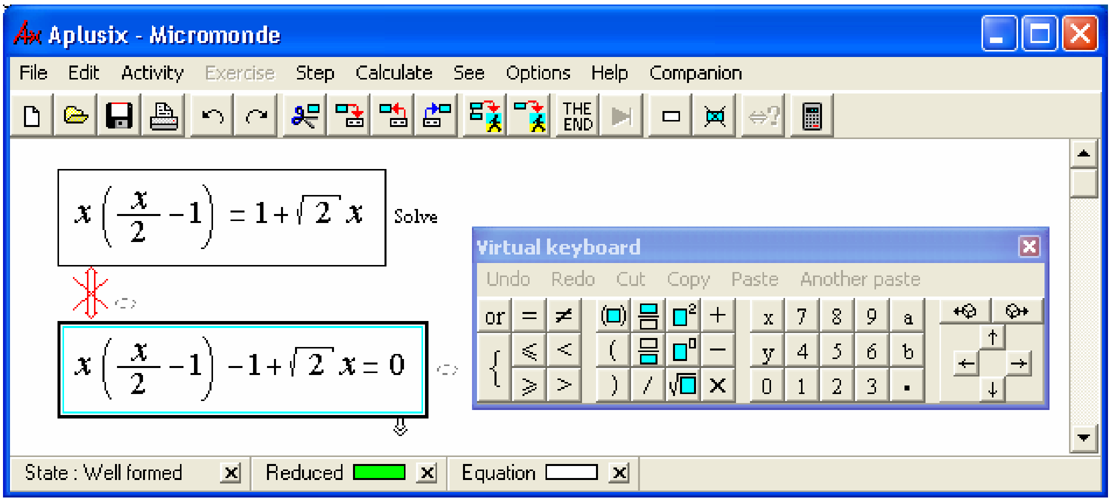


Figura 1.6.2. Validación de no equivalencia entre dos expresiones algebraicas en el CAS Aplusix.

En la figura anterior puede apreciarse cómo un estudiante traslada el primer miembro de la ecuación al segundo miembro y sólo ha cambiado un signo. Dos líneas verticales, en rojo y tachada significan que hay un error de equivalencia entre los dos rectángulos. La barra de estado, en la parte inferior de la ventana, indica que la expresión de la actual etapa se reduce y no es un paso importante en el proceso de solución de la ecuación.

Al final de cada ejercicio, Aplusix verifica que el último paso no contenga una forma por resolverse, verifica que la ruta siga los pasos correctos y proporciona una retroalimentación, la cual conlleva un ejercicio resuelto (que si bien no implica resolver, exige reducir) y un camino, que contiene errores, para ir al paso actual. Cuando el ejercicio no se resuelve, el estudiante puede optar por continuar con el proceso de resolución o salir.

Un editor avanzado de álgebra permite ingresar y modificar expresiones con facilidad. Aplusix ayuda a los estudiantes a mejorar su desempeño en álgebra gracias a la interacción que se basa en tres tipos de retroalimentación:

(1) Revisión permanente que señala si los cálculos (equivalentes) están correctos o no.

(2) Solución proporcionada a solicitud del estudiante

(3) Ratificación de la adecuada finalización del ejercicio cuando el estudiante señala que está completado.

El CAS Aplusix contiene una diversidad de ejercicios organizados por tema y nivel de dificultad. Para la actualización de estos ejercicios, hecha en cada oportunidad, se apela a diferentes coeficientes de asignación aleatoria. Así, el editor de ejercicios, permite a los docentes la elaboración de listas y secuencias de ejercicios propias o seleccionadas de cursos o libros de texto. En el "modo de prueba" de Aplusix, los estudiantes resuelven ejercicios sin devolución de realimentación alguna. Al finalizar la prueba, reciben un puntaje y pueden pasar a la revisión de “auto-corrección”. También es posible que revisen sus cálculos efectuados en "modo ejercitación" o en "modo prueba". Tienen la oportunidad, presionando el botón "modificar el ejercicio", de volver a los ejercicios que no resolvieron correctamente y reanudar la resolución. Incluso los alumnos consiguen la verificación de los cálculos que no tenían a su disposición y, finalmente, a través de "actividades previas", logran efectuar la autocorrección de una prueba inmediatamente después de realizarla.

En el “modo de ejercitación” se procura inducir a la respuesta correcta y posteriormente confirmarla. Se aprende así, a ajustar lo realizado: completado, detallado y registrado (acción por acción), en función de la interpretación de las devoluciones anotadas. Tal minucioso registro conforma un “sistema de revisión” que permite una apreciación tanto a docentes como a estudiantes, mismos que logran protagonizar la evaluación, integrada así a su aprendizaje más allá de quedar delegada a las responsabilidades de enseñanza. En este marco de situación de aprendizaje, se promueve una genuina devolución; en el sentido adjudicado al término dentro de la didáctica de la matemática.

A su vez, los docentes, pueden acceder a registros estadísticos de sus clases o grupos para confrontar la cantidad de ejercicios realizados. Así, distinguen los que fueron correcta o incorrectamente desarrollados (en forma completa o provisoria) y los resultados que denotan los puntajes (algo que en las calculadoras simbólicas (TI-92 y TI-Voyage 200) no se puede hacer).

En seguida se presenta la Figura 1.6.2 con los ámbitos de trabajo escolar que se pueden llevar a cabo con Aplusix.

Tipo de ejercicio	**Ámbito para la verificación de los cálculos**	**Ámbito para cálculo de soluciones y puntuación de resultados**
Cálculo Numérico	Las expresiones deben contener únicamente números	Las expresiones deben contener únicamente números
Desarrollo	Expresiones polinomiales o racionales	Expresiones polinomiales
Descomposición en factores	Expresiones polinomiales	Expresiones polinomiales de segundo grado como máximo
Resolución de ecuaciones	Ecuaciones polinomiales de una incógnita, cuarto grado como máximo y ecuaciones racionales simplificables	Ecuaciones polinomiales de una incógnita, de segundo grado como máximo
Resolución de desigualdades	Desigualdades polinomiales de una incógnita, cuarto grado como máximo y desigualdades racionales simplificables	Desigualdades polinomiales de primer grado
Resoluciones de sistemas	Sistemas lineales que tienen a lo sumo 10 ecuaciones y 10 incógnitas	Sistemas lineales que tienen dos ecuaciones y dos incógnitas

Figura 1.6.2. Ámbitos escolares que se pueden llevar a cabo en Aplusix.

Las notaciones de los números que entran en la composición de las expresiones son: las de enteros, decimales, fracciones y exponenciales. Los exponentes deben ser enteros (positivos, negativos o nulos).

Los números enteros deben estar comprendidos, en valor absoluto, entre 0 y 10^9. Los números decimales deben tener como máximo nueve cifras significativas y no se indican decimales de rango superior a nueve. Cuando estas restricciones no se respetan, los números fuera de rango se exhiben en azul. Del mismo modo, las expresiones cuyos números se refieren a un campo demasiado amplio se consideran fuera de rango. Es el caso de 1000000 + 0,000001.

1.7. Resumen Capítulo I

En este capítulo I se expuso el trabajo investigativo de diversos estudiosos, cuyo fin común es el mismo tema del presente trabajo de tesis (estrategias de transformación de expresiones algebraicas y comprensión de su equivalencia utilizando un sistema algebraico computarizado (Aplusix)). El estado del arte gira en torno al estudio de las relaciones de equivalencia entre expresiones algebraicas, la resolución de problemas y el uso de la tecnología. Específicamente se analiza la manera en que se fomenta la compresión de la noción de equivalencia algebraica con el uso de un CAS.

También se da cuenta de las ventajas y desventajas de la utilización de diferentes herramientas tecnológicas (TI-92 y Aplusix) en la enseñanza de la noción de equivalencia algebraica. Lo dicho anteriormente permitió estructurar e instrumentar las secuencias didácticas que se utilizaron en este trabajo de tesis (ver Anexo I).

CAPÍTULO II

Planteamiento del problema y marco teórico

2.1. Planteamiento del problema de estudio

Interrogantes que guiaron el trabajo de tesis:

¿Cuáles son las estrategias de transformación de expresiones algebraicas que desarrollan estudiantes de bachillerato, mediante el uso de un sistema algebraico computarizado (Aplusix)?

¿Cuál es la co-influencia del uso de CAS y del lápiz y papel en la adquisición de conocimiento de los alumnos?

¿Cuáles son los grados en los procesos de instrumentación e instrumentalización, que desarrollan los estudiantes al enfrentarse a la resolución de tareas de transformación de expresiones algebraicas, cuando utilizan lápiz y papel y CAS?

Objetivos:

- Conocer y analizar cuáles son las estrategias de transformación de las expresiones algebraicas que desarrollan los estudiantes de bachillerato cuando utilizan un CAS, y en ese desarrollo cuál es el papel del uso del papel y lápiz.
- Conocer si el sistema algebraico computarizado (Aplusix) sirve como medio para reconocer la noción de equivalencia y validar las transformaciones de expresiones algebraicas.
- Analizar los grados de instrumentación e instrumentalización que alcanzan los estudiantes y esbozar las diferentes categorías correspondientes a los usos del CAS.

Propósitos:

- Reportar estrategias que emergen en el desarrollo de las actividades que se diseñaron para este estudio (ver Anexo I), y avances de los estudiantes de bachillerato en la tarea de reconocer la noción de equivalencia entre expresiones algebraicas.

- Explorar la co-influencia del uso de CAS y del lápiz y papel en la adquisición de conocimiento de los estudiantes en la relación de equivalencia entre expresiones algebraicas.

- Analizar los grados de instrumentación e instrumentalización de los alumnos que se reflejan en las estrategias de transformación y resolución de las actividades (ver, Anexo I) que emprenden cuando utilizan lápiz y papel y un CAS.

2.2. Introducción a la Problemática

Drouhard (2007) menciona que la actividad algebraica, incluso cuando es estudiada únicamente en su fase de cálculo simbólico, no consiste solamente en realizar transformaciones sobre escrituras operadas mecánicamente.

En todo momento, el sujeto debe tener opciones (elegir qué transformación efectuar y sobre qué subescritura hacerlo) y dar cuenta de ellas. Según Drouhard (2007) las justificaciones sobre el estudio del álgebra apuntan a tres acepciones de la pregunta "¿por qué?".

Consideremos, por ejemplo, un alumno que produjera las dos líneas de escrituras siguientes:

$2x + 2x^2 = 0$

$2x\,(1 + x) = 0$

Frente a la pregunta "¿Por qué $2x + 2x^2$?" hay tres tipos de respuestas posibles:

1) Hay una respuesta *pragmática*: “para llegar a tal resultado”, “habida cuenta de aquello de lo cual disponía”. Aquí, “¿por qué?” es sinónimo de “*para qué* hacer”; los argumentos se fundamentan en tácticas y estrategias.

2) Hay una respuesta *sintáctica*: “porque descompuse en factores”. “¿Por qué?” tiene acá más bien el sentido de “¿cómo?”, los argumentos se fundamentan en los conocimientos que se refieren a las trasformaciones.

3) Finalmente, hay una respuesta *matemática*: “porque la propiedad distributiva me asegura que podía desarrollar”. “¿Por qué?” significa acá “*con qué derecho*” y los argumentos se fundamentan en la matemática.

El cálculo simbólico toma todo su sentido a través de las respuestas a la pregunta “por qué”, gracias a la triple relación entre la gramática (las reglas), el contexto pragmático (el proyecto), y las matemáticas subyacentes.

En su trabajo Drouhard (2007) señala que podemos encontrar, en lo anterior, un punto de contacto, pero esta vez con el enfoque “tarea-técnica-tecnología-teoría” (Y. Chevallard) y tomando en cuenta las tres dimensiones que acabamos de ver: pragmática, sintáctica y matemática. Drouhard (2007), cita a Chevallard, (1989, 47) quien señala:

> La relación del alumno con el cálculo algebraico no tiene en cuenta la idea de una relación entre manipulaciones algebraicas de la expresión y sustitución de valores numéricos en esa expresión. Tal relación les parecerá a ustedes extraña, trunca, incompleta. Es, sin embargo, no lo duden, la relación oficial que se le ha exigido mostrar al alumno hasta ese momento; y su conducta (...) está perfectamente adecuada a la relación oficial. Ustedes podrán poner en duda que la relación oficial que se impone sea bien adaptada o, como diríamos nosotros, idónea, para ciertos empleos efectivos en los que estarán pensando (por ejemplo, factorizar un polinomio de tercer grado $P(x)$, con el objetivo de resolver la ecuación $P(x) = 0$. (Trad. Patricia Sadovski).

Drouhard (2007) sostiene que el concepto “denotación” es clave en el cálculo simbólico, ya que éste marca la diferencia entre el puro cálculo formal de las computadoras y el cálculo en tanto práctica. Además, el concepto “denotación” justifica las transformaciones; por ello, es un componente esencial de la “teoría” en su dimensión matemática. Sin denotación, no hay ninguna razón para preferir tal o cual transformación, salvo la de llegar más fácilmente al objetivo (es lo que hacen los alumnos cuando permanecen en el dominio pragmático del “Sinn”).[4]

2.2.1. Sentido de las expresiones algebraicas

Drouhard (2007) menciona que el sentido de una escritura nos permite saber cómo está formada, cómo se le puede calcular (“modo de denotación del objeto”). Nos permite informarnos sobre lo que se puede hacer con ella (si tal forma es descompuesta en factores, si tal otra es desarrollable, en el marco de la resolución de una expresión, si tal forma es preferible, etc.).

Aunque una discusión detallada de lo que podríamos llamar sentido en el cálculo simbólico sobrepasa el marco de esta investigación, sí señalamos aquí, de acuerdo con Drouhard (2007), que el sentido no está definido de manera absoluta, a priori, sino que es (entre otras cosas) relativo al proyecto de quien hace los cálculos. Volvemos a encontrar aquí la pregunta “por qué” en el sentido de “para qué hacer”. El sentido es así la componente pragmática, (i.e. ligada al contexto) de la significación. Según este autor desde este punto de vista, (y sólo desde este punto de vista) son raros los alumnos que no dan *un* sentido (“Sinn”), al menos pragmático, a las escrituras que ellos manipulan.

La puesta en juego de esta componente pragmática ha sido bien estudiada por todos aquellos que han trabajado sobre las transformaciones: Paolo Boero (1994), por ejemplo. Puede decirse lo mismo de los trabajos sobre Aplusix: Jean-François Nicaud, 1987, 1994, Jean-Michel Gélis, 1995, Ahn Nguyen Xuan, 1993. Estos últimos a nivel de las tácticas y de las estrategias. Por su parte, el equipo “ABC” (Ferdinando Arzarello, Luciana Bazzini y Giampaolo Chiappini, 1992) ha retomado esta dimensión en el seno de la noción de “frame” (marco, cuadro), surgida de la inteligencia artificial.

Según Boero (1994), en esta perspectiva el concepto “denotación” se sitúa en un marco dado; un “frame” es un marco de trabajo asociado a una estructura de datos, en el interior del cual el sentido y la denotación (apropiados de las escrituras) son activados por los alumnos para darles representaciones

[4] Cf. infra

estereotipadas. No obstante, adaptadas al contexto de resolución. Lo anterior permite dar una dimensión dinámica a una semántica que, si se limitara sólo a los aspectos denotacionales, permanecería estática; saber que las transformaciones conservan la denotación no nos informa en efecto sobre las elecciones a realizar para determinar cuáles son las transformaciones necesarias en un momento dado.

Drouhard (2007) reflexiona acerca de que no deberíamos hablar más de “sentido” si no precisamos: “sentido *¿de qué*?”. Sobre todo, cuando se trata del sentido de un conocimiento, de un concepto, de una escritura (y más generalmente de un significante) o de una actividad. Por otra parte, ninguno de estos diferentes aspectos del sentido puede reducirse a los otros, ya que hacer álgebra, es llevar a cabo una actividad que tiene relación con las escrituras, mismas que tienen sentido y que están ligadas a conceptos con sentido y, de las cuales, tenemos un conocimiento que, en efecto, tiene sentido. Cada aspecto puede ser estudiado aisladamente, pero si se desea pensar de manera global las cuestiones del álgebra, se debe intentar considerar simultáneamente todos estos aspectos.

2.2.2. Justificación del estudio

En México, el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE, 2008) reporta que pruebas como: EXANI, PISA y EXCALE (evaluaciones realizadas en escuelas de nivel medio superior, principalmente), reflejan algunos problemas actuales en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Tal situación indica la necesidad de analizar los planes y programas de estudio actuales y todo lo que se halla implícito en éstos, pues de esta forma podrían subsanarse las deficiencias actuales y evitarlas a futuro.

Los estudios realizados y reportados en el informe del Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes (2003) (*Programme for International Student Assessment*: PISA por sus siglas en inglés) reportan que en los estudiantes, de nivel medio superior (bachillerato), el estudio de temas fundamentales: matemáticas y otras ciencias —promovidos por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) con la colaboración de los países miembros— sirven para identificar el nivel de logro de sus sistemas educativos de educación básica y media superior.

La prueba PISA, a través de tres áreas del conocimiento (lectura, matemáticas y ciencias) evalúa en los alumnos de 15 años, el grado de competencia que han desarrollado para resolver problemas y situaciones de la vida diaria, así como para participar activa y responsablemente en la sociedad.

En México la mayor parte de los jóvenes de esta edad cursan el tercer grado de secundaria o el primer semestre de bachillerato y reflejan resultados desfavorables. Los resultados de PISA muestran que el Sistema Educativo Mexicano (SEM) tiene dos situaciones graves: Una es que tiene una proporción elevada de alumnos por debajo del Nivel 2 (alrededor del 50%), lo que implica que muchos jóvenes no están siendo preparados para una vida fructífera en la sociedad actual y, la otra tiene que ver con que cuenta con pocos estudiantes en niveles altos (menos del 1% en los niveles 5 y 6). Lo anterior, significa que los alumnos de mejores resultados no están desarrollando las competencias que se requieren para ocupar puestos de alto nivel en los diversos ámbitos de la sociedad.

Según Székely (2009), en el 2009 la Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares (ENLACE) reportó que de los 804,355 estudiantes evaluados de nivel medio superior en habilidades matemáticas 46.4% se encuentran en el nivel de insuficiencia, 37.8% en el nivel elemental, 12.2% en bueno y 3.4% en el nivel de excelencia. La prueba demostró que sólo el 3.1% de los alumnos mejoró en su habilidad matemática, en comparación al año 2008. Esta situación se manifiesta en el descenso de la matrícula escolar, es decir, bajos índices de egreso y altos de reprobación. En el área de matemáticas, lo anterior se ve reflejado en las dificultades que atraviesan los estudiantes en estudios posteriores.

Parte de esta problemática influyó en el rediseño de los actuales planteamientos curriculares que, a este nivel, promueven, por ejemplo, una enseñanza centrada en el alumno. Donde se persigue que tal enseñanza se dé mediante la utilización de secuencias didácticas, que busquen cierta independencia del estudiante, y logre un reacomodo estructural a nivel de institución y de aula. Sin embargo, falta el convencimiento acerca de que tan adecuado o inadecuado son los planteamientos y lo que éstos promueven.

En los últimos años, ha venido surgido la inquietud, entre un gran sector de matemáticos y educadores, de que mediante la enseñanza de ciertos sistemas computarizados algebraicos los individuos aprenden matemáticas. Más aún, se piensa que cierto tipo de habilidades matemáticas se pueden adquirir con mayor facilidad con el manejo de un sistema computarizado.

Uno de los resultados más notables de la puesta en marcha de la idea anterior se dio con el Sistema Algebraico Computarizado (CAS) Aplusix. Desarrollado por Denis Bouhineau, Jean-François Nicaud, Hamid Chaachoua, Marilena Bittar, y Alain Bronner en el laboratorio Leibniz en Francia. Los diseñadores señalan que este CAS respalda el aprendizaje del álgebra de estudiantes de 13 a 16 años principalmente.

El presente trabajo de tesis se apoyó en el estudio exploratorio del CAS con el propósito de ver si el CAS Aplusix sirve como medio para reconocer la noción de equivalencia y validar las transformaciones de las expresiones algebraicas.

2.3. Marco Teórico

2.3.1. Relación entre teoría, técnica y tarea

En esta sección se expondrá la relación entre teoría, técnica y tarea; por ello los artículos de Kieran y Drijvers (2006) y de Artigue (2002) son básicos.

Según Kieran y Drijvers (2006), Chevallard en su teoría antropológica de la didáctica (1999, 225) describe cuatro componentes de la práctica: tarea, técnica, tecnología, y teoría, por medio de los cuales los objetos matemáticos son puestos en juego al interior de las instituciones didácticas. Él nota que las tareas, normalmente, son expresadas en términos de verbos: “multiplique la expresión algebraica dada”. Define la técnica como "un modo de logro, de realizar tareas" e indica que una técnica "no es necesariamente algorítmica o cuasi algorítmica". Observamos que en su teoría concibe el concepto de técnica a partir del discurso que lo justifica/explica/produce, —que él llama tecnología esto es en contraste con nuestro uso del término de tecnología, ya que hace referencia al uso de computadoras y otras herramientas tecnológicas—. No obstante, admite que este tipo de discurso a menudo es integrado en la técnica e indica que tal técnica puede ser caracterizada en términos de progreso teórico.

Según Chevallard, la teoría toma la forma de especulación abstracta, distanciándose de lo empírico, por tanto, dentro del enfoque antropológico, el discurso puede ser visto como un puente entre la técnica y la teoría.

En su estudio, Kieran y Drijvers (2006) argumentan que Artigue y sus colegas (ver, p.ej., Artigue, 2002) han fusionado los términos tecnología y teoría (de Chevallard) en uno solo: teoría. Así, se da, al componente teórico, una amplia interpretación de la que es habitual en el acercamiento antropológico (trad. mía). También citan a Lagrange (2002, 163) quien expresó su punto de vista sobre la relación mutua entre tarea, técnica, y teoría:

> Para empezar, hay que decir que dentro de este dinamismo, las tareas son problemas. Las técnicas se llegan a elaborar en relación a las tareas, y entonces llegan a estar jerárquicamente diferenciadas. Las técnicas oficiales surgen y las tareas pierden su carácter problemático: las tareas se hacen rutinarias, los medios para perfeccionar las técnicas. El medio ambiente teórico toma en consideración las técnicas, su funcionamiento y sus límites. Entonces las técnicas mismas se vuelven rutinarias para asegurar la producción de resultados útiles a la actividad matemática.... Así, la técnica tiene un papel pragmático que permite la producción de resultados; pero esto también juega un papel epistémico (Rabardel y Samurcay, 2001) en lo que constituye la comprensión de objetos y es la fuente de nuevas preguntas (Trad. mía).

Kieran y Drijvers (2006) traen a propósito a Lagrange (2003, 271), pues postuló la idea: "La técnica juega un papel epistémico contribuyendo a una comprensión de los objetos que maneja, en particular durante su elaboración. Esto también sirve como un objeto de reflexión conceptual cuando es comparado con otras técnicas y cuando se ha hablado en relación a la consistencia". Así, Kieran y Drijvers (2006) mencionan que es precisamente el papel epistémico inserto en las técnicas, lo que representa un punto importante en el estudio de Lagrange (2003), es decir, la noción de teorización matemática de los estudiantes se desarrolla cuando sus técnicas se desarrollan. Ellos señalan que la co-aparición de la teoría y la técnica, en la naturaleza de la tarea, se considera igualmente fundamental. Más, la importancia que tienen las tareas va más allá de situar su estudio dentro del contexto de la génesis instrumental.

Otro trabajo citado por Kieran y Drijvers (2006, es el de Hoyles (2001, 284) quien ha llamado la atención sobre el importante rol que juega "el diseño de las actividades y el diseño o elección de los instrumentos adoptados para favorecer el aprendizaje de las matemáticas, el diseño no conducirá a resultados de una manera determinista, pero al menos este enfoque va a permitir la investigación del potencial transformador de los instrumentos en actividades... y que llevaría al conocimiento y a la epistemología de nuevo al centro del escenario”.

Finalmente Kieran y Drijvers (2006) refieren que la tríada "teoría, técnica y tarea" (TTT) sirve de marco no sólo para recoger los datos durante los experimentos de enseñanza, y para el análisis de esos datos, sino también para la construcción de las tareas que permitirán recabarlos.

2.3.2. Los Sistemas Algebraicos Computarizados (CAS)

En esta sección se expone la importancia de introducir los Sistemas Algebraicos Computarizados en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, en particular de la noción de equivalencia algebraica.

Un sistema algebraico computarizado o sistema de álgebra computacional SAC (CAS, del inglés *Computer Algebra System*) es un programa de computadora o calculadora avanzada que facilita el cálculo simbólico. Los Sistemas Algebraicos Computarizados aparecieron a principios de la década de 1970 y evolucionaron a partir de la investigación en inteligencia artificial. Actualmente son campos totalmente independientes. Los primeros trabajos fueron dirigidos al campo de la física de altas energías, en donde era un programa para matemática simbólica. Algunos de los actuales líderes en el mercado son *Maple y Mathematica*. Fue hasta 1987 que se introdujo un CAS en una calculadora. Posteriormente, en 1995 se introdujo al mercado una calculadora que incluía un menú de CAS avanzado basado en el *software Derive*. Hoy, los avances en sistemas computacionales se unen al desarrollo de software matemático, entre los cuales están los CAS que juegan un papel creciente en la educación matemática.

Matemáticos profesionales e ingenieros saben que estos nuevos instrumentos sofisticados no representan, inmediatamente, instrumentos eficientes matemáticos para el usuario: su complejidad (inaccesibilidad parcial de su código interno) obstaculiza el desarrollo de su potencial, pues un empleo controlado requiere alguna experiencia. Además, los profesionales aceptan que hay un costo en el estudio y uso de un nuevo CAS. También mencionan que estos nuevos instrumentos cambian sus prácticas matemáticas y, para algunos de ellos, aún existe la "problemática" de su actividad matemática. El interés y la necesidad de investigación se vinculan al desarrollo de software matemático y de CAS cada vez más poderosos, capaces de hacer cálculos exactos o aproximados. El cálculo científico, es totalmente reconocido como un área específica de investigación matemática.

Balacheff (1994) indica que la gran reducción del costo de ejecución, por ejemplo, reduce las necesidades de rutinización y así, las técnicas, instrumentadas por la tecnología computacional, cambian valores pragmáticos y epistemológicos. Entonces las necesidades matemáticas de las técnicas se cambian también. Surgen nuevas necesidades vinculadas a la puesta en práctica del conocimiento por computadora en matemáticas y a la evolución asociada por representaciones semióticas.

Las calculadoras graficadoras permitieron la introducción de las familias de objetos funcionales pero el trabajo matemático en general fue situado en un nivel gráfico. Los CAS permitieron la conexión de un trabajo gráfico con un trabajo simbólico; gracias a ello los estudiantes pudieron demostrar, de un modo simbólico, las regularidades gráficamente observadas. Incluso si el contexto es más elemental, el empleo de un CAS obliga necesariamente a los estudiantes a afrontar cuestiones de simplificación y de equivalencia. Las investigaciones de Cerulli y Mariotti (2002), Ball, Pierce y Stacey (2003), Chaachoua, Nicaud, Bronner y Bouhineau (2004), Kieran y Saldanha (2005) y Kieran y Drijvers (2006) están de acuerdo sobre este punto.

2.3.3. Un entorno para el aprendizaje del álgebra

A continuación se exponen las características de un entorno tecnológico (software matemático o CAS) como medio para el aprendizaje del álgebra. Para ello se revisó el artículo de Chaachoua, Nicaud, Bronner y Bouhineau (2004) quienes mencionan que, de acuerdo al enfoque constructivista de Brousseau (1997) "el alumno aprende mediante la adaptación de sí mismo a un entorno que genera contradicciones, dificultades y desequilibrios, como lo hacen los humanos en la sociedad. Este conocimiento es el resultado de la adaptación del estudiante que se manifiesta en las nuevas respuestas que proporciona en las pruebas de aprendizaje. "

Según los autores referidos, este ambiente debe ser organizado por el profesor a través de las tres siguientes opciones:

1. Tipos de acciones del estudiante,
2. Tipo de retroalimentación del sistema,
3. Ejercicios.

Laborde (2000) indica que un sistema computarizado con los ejercicios adecuados o apropiados puede ser un medio.

Chaachoua, Nicaud, Bronner y Bouhineau (2004) argumentan que este es el caso del CAS Aplusix, ya que las acciones son las funciones que realizan los estudiantes con el editor (insertar, borrar, copiar, pegar...) y con los comandos para obtener cálculos automáticos

También existen tres comentarios:

1. Hay un control de la equivalencia entre las dos fases.
2. Tiene la indicación de la barra de estado.
3. Los mensajes aparecen en algún momento al final del ejercicio.

La comprobación de la equivalencia es una importante retroalimentación del sistema. Sin embargo, el estudiante también necesita retroalimentación que le permita dar sentido a las expresiones de acuerdo con sus objetivos (Sfard, 1991 y Harper, 1987). La barra de estado de Aplusix muestra parte de este sentido: grado de factorización, de expansión, de reducción y la progresión en el proceso de resolución de las expresiones algebraicas, etc.

Como lo señalan Chaachoua, Nicaud, Bronner y Bouhineau (2004), el profesor puede personalizar el sistema (mediante la elección de los valores de 30 parámetros). Esto permite al maestro recibir diferentes tipos de ámbitos (ver figura 1.6.2) y elegir el más apropiado para su objetivo de enseñanza.

2.3.4. El uso de la tecnología en la enseñanza matemática

Existen resultados de investigación ubicados específicamente en el campo de la educación matemática sobre las relaciones entre el uso de los recursos tecnológicos en la escuela, el aprendizaje y la enseñanza.

Olive et al, 2010; Hoyos, 2009 refiere que Ruthven y S. Hennesy (2002) investigaron acerca de las ideas de los profesores sobre lo que constituye una experiencia exitosa de herramientas y recursos computacionales en el salón de clase. Encontraron que un ambiente tecnológico puede servir como un medio para:

a) *Mejorar el ambiente* a través del cambio de la forma general y el sentir de la actividad en el salón de clases;

b) *Asistir en los intentos de los estudiantes* y ayudarles a corregir errores y experimentar con ellos nuevas posibilidades;

c) *Facilitar la rutina*, es decir, permitir que las tareas subordinarías se lleven a cabo de manera fácil, rápida y disponer de recursos y para

d) *Acentuar elementos clave de los temas en estudio*, proveyendo imágenes vívidas y efectos impactantes para resaltar propiedades y relaciones.

Además, Ruthven y Hennesy (2002), también obtuvieron información de los maestros en relación con el uso de la tecnología y las principales metas de la enseñanza. Así, las categorías que estos autores obtuvieron al respecto fueron:

a) *Intensificación del compromiso* de los estudiantes en las tareas para asegurar su participación en las actividades en el salón de clase;

b) *Producción de la actividad* enfocada a mantener el ritmo y la productividad de los estudiantes durante las lecciones y

c) *Establecimiento de ideas*, el cual estará orientado a apoyar el desarrollo de la comprensión y la capacidad del estudiante.

Estos mismos autores también obtuvieron la siguiente información relacionada con temas clave del aprendizaje que vinculan los usos y las metas de enseñanza:

a) *Aumento de motivación*. Crear las condiciones adecuadas para generar en los estudiantes un ambiente de confianza que les infunda seguridad en sí mismos y despertar su interés;

b) *Disminución de restricciones.* Mitigar los factores que inhiben la participación de los estudiantes, tales como la ejecución de tareas laboriosas, así como las demandas y los requerimientos que impone la presentación en papel y lápiz, además de la vulnerabilidad a la exposición de errores y

c) *Aumento de atención*, esto es, crear las condiciones para que los estudiantes se enfoquen en los temas principales.

Con respecto a la lista de constructos mencionados (marcados en cursivas), Ruthven (2007) señala que cada uno de ellos representa un estado de hecho deseable, que los maestros deberían tener en el salón de clases, y que con el uso de la tecnología contribuiría a lograr un verdadero aprendizaje.

2.3.5. Definición de la noción de equivalencia algebraica

A partir de la revisión del estudio realizado por Cerulli y Mariotti (2000) en esta sección se expone brevemente la definición de la noción de equivalencia algebraica. Un punto clave de acercamiento estructural en álgebra es la noción de “equivalencia" entre expresiones; por ello, los mencionados autores indican que la manipulación de expresiones quiere decir la sustitución de una expresión en otra que es equivalente. El significado de las palabras "la expresión" y "el equivalente" no es inequívocamente, y a priori, decidido, pero así quedará, una vez que un juego de axiomas sea aceptado. Cerulli y Mariotti (2000) consideraron un ejemplo muy genérico para explicar esta noción de equivalencia algebraica, misma que a continuación se expone.

Sea G el grupo formado por los elementos {1, a, b, c, A, B, C} con un operador producto denotado por "·", donde A, B, y C son los elementos inversos de a, b y c, y 1 es el elemento neutro. En este ejemplo una expresión algebraica puede ser definida así:

- Si *x* pertenece a la G, entonces x es una expresión algebraica;
- Si *x* y *y* son expresiones algebraicas entonces *x·y* es una expresión algebraica.

Después de esta definición tenemos esto a·(b·c) y (c·b) ((a·c)(b·b)) son ambas expresiones algebraicas. Ahora los axiomas de grupo (G es un grupo) le dan un sentido a la declaración de equivalencia de expresiones.

Los autores continúan exponiendo que en particular la propiedad asociativa del grupo G nos dice que las expresiones a·(b·c) y (a·b) ·c son equivalentes, además, la expresión (c·b) ((a·c) · (b·b)) es equivalente a la expresión (c·b) · (((a·c) ·b) ·b)). Si también escogiéramos que G es un grupo conmutativo, entonces a·(b·c) sería equivalente (b·c) ·a, mientras que si el grupo no es conmutativo esta equivalencia no se podría sostener.

Por último Cerulli y Mariotti (2000) consideran "la manipulación simbólica" como algo caracterizado por las actividades de transformación de expresiones que usan las reglas dadas por los axiomas asumidos y sus definiciones[5]. Los axiomas no sólo nos dicen cuando dos expresiones son equivalentes, sino que pueden ser usados para transformarlas y pueden ser el medio para encontrar relaciones de equivalencia. Por ejemplo, dadas dos expresiones, si una es transformada en otra por una cadena de pasos de transformación basados en los axiomas, entonces esta cadena puede ser interpretada como una prueba de la equivalencia de las dos expresiones. Además, si una relación de equivalencia es demostrada, puede ser asumido como un teorema. Una demostración de equivalencia puede ser usada para demostrar otras equivalencias.

En otras palabras, desde este punto de vista la manipulación simbólica puede ser interpretada en una perspectiva teórica. Es decir, se puede interpretar la

---

[5] Un ejemplo de definición que puede ser utilizada como un instrumento para transformar las expresiones, es la definición de potencia; por ejemplo, esta definición permite sustituir (a +1) • (a +1) • (a 1) por $(a+1)^3$ y viceversa.

relación de demostraciones dentro de una teoría, mediante sus axiomas y mediante teoremas antes demostrados. Por supuesto, los teoremas deben ser demostrados, y dependerán de las clases de expresiones admitidas y de los axiomas.

2.3.6. Relación entre artefacto, instrumento y acto instrumental

Enseguida se hará una breve exposición del enfoque instrumental a partir de la revisión de los artículos realizados por Drijvers y Trouche (2008) y Kieran y Drijvers (2006).

Drijvers y Trouche (2008) sostienen que un acto instrumental incluye (según Vygotsky) un problema que se quiere resolver, procesos mentales involucrados en la resolución y herramientas psicológicas usadas para realizar y coordinar esos procesos.

Hoyos (2006), Mariotti (2002) y Hoyles y Noss (1996) mencionan que con respecto a la resolución de problemas o tareas complejas también es importante considerar la utilización de herramientas materiales, ya que son un medio para avanzar incluso en la comprensión del problema en sí mismo.

Drijvers y Trouche (2008) le atribuyen un rol activo a las herramientas que influyen en los procesos mentales. Señalan que en la transición de artefacto a instrumento, el artefacto es la herramienta desnuda, el objeto material o abstracto, disponible para el usuario para dar soporte a una actividad, no obstante puede ser un objeto carente de significado, en la medida en que el usuario no conoce la clase de tareas que el objeto puede soportar.

Sólo después de que el usuario llega a ser consciente de cómo el artefacto puede extender sus propias capacidades para resolver una tarea relevante, y después de que el usuario ha desarrollado significados del uso del artefacto en ese propósito específico, el artefacto llega a ser parte de un instrumento valioso y útil que media la actividad (Drijvers y Trouche, 2008, 367). Dichos autores mencionan que Rabardel (2001) habla de *instrumento* cuando existe una relación significativa entre el artefacto y el usuario para tratar con cierto tipo de tareas que el usuario pretende resolver. Desde la perspectiva del acto instrumental (Vygotsky) los procesos mentales del usuario, el artefacto y la tarea forman parte de un todo.

En el caso de las herramientas matemáticas Drijvers y Trouche (2008) dicen que pueden considerarse como extensiones de la mente y como procesos mentales esenciales. Por lo tanto, el instrumento consta tanto del artefacto como de los esquemas mentales que el usuario desarrolla para utilizarlo en la realización de tareas específicas.

En resumen: INSTRUMENTO = ARTEFACTO + ESQUEMA para una clase de tareas. La pregunta es: *¿Cómo la disponibilidad de un artefacto puede conducir al desarrollo de un instrumento?*

En el proceso de apropiación del instrumento por el usuario: éste tiene que desarrollar esquemas mentales que involucran habilidades para usarlo de forma eficiente y conocimiento de las circunstancias en las que es útil. Así el artefacto deviene en instrumento mediando la actividad en la *génesis instrumental* (GI).

El proceso de *instrumentación* consiste en desarrollar formas para realizar una tarea, mismas que son alentadas por las características inherentes del artefacto. Mientras que otras formas de utilización son desalentadas, por la misma razón (e.g. el uso de Cabri para la construcción de transformaciones geométricas). La *instrumentalización* se desarrolla en la medida en que el usuario hace un uso más personal del artefacto, dándole un carácter definido.

Por un lado el artefacto da forma a unos esquemas mentales en el usuario, y estos mismos esquemas también definen al artefacto. "La *GI*, por lo tanto, involucra el desarrollo de Esquemas Mentales (EM), los cuáles organizan la estrategia de RP e inducen los conceptos que fundamentan las estrategias. Al mismo tiempo, las técnicas co-evolucionan, constituyéndose en medios eficaces para la realización de las tareas involucradas".

Las preguntas ahora, son: ¿qué es un esquema? y ¿cómo podemos identificarlo y observar su desarrollo? En el caso de un problema matemático, un esquema mental involucra una estrategia global de solución, los medios que el artefacto ofrece y los conceptos matemáticos que apuntalan la estrategia. La relación de la co-evolución técnica y los elementos conceptuales en un EM es característica de la GI. Como consecuencia el trabajo técnico con el artefacto está conectado al entendimiento conceptual. Esto debe ser explotado para el aprendizaje.

Drijvers y Trouche (2008, 370) continúan mencionando que hay dos tipos de esquemas de utilización (euz): *Esquemas de uso* (eus) y *esquemas de acción instrumentada* (eai). Los primeros son esquemas básicos de uso de una herramienta (por ejemplo, el arrastre de objetos en un SGD o construir una tabla dinámica).

Cuando varios esquemas de utilización se articulan para dar solución a una tarea compleja se genera un eai, a través del cual es posible identificar los invariantes de una figura o es posible acotar la solución de una ecuación.

Para estos autores las dificultades que experimentan los estudiantes con las herramientas de graficación se deben a que sus esquemas conceptuales están incompletos, más que a las dificultades técnicas que el uso de la herramienta presenta. Puede ser que lo que en principio se muestra como un eai, más adelante se manifieste como un esquema de uso para dar lugar a eai de orden superior en el caso de un usuario en particular. Los euz involucran un interjuego entre actuar y pensar e integran técnicas propias del uso de una máquina y conceptos mentales.

En el caso de las herramientas tecnológicas para el aprendizaje de matemáticas, la parte conceptual de los euz incluye tanto objetos matemáticos como una comprensión profunda de las “matemáticas de la máquina”. En consecuencia, aparentemente los obstáculos técnicos que los estudiantes experimentan, resultan tener antecedentes conceptuales importantes (Drijvers y Trouche, 2008, 371).

La dificultad es que no podemos observar EM directamente. Nuestras observaciones se limitan a técnicas que los estudiantes realizan con el artefacto y a la forma en que reportan esto de manera oral o escrita. De estos datos tratamos de construir los esquemas, pero no hay que perder de vista que se trata sólo de nuestras propias reconstrucciones. Además la construcción de esquemas no es inequívoca, los estudiantes pueden construir esquemas inapropiados o ineficientes o que estén basados en concepciones inadecuadas.

Finalmente Kieran y Drijvers (2006) refieren que el enfoque instrumental del empleo de un instrumento fue reconocido por investigadores franceses de educación matemática como un marco potencialmente poderoso en el contexto de usar un CAS en el aprendizaje de las matemáticas. Publicaciones como Artigue (1997), (2002), Lagrange (2000), (2005), Trouche (2000), (2004 a, b) y Guin et al. (2004) demuestran lo valioso que es el enfoque instrumental para el entendimiento de las interacciones de estudiante-CAS y su influencia en la enseñanza y el aprendizaje. Esto no sólo se ha aplicado a la integración de CAS en el aprendizaje de las matemáticas, sino también para el uso de hojas de cálculo (Haspekian, 2005) y los sistemas de geometría dinámica (Falcade, 2003).

2.3.7. Grados de instrumentación e instrumentalización

En este estudio exploratorio, luego de examinar el trabajo de Iranzo y Fortuny (2009) y el de Drijvers y Trouche (2008), definimos los grados de adquisición de habilidades, técnicas concernientes a los procesos de instrumentación e instrumentalización (tablas 1 y 2) de los estudiantes en el contexto de las actividades propuestas. Nuestro método de identificación y caracterización de los comportamientos matemáticos de los alumnos se basa en la interpretación de los datos.

En el análisis de las producciones de los estudiantes con el CAS Aplusix, consideraremos las distintas finalidades que pueden tener cuando utilizan acciones de transformación algebraica. Éstas se presentan en las siguientes tablas:

Alto	Los estudiantes conocen las posibilidades del CAS Aplusix (uso de herramientas, teclado...) y no tienen dificultades en el uso del CAS. Transformación de comandos en acciones algebraicas.

Medio	Conocen las herramientas básicas del CAS Aplusix para resolver los problemas propuestos y tienen algunas dificultades en el uso del CAS. Uso del artefacto de acuerdo con un objetivo (por ejemplo, uso de la validación en una transformación algebraica).
Bajo	Los estudiantes utilizan muy pocas herramientas del CAS (por ejemplo, sólo cálculos aritméticos) y tienen dificultades para aplicarlas. Uso de pocos comandos para las transformaciones algebraicas elementales. Dificultades técnicas para aplicar comandos (sintaxis, orden).

Figura 2.3.7.1. Grados de instrumentación.

Alto	Coordinan el uso de la ventana algebraica. Internalización de los comandos (teclado virtual, calcular, duplicar, desarrollar y simplificar, resolver, etc.) y utilizan el conocimiento algebraico (propiedades y axiomas).
Medio	Coordinan el uso de la ventana algebraica. Las transformaciones están basadas en propiedades algebraicas de la expresión.
Bajo	Los estudiantes se basan principalmente en propiedades aritméticas y no consideran propiedades algebraicas.

Figura 2.3.7.2. Grados de instrumentalización.

Para la consecución de nuestros objetivos, tomamos en cuenta las siguientes variables:

a) Sus estrategias heurísticas (se remiten a propiedades algebraicas, se basan en el uso de herramientas algebraicas, hacen uso de ambas, estrategias de resolución, etc.);

b) la influencia del CAS Aplusix (visualización, conceptos algebraicos, superación de obstáculos);
c) sus características cognitivas (información proporcionada por el profesor y por la experimentación) y
d) los obstáculos encontrados en ambos medios (conceptuales, algebraicos, de visualización, técnicos, etc.).

2.3.8. Resumen Capítulo II

En este capítulo se presentó el planteamiento del problema y el marco teórico del presente trabajo de tesis. Éste marco teórico dio soporte a las acciones llevadas a cabo al usar el CAS Aplusix y al poner en práctica las actividades en lápiz y papel. Ambos materiales se usaron con el propósito de generar aprendizajes matemáticos, en particular sobre la noción de equivalencia algebraica, la cual es un ingrediente esencial para la manipulación y transformación simbólica.

Contiene además los referentes teóricos: el sentido que se le da a las expresiones algebraicas, la relación entre teoría, técnica y tarea, el uso de la tecnología en la enseñanza matemática, el uso de los CAS para fomentar la noción de equivalencia algebraica, la relación entre artefacto e instrumento y la categorización de los grados de instrumentación e instrumentalización, que sustentan el análisis de los datos que se recabaron para este trabajo de tesis.

CAPITULO III

Metodología

3.1. Panorama general

En este capítulo se describe la metodología de investigación de este trabajo de tesis. Así, se menciona dónde se experimentó y quiénes fueron los participantes del estudio exploratorio. Se describe cada actividad utilizada para la recolección y análisis de los datos, el propósito y las principales características del experimento.

3.1.1. Escenario del estudio exploratorio

El estudio exploratorio se realizó de diciembre de 2009 a febrero del 2010 en la Escuela Comercial Cámara de Comercio, ubicada en la zona urbana del Distrito Federal. Dada la condición socioeconómica media de los estudiantes, éstos son hijos de empleados y trabajadores por su cuenta, cuya forma de vida incluye todos los servicios públicos: agua potable, drenaje, luz, teléfono, Internet, computadora, biblioteca y áreas verdes. La institución a la que estos estudiantes asisten tiene dos laboratorios de cómputo, biblioteca, departamento de orientación vocacional, etc. el salón de clases cuenta con butacas de paleta plana en donde los alumnos pueden colocar su material sin ningún problema.

Fueron veintiséis escolares participantes en el experimento, ya que se consideró a todos los integrantes del grupo que cursaban el primer semestre de bachillerato en el turno matutino. Sus edades variaban entre los 15 y 16 años. No hubo selección de acuerdo a su desempeño (alto, medio y bajo).

Los instrumentos que se utilizaron para recabar la información fueron: hojas de trabajo para cada una de las actividades que los estudiantes contestaron de forma individual y en equipos, notas tomadas al término de algunas sesiones, sobre todo relacionadas con las discusiones de los estudiantes para justificar sus soluciones, archivos del trabajo realizado por los alumnos al usar el CAS Aplusix y registro en videos de las sesiones de trabajo. Las sesiones de trabajo se llevaron a cabo en el laboratorio de cómputo, donde se utilizo el CAS (Aplusix).

Sin embargo, es importante decir que algunas de ellas también se realizaron en el salón de clases. Cada sesión tuvo una duración de 50 minutos, esto es, lo que dura cada una de las clases en bachillerato. También se obtuvieron datos de las exposiciones de los adolescentes, las cuales se presentaron de manera espontánea, a solicitud de ellos mismos.

3.2. Implementación del estudio exploratorio

La tesis tiene como marco las investigaciones sobre la integración de las nuevas tecnologías en la enseñanza matemática, concretamente del uso de un Sistema Algebraico Computarizado (CAS) en el contexto de la transformación y manipulación algebraica; por ello, se analiza la relación que existe entre la resolución de problemas de álgebra en los entornos tradicional (lápiz y papel) y tecnológico (CAS).

Laborde (1992) señala que una tarea resuelta usando un software de álgebra podría requerir estrategias diferentes que las que requiere la misma tarea resuelta con lápiz y papel. La elección de una u otra herramienta también tiene repercusión en la retroalimentación (feedback) que el alumno recibe.

El juego de actividades que hemos dispuesto y el orden de implementación de estas aparecen a continuación:

1. Introducción al uso, manejo y manipulación del CAS (Aplusix).
2. **Actividad I:** Comparación de expresiones mediante la evaluación numérica.
3. **Actividad II:** Comparación de expresiones mediante manipulación algebraica.
4. **Actividad III:** Verificación de la equivalencia mediante la re-escritura de la forma de una expresión.
5. **Actividad IV:** Verificación de la equivalencia sin re-escribir la forma de una expresión, usando la prueba de igualdad.
6. **Actividad V:** Verificación de la equivalencia, usando cualquiera de los métodos de CAS (Aplusix).

3.2.1. Revisión de las actividades diseñadas para un Sistema de Cálculo Formal (SCF)

Las actividades escritas (hojas de trabajo) y los registros en el CAS Aplusix fueron empleados como instrumentos que permitieron registrar todas las respuestas e intentos que desarrollaron los estudiantes para obtener soluciones de las actividades planteadas. Las actividades implementadas en este estudio exploratorio retomaron las reflexiones de Kieran y Drijvers (2006): "The Co-Emergence Of Machine Techniques, Paper-And-Pencil Techniques, And Theoretical Reflection: A Study Of Cas Use In Secondary School Algebra" y del sitio Web "Algebra en Asociación con la Tecnología en la Educación" (Algebra in Partnership with Technology in Education, APTE por sus siglas en inglés).

Este sitio Web (http://www.math.uqam.ca/~apte/indexE.html) incluye investigaciones relacionadas con la utilización de Sistemas de Cálculo Formal (SCF) en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra de la escuela secundaria, llevada a cabo por un equipo de investigadores; cuya base está, principalmente, en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Québec en Montreal, aunque tiene también colaboradores y consultores de México, Estados Unidos, Francia y de los países bajos.

Al inicio de los proyectos del APTE en 2003, el equipo de investigación estuvo conformado por Carolyn Kieran, André Boileau, Fernando Hitt, Denis Tanguay, y Mélanie Tremblay, del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Québec en Montreal; José Guzmán y Ana Isabel Sacristán, del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV-IPN) de la ciudad de México; Luis Saldanha (actualmente en Arizona State University, USA). A título de consultores han participado Michèle Artigue (Universidad Paris 7) y Paul Drijvers (Instituto Freudenthal, Utrecht, Holanda).

Este sitio aún se encuentra en desarrollo. De tal manera, da igualmente acceso a tareas del Sistema de Cálculo Formal (SCF) creadas por el equipo para su proyecto. Cada tarea se encuentra en tres versiones: alumno, alumno con soluciones y profesor. A su vez, disponibles están en francés, inglés y español.

Diversas publicaciones surgidas de este proyecto están también a disposición en este sitio.

A continuación presentamos las tareas del Sistema de Cálculo Formal (SCF).

Las actividades de 1 a 3 presentan un enfoque secuencial de la noción de equivalencia de expresiones algebraicas. En la actividad 1 se adopta primero una perspectiva numérica, y después algebraica.
En la actividad 2 se exploran los efectos de los diversos comandos CAS para determinar la equivalencia de expresiones.
En la actividad 3 se hace la transición entre las expresiones algebraicas y las ecuaciones. Se relaciona la equivalencia, o bien no equivalencia de dos expresiones que forman la ecuación y la resolución de ésta.
La actividad 4 trata sobre la nacionalización del denominador de una expresión.
En la actividad 5 se propone la exploración (de la forma factorizada a la forma expandida y de la forma expandida a la forma factorizada) de la suma y de la diferencia de cubos.
En la actividad 6 se explora las regularidades de la factorización de expresiones de la forma x^n - 1 (para valores enteros de n), incluyendo la factorización general de estas expresiones.
La actividad 7 trata sobre la utilización de la factorización para resolver ecuaciones que contienen expresiones con radicales.
En la actividad 8 se presenta un enfoque gradual para resolver sistemas de ecuaciones lineales, comenzando por la evaluación numérica; después se continúa con este trabajo, cuyo objetivo es darle sentido a los métodos de igualación y de sustitución para resolver estos sistemas.

En el cuadro anterior presentamos una síntesis de las ocho tareas diseñadas por Kieran y su equipo de trabajo.

Para realizar nuestro estudio exploratorio únicamente retomamos la actividad 1 (con sus cinco partes respectivas). Se hicieron modificaciones y adaptaciones a cada una de las partes que conforman esta Actividad 1. Se tomaron en cuenta las características del grupo con las que se llevaron a cabo y el tipo de CAS utilizado, de tal forma que se ajustaron a los propósitos marcados en este estudio.

El trabajo realizado por Kieran y Drijvers (2006) es guiada por la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) elaborada por Chevallard, quien describe cuatro componentes del proceso mediante el cual los objetos matemáticos están relacionados entre sí: tareas, técnicas, tecnología y teoría. Estos autores tomaron en cuenta las capacidades y usos del CAS de las calculadoras algebraicas de Texas Instruments (TI-92) para el diseño de estas actividades con el propósito de introducir esta herramienta como un medio para contrastar el trabajo realizado por los estudiantes en un medio combinado, es decir, con el método tradicional de papel y lápiz y con el uso del CAS. De esta manera poder observar de qué forma, la interacción entre la tecnología y la teoría motivan el pensamiento algebraico de los alumnos, cuando trabajan en este medio combinado.

En cambio en este trabajo de tesis se utilizó el CAS Aplusix, con el propósito de observar cuáles son las estrategias desarrolladas por estudiantes de bachillerato para la transformación de expresiones algebraicas mediante el uso de un CAS y con el método tradicional de papel y lápiz, conocer si el sistema algebraico computarizado (Aplusix) sirve como medio para reconocer y validar la noción de equivalencia entre expresiones algebraicas y, por último, saber cuáles son los grados de instrumentación e instrumentalización que desarrollan los estudiantes al enfrentarse a la resolución de tareas de transformación de expresiones algebraicas cuando utilizan lápiz y papel y un CAS.

De acuerdo con estos propósitos y con las capacidades de este CAS fue que consideramos la pertinencia de su utilización.

Con Aplusix II los estudiantes desarrollan libremente transformaciones paso a paso en los rectángulos que contienen las expresiones como lo hacen con papel y lápiz. Como se mencionó en el Capítulo I (ver punto 1.6. Descripción del CAS Aplusix), el CAS Aplusix no enseña directamente normas, reglas o los mecanismos algebraicos, ayuda a aplicarlos correctamente proporcionando retroalimentación y formalidad. Estos pasos son verificados y validados por el sistema que verifica la equivalencia de las expresiones. Con este tipo de CAS basados en entornos, el estudiante aprende de la observación y de la corrección de sus errores por el CAS.

Esto lo hace diferente del CAS de la TI-92 utilizado por Kieran y Drijvers (2006), en donde los cálculos son realizados por la calculadora por lo que el estudiante no puede observar el proceso interno llevado a cabo para llegar a la solución y tampoco interviene en el. El estudiante solamente está en la posibilidad de interpretar y aplicar esos resultados devueltos por la calculadora. En cambio el CAS Aplusix ofrece al estudiante ciertas retroalimentaciones (validación de la equivalencia, puntaje, etc.) entre las diferentes etapas para validar el correcto desarrollo y transformación de las expresiones (algebraicas y aritméticas), tiene la fortaleza de registrar todos los pasos realizados (aún los eliminados) por los estudiantes para posteriores revisiones o modificaciones.

A continuación se presenta en la figura 3.2.1. el tipo de instrumento utilizado en cada actividad. Cabe destacar que dentro del grupo de actividades también se realizó la comparación de expresiones algebraicas mediante manipulación simbólica con el método tradicional: en papel y con lápiz.

Actividad	**Equivalencia de expresiones**	**Instrumento**
I	Comparar expresiones por evaluación numérica	CAS
II	Comparar expresiones por manipulación algebraica	Papel y lápiz
III	Analizar la equivalencia mediante la re-escritura de la forma de una expresión -verificar la equivalencia con ayuda del operador '‖'	CAS
IV	Analizar la equivalencia sin expresar de nuevo la forma de una expresión - utilizar la prueba de igualdad –para verificar la equivalencia con ayuda del operador '‖'	CAS
V	Analizar la equivalencia, al utilizar cualquier método del CAS- verificar la equivalencia con ayuda del operador '‖'	CAS

Figura 3.2.1. Tipo de instrumento utilizado en cada actividad.

3.3. Adaptación e instrumentación de las actividades de este estudio exploratorio

Como se señaló en el punto anterior las actividades implementadas en este estudio se recuperaron del trabajo de investigación de Kieran y Drijvers (2006) y del sitio Web del APTE.

A continuación presentamos las cinco partes recuperadas de la actividad 1:

Parte I (con CAS): Comparación de expresiones mediante la evaluación numérica.

Según los diseñadores: los estudiantes ya habrán adquirido las técnicas básicas del uso y manejo del CAS, para el trabajo.

En esta parte de la actividad se adopta primero una perspectiva numérica, y después algebraica. Se diseñaron expresiones para obtener respuestas específicas (valores numéricos) con el uso del CAS de la calculadora TI-92. Se involucran relaciones que permitan la noción de equivalencia entre expresiones algebraicas. También, se desarrolló sobre las bases de un conjunto de actividades diseñadas para conducir al alumno de forma inductiva.

Este es un primer acercamiento al desarrollo de la noción de equivalencia, y en congruencia con el enfoque teórico, la idea no es llegar hasta la relación de equivalencia y de sus propiedades, sino tan sólo se pretende que estos razonamientos queden comprendidos en lo particular[6] por los estudiantes y que puedan referirse a ellos en términos meramente verbales.

Parte II (con papel y lápiz): Comparación de expresiones mediante manipulación algebraica.

En esta parte de la actividad los estudiantes continúan con el proceso de desarrollo de manipulación algebraica para llegar a las formas comunes de las expresiones algebraicas sin utilizar el CAS. En las hojas de trabajo se registra el avance que lograron los estudiantes mediante el uso del papel y lápiz.

[6] Porque en general, una relación $\boldsymbol{R}$ es de equivalencia en un conjunto **A** si y solo si es reflexiva ($a\boldsymbol{R}a$), simétrica ($a\boldsymbol{R}b \rightarrow b\boldsymbol{R}a$) y transitiva ($(a\boldsymbol{R}b$ y $b\boldsymbol{R}c) \rightarrow a\boldsymbol{R}c$) para todo $a,b,c \in \mathbf{A}$.

Parte III (con CAS): Verificación de la equivalencia, mediante la re-escritura de la forma de una expresión algebraica dada, usando el comando EXPAND.

En esta parte de la actividad se involucra al estudiante en la verificación de la equivalencia, mediante la re-escritura de la forma de una expresión algebraica, usando los comandos y herramientas del CAS (TI-92). De manera que el estudiante sea capaz de interpretar lo que arroja o presenta como resultado el CAS y contrastarlo con el resultado obtenido en su trabajo realizado en papel y con lápiz.

Parte IV (con CAS): Verificación de la equivalencia, sin re-escribir la forma de una expresión, mediante el uso de una prueba de igualdad.

En esta parte de la actividad los estudiantes verifican la equivalencia entre expresiones, sin re-escribir la forma de una expresión, sino mediante el uso de una prueba de igualdad con el CAS. Se pretende que el CAS (TI-92) no reemplace la capacidad de procesamiento de la mente sino que la amplifique.

Parte V (con CAS): Verificación de la equivalencia, usando cualquiera de los métodos de CAS.

En esta actividad se verifica la equivalencia entre expresiones algebraicas, usando cualquiera de los métodos que ofrece el CAS (Solve, Expand, etc.), dejando al estudiante decidir sobre qué método le conviene usar.

Saxe y Bermudez (1996) mencionan que el medio ambiente matemático se constituye por las construcciones que realiza el estudiante. Éstas deben ser entendidas o analizadas en ese medio, sin dejar a un lado lo que el estudiante ya sabe, para que tenga sentido el aprendizaje del nuevo conocimiento o la nueva conceptualización del objeto matemático.

Las actividades anteriormente mencionadas sirvieron para estructurar y adaptar una secuencia didáctica que se llevó a cabo en la clase de matemáticas de primer semestre de bachillerato de la Escuela Comercial Cámara De Comercio de la ciudad de México.

Las diferentes secciones de la secuencia son las siguientes:

- Nombre de la actividad
- Objetivo (s) y / o propósitos
- Características
- Descripción de la lección
- Preguntas de reflexión

3.3.1. Objetivo, características y descripción de las actividades aplicadas en este estudio exploratorio. Introducción al manejo, al uso y manipulación del CAS

Objetivo: La meta de esta actividad fue que los estudiantes adquieran las técnicas básicas del manejo y uso del CAS (Aplusix II) y que notaran que hay diferentes tipos de manipulación y transformación tanto numérica como algebraica, así como diferentes formas de agregar y exhibir las expresiones. Esto ayudó a que los alumnos se dieran cuenta del encadenamiento que se tiene que seguir en la transformación y solución de las expresiones algebraicas.

Descripción de la lección: Las sesiones de introducción fueron el espacio didáctico, donde profesor y alumno conversaron en torno al contenido y los objetivos del uso y manejo del CAS (Aplusix II). En estas sesiones se tuvo el propósito de que el profesor se diera cuenta de los conocimientos previos con que contaban los alumnos.

Las actividades fueron conducidas por el profesor en términos informales, como el dialogo, durante el cual se les preguntó individualmente a los alumnos, cuestionando sus respuestas, articulándolas con las de otros y buscando que las profundizaran. Los anteriores ejercicios siguieron el propósito de hacer un acto de reminiscencia y actualización de conocimientos tanto algebraicos como del uso y manejo del CAS, por tanto los estudiantes debieron adquirir las siguientes técnicas básicas del CAS, para el trabajo que posteriormente se les presentó:

1. Insertar paréntesis en el numerador y el denominador de expresiones racionales;
2. Insertar el operador explícito de la multiplicación () cuando se multipliquen dos variables, o cuando se multiplique una variable en la posición del primer lugar por una constante o alguna otra expresión;
3. Saber cómo usar el operador "duplicar y calcular" para evaluar expresiones dado cualquier valor de *x*;
4. Saber cómo usar la flecha para borrar la parte seleccionada y hacer los cambios pertinentes del texto en la línea de entrada;
5. Saber cómo reemplazar textos en la línea de entrada con cualquiera de las expresiones en el "área de trabajo" de la pantalla de la computadora;
6. Saber cómo borrar la línea de entrada o cualquier otra línea de la pantalla de trabajo de la computadora;
7. Tener el hábito para verificar por inspección visual, la correcta sintaxis de las expresiones introducidas en la línea de entrada.

3.3.2. Actividad I: Comparación de expresiones mediante la evaluación numérica

Propósito: Trabajar un enfoque numérico como base para la discusión en torno a la equivalencia de expresiones.

Descripción de la lección: En el inicio del estudio exploratorio fue utilizada: la evaluación numérica de expresiones algebraicas mediante el uso del CAS Aplusix, como medio de comparación de los valores resultantes de esta evaluación lo que propició la discusión sobre la equivalencia algebraica.

Una de las tareas principales aquí fue la sustitución numérica, la cual tuvo como finalidad que los estudiantes notaran que algunos pares de expresiones parecieron siempre terminar con resultados iguales, y así evocar la noción de equivalencia basada en la igualdad numérica.

A continuación se muestra la figura que contiene las expresiones algebraicas que se presentaron a los estudiantes en esta Actividad I (ver Anexo I).

Para x =	1/3	-5		
Expresión	Resultado	Resultado	Resultado	Resultado
1. $(x-3)(4x-3)$				
2. $(x^2+x-20)(3x^2+2x-1)$				
3. $\frac{(x^2+3x-10)(3x-1)(x^2+3x+2)}{(x+2)}$				
4. $(-x+3)^2+x(3x-9)$				
5. $(3x-1)(x^2-x-2)(x+5)$				

Figura 3.3.2.1. Actividad I referente a la evaluación numérica.

De manera similar al trabajo realizado por Kieran y Drijvers (2006), después de haber llenado la tabla presentada en la figura 3.3.2.1. se pidió a los alumnos que contestaran una serie de preguntas (ver anexo I) referentes a la tarea realizada anteriormente, mismas que propiciaron la discusión y reflexión en el aula.

En la siguiente figura se muestran algunas de las preguntas presentadas:

1. **Compara los resultados que calculaste según las diversas expresiones que aparecen en la tabla. Registra, en el rectángulo que sigue, lo que hayas observado.**
2. **¿Qué puedes conjeturar respecto de lo que sucede si aumentas los valores de la tabla e incluyes otros valores de *x*?**
3. **¿Qué parejas de expresiones producen resultados iguales?**
4. **¿Alguien más obtuvo resultados iguales para sus elecciones de los valores de *x* (para qué par de expresiones)? ¿Estás sorprendido por este hecho?**
5. **¿Por qué si? O ¿Por qué no?**

Figura 3.3.2.2. Algunas preguntas referentes a la Actividad I evaluación numérica.

3.3.3. Actividad II: Comparación de expresiones mediante manipulación algebraica (con papel y lápiz)

Propósito: Usar la transformación algebraica para obtener formas comunes de las expresiones dadas utilizando el método tradicional de papel y lápiz.

Descripción de la actividad: Esta Actividad II estuvo basada en la observación de las diversas manipulaciones y transformaciones algebraicas que realizaron los alumnos en el ambiente tradicional de papel y lápiz con las expresiones para poder determinar cuáles eran o no equivalentes.

Las técnicas utilizadas por los alumnos sirvieron para entender la interacción entre la tecnología y la práctica que sobre las expresiones algebraicas se tiene, cuya teoría es abstracta y que dicha interacción contribuye al desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes. Se pidió a los alumnos establecer una conjetura, respecto a que si las expresiones anteriores dadas (ver figura 3.3.2.1.) pueden ser re-expresadas en una forma común o no.

En la siguiente figura 3.3.3.1. se presentan algunas de estas preguntas de reflexión y discusión que los estudiantes tuvieron que responder (ver Anexo I).

¿Es posible establecer una conjetura, respecto de que las expresiones anteriores dadas pueden, en efecto, ser re-expresadas en una forma común?

(A) Verifica tu conjetura, usando álgebra en papel y lápiz; re-escribe las expresiones dadas abajo en otra forma (no necesariamente en forma desarrollada). Muestra todo tu trabajo en la columna de la parte derecha de la tabla.

Figura 3.3.3.1. Algunas preguntas de reflexión y discusión acerca de la Actividad II.

Además en esta Actividad II se pretendió que desarrollaran la capacidad de observar las expresiones a una escala global y “ver” qué tipo de transformaciones algebraicas era posible realizar para re-escribir las expresiones a una forma común. Por ejemplo: la agrupación de términos semejantes o la cancelación de factores comunes.

En la siguiente figura 3.3.3.2. se presenta la tabla que contiene las expresiones algebraicas que los estudiantes tuvieron que transformar para re-escribirlas a una forma común. Podemos observar que estas expresiones algebraicas son las mismas que fueron utilizadas en la Actividad I (ver Anexo I).

El uso de esta tabla en esta Actividad II sirvió para promover en los estudiantes la comparación de expresiones mediante manipulación algebraica (con papel y lápiz).

Expresiones dadas	Forma re-escrita de la expresión dada
1. $(x-3)(4x-3)$	
2. $(x^2+x-20)(3x^2+2x-1)$	
3. $\frac{(x^2+3x-10)(3x-1)(x^2+3x+2)}{(x+2)}$	
4. $(-x+3)^2+x(3x-9)$	
5. $(3x-1)(x^2-x-2)(x+5)$	

Figura 3.3.3.2. Expresiones algebraicas a trabajar en la Actividad II

De manera similar a los puntos anteriores, nuevamente se les pidió a los estudiantes que respondieran una serie de preguntas con el propósito de promover la reflexión y discusión acerca de esta actividad realizada.

La siguiente figura 3.3.3.3. muestra otra de las preguntas (posteriores al trabajo realizado en la tabla de la figura 3.3.3.2.) presentadas a los estudiantes.

(C) En la Parte I C, hiciste algunas conjeturas basadas en evaluaciones numéricas de expresiones. Explica ¿En qué forma las manipulaciones algebraicas en la Parte II B ayudó (o no) al planteamiento de cada una de esas conjeturas?

Figura 3.3.3.3. Pregunta de reflexión y discusión posterior al llenado de la tabla.

3.3.4. Actividad III: Verificación de la equivalencia, mediante la re-escritura de la forma de una expresión algebraica dada, usando el CAS Aplusix

Propósito: usar el CAS Aplusix como herramienta para validar la equivalencia de expresiones en torno a la transformación algebraica para re-escribir una expresión.

Descripción de la actividad: Utilizando el CAS Aplusix se pidió a los estudiantes escribir las mismas expresiones algebraicas utilizadas en la Actividad II. Uno de los propósitos de esta actividad fue que las validaciones proporcionadas por el CAS Aplusix apuntaran a traer nociones matemáticas a flote, haciéndolas objetos de reflexión y discusión en el aula, para clarificarlas sobre las expresiones intermedias producidas en el proceso de transformación de las expresiones.

Al igual que en la actividad anterior, los estudiantes requirieron de la capacidad de observar a escala global las expresiones y “ver” qué maniobras de transformación era posible realizar, sólo que esta vez se apoyaron en las retroalimentaciones que proporcionaba el CAS (la validación de la equivalencia).

En la figura 3.3.4.1. se presentan algunas de las preguntas realizadas a los estudiantes. Éstas sirvieron como fuente para propiciar la discusión entre los estudiantes durante las sesiones en el salón de clases.

Enseguida de presentan algunas de las Preguntas de discusión (ver Anexo I).

1. “¿Qué es lo que los comandos de Aplusix parece que hacen?”
2. Respecto a las expresiones 1 y 4:

a) “¿Se produjo la misma forma expandida al realizar las transformaciones algebraicas en Aplusix en las expresiones 1 y 4?”
b) Toma la parte encerrada entre paréntesis de las expresiones 1 y 4.

“¿Es posible transformar la expresión 4 en la misma forma de la expresión 1?”

c) “Nota que hemos llegado a formas comunes de las expresiones dadas 1 y 4 en dos formas diferentes: expandiendo las expresiones 1 y 4, y produciendo la forma común $4x^2$-15x+9; descomponiendo en factores la expresión 4, nos permite re-escribirla en la forma de la expresión 1.

“¿Qué piensas de esos dos métodos diferentes para obtener formas comunes?”

3. “¿Pueden tener, las expresiones 3 y 5, la misma forma sin expandirlas?” (por medio de la descomposición en factores o la simplificación).

4. “Tu trabajo algebraico en papel y lápiz y de CAS de la lección previa,
¿Te dio resultados semejantes?
¿En qué forma?” (Esta pregunta pretende sólo *introducir*, pero no desarrollar estas dos formas de trabajo; el resultado de las formas producidas por CAS puede ser diferente de las formas producidas con el trabajo de papel y lápiz).

5. Conclusiones: “Basados en nuestro trabajo algebraico y en la verificación usando CAS,
¿Podemos ahora concluir que las expresiones 1 y 4 (lo mismo sucede para las expresiones 3 y 5) pueden ser re-escritas en la misma forma algebraica?”

Figura 3.3.4.1. Preguntas de reflexión y discusión acerca del trabajo realizado en la Actividad III.

3.3.5. Actividad IV: Verificación de la equivalencia, sin re-escribir la forma de una expresión, mediante el uso de una prueba de igualdad

Propósitos: comprender qué sucede cuando introducimos en el CAS Aplusix dos expresiones que son: *a*) equivalentes, o *b*) no equivalentes.

Descripción de la actividad: En esta actividad los estudiantes usaron diferentes técnicas en el CAS (desarrollar y simplificar las expresiones, comparar directamente dos expresiones, factorizar, etc.) para verificar la equivalencia de expresiones.

En la retroalimentación automática (validación de la equivalencia) que proporcionó el CAS Aplusix a los estudiantes en la Actividad III, ellos notaron que la equivalencia no siempre es clara, ya que no informa sobre las restricciones existentes en algunas de las expresiones algebraicas; por tanto, son los mismos estudiantes quienes tienen que considerarlas, lo cual propició la discusión de la siguiente pregunta:

¿Qué significa decir que "Dos expresiones algebraicas son equivalentes”?

En la figura que se presenta a continuación se puede observar la tarea que se presentó a los estudiantes en esta actividad, en la que se pretendió propiciar que los estudiantes verificaran la equivalencia, sin re-escribir la forma de una expresión, sino mediante el uso de una prueba de igualdad con el CAS.

Preguntas de discusión:

(A) Introduce, directamente, en la línea de entrada del software Aplusix la ecuación formada por la expresión 3:

$$\frac{(x^2+3x-10)(3x-1)(x^2+3x+2)}{(x+2)}$$

(B) Ahora duplica la caja e introduce, directamente, en la línea de entrada del software Aplusix II la ecuación formada por la expresión 5:

¿Cómo interpretas este resultado?

Usa el software Aplusix II para manipular algebraicamente y reemplaza *x* por –2 en la ecuación precedente. Interpreta el procedimiento y el resultado mostrado.

$$(3x–1)(x^2–x–2)(x+5)$$

¿Qué muestra el software como resultado?

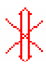
“¿Por qué Aplusix II no mostró ‘  ’ en el caso posterior?”

Figura 3.3.5.1. Tareas de la Actividad IV

3.3.6. Actividad V: Verificación de la equivalencia, usando cualquiera de los métodos de CAS

Propósito: Hacer notar otras propiedades o características más relevantes sobre lo que hace que dos expresiones algebraicas sean equivalentes.

Descripción de la actividad: Como en el estudio de Kieran y Drijvers (2006), esta tarea estuvo interesada en obtener información sobre las "orientaciones naturales" que tienen los estudiantes. En particular, cuando el método de sustitución numérica fue visto por ellos como adecuado para determinar la equivalencia de expresiones.

En la figura 3.3.6.1. se puede ver las expresiones que se presentaron a los estudiantes. En ésta se observa la decisión tomada por ellos sobre que método usar (CAS o papel y lápiz) para verificar la equivalencia o no equivalencia de estas expresiones algebraicas.

Expresión dada
1. $4(x-1)^2-(x+1)^2$
2. $(2x+5)(x-3)-(x-3)^2$
3. $(x-3)(3x-1)$
4. $\frac{(3x-1)(x^2-x-6)}{(x+2)}$

Figura 3.3.6.1. Expresiones algebraicas de la Actividad V.

Los estudiantes verificaron la equivalencia o la no equivalencia entre las expresiones y respondieron las siguientes preguntas de reflexión:

a) ¿Puedes usar el CAS o papel y lápiz para determinar cuáles de estas expresiones son equivalentes? Usa cualquiera de los métodos que prefieras. Muestra todo tu trabajo en la tabla de abajo:
b) Con base en tu trabajo precedente, ¿cuáles son las expresiones equivalentes? (No olvides especificar el conjunto de los valores posibles de *x*). Por favor, explica tus decisiones respecto de la equivalencia.

Así, se decidió tomar y adaptar el diseño de las cinco partes de la actividad 1 realizadas por Kieran y Drijver (2006) a las tareas que abarcaron las nociones de equivalencia algebraica en nuestro estudio exploratorio. Se pretendió que los estudiantes se involucraran en la evaluación numérica y en la transformación algebraica para que a partir de éstas desarrollaran el razonamiento teórico de la noción de equivalencia entre expresiones algebraicas. Se observó cuáles fueron las estrategias de transformación que emplearon los estudiantes al manipular algebraicamente las expresiones con papel y lápiz y con el CAS Aplusix.

En su trabajo Laborde (1992) menciona que una tarea resuelta usando un CAS podría requerir estrategias diferentes que las que requiere la misma tarea con lápiz y papel. También refiere que tiene repercusión en la retroalimentación (feedback) que el alumno recibe.

Por último con estas adaptaciones se pretendió observar el grado de instrumentación e instrumentalización que los estudiantes desarrollaron mediante el uso y manejo del CAS Aplusix.

En seguida se presenta la figura 3.3.6.3 con todas las actividades que se llevaron a cabo con los estudiantes en el laboratorio de cómputo y en el salón de clases de la escuela (ECCC), así como las fechas en que se realizaron.

Actividades	Período
Introducción al uso y manejo del CAS (Aplusix II)	26-Nov-09 27-Nov-09
Manipulación del CAS (Aplusix II)	03-Dic-09 04-Dic-09
Actividad I Comparación de expresiones mediante la evaluación numérica	02-Feb-10 05-Feb-10
Actividad II Comparación de expresiones mediante manipulación algebraica	08-Feb-10 12-Feb-10
Actividad III Verificación de la equivalencia mediante la re-escritura de la forma de una expresión	15-Feb-10 16-Feb-10
Actividad IV Verificación de la equivalencia sin re-escribir la forma de una expresión, usando la prueba de igualdad	19-Feb-10 22-Feb-10
Actividad V Verificación de la equivalencia, usando cualquiera de los métodos de CAS (Aplusix II)	23-Feb-10 26-Feb-10
Análisis de los datos	Marzo-Mayo
Resultados	Junio-Julio

Figura 3.3.6.3. Actividades realizadas y su calendarización.

Podemos destacar que durante la adaptación de las actividades se realizó una consulta con algunos profesores de matemáticas de la misma escuela. Se les preguntó acerca de los conocimientos previos de los estudiantes en torno a la noción de equivalencia algebraica. Coincidieron en que los estudiantes, participantes en el experimento, no habían tenido ningún encuentro anterior con esta noción.

También se revisó el libro de texto de matemáticas I de la escuela y no se encontró relación alguna con la noción de equivalencia algebraica.

3.3.7. Resumen Capítulo III

En este capítulo se presentó la metodología usada para el presente estudio. Incluye una descripción tanto del proceso que se siguió y como de quiénes fueron los sujetos implicados, dónde y cuándo se ejecutó el experimento y cuáles fueron las herramientas para la recolección de datos. También se mostró la descripción del sitio Web del proyecto APTE que sirvió, en conjunto con el estudio realizado por Kieran y Drijvers (2006), como fuente para el diseño y adaptación de las actividades.

Por último se presentaron las diferentes actividades que se llevaron a cabo en la práctica, para la obtención y análisis de los datos que nos permitieron observar la relación que existe entre la resolución de las actividades algebraicas con lápiz y papel y con el uso del CAS Aplusix.

CAPITULO IV

4. Resultados y análisis de datos

4.1. Análisis de las respuestas escritas por los alumnos, y de las observaciones de las videograbaciones

En este capítulo IV presentamos el análisis de los datos obtenidos, donde se describe el desarrollo del pensamiento de los estudiantes a lo largo del avance de las actividades. Tal análisis se centró en la observación de lo que escriben los alumnos en las hojas de trabajo a lo largo de las actividades que se desarrollaron durante las sesiones. Además, se hace una revisión del registro de las videograbaciones y de las notas tomadas al término de algunas de las actividades.

De las cinco actividades que se llevaron a cabo, consideramos que los resultados más relevantes se obtuvieron en las actividades 1,2 y 3. En seguida se muestran los ejemplos más significativos de lo realizado por los alumnos, así como su interpretación.

4.2. Actividad I: Comparación de expresiones mediante la evaluación numérica

En seguida se mostrarán imágenes de la actividad de los estudiantes en el momento de abordar las hojas de trabajo.

La siguiente figura muestra a los estudiantes trabajando con el CAS Aplusix dentro del laboratorio de cómputo al inicio de la Actividad I: La evaluación numérica.

Figura 4.2.1. Fotografía de los estudiantes participantes en la Actividad 1 en el laboratorio de cómputo.

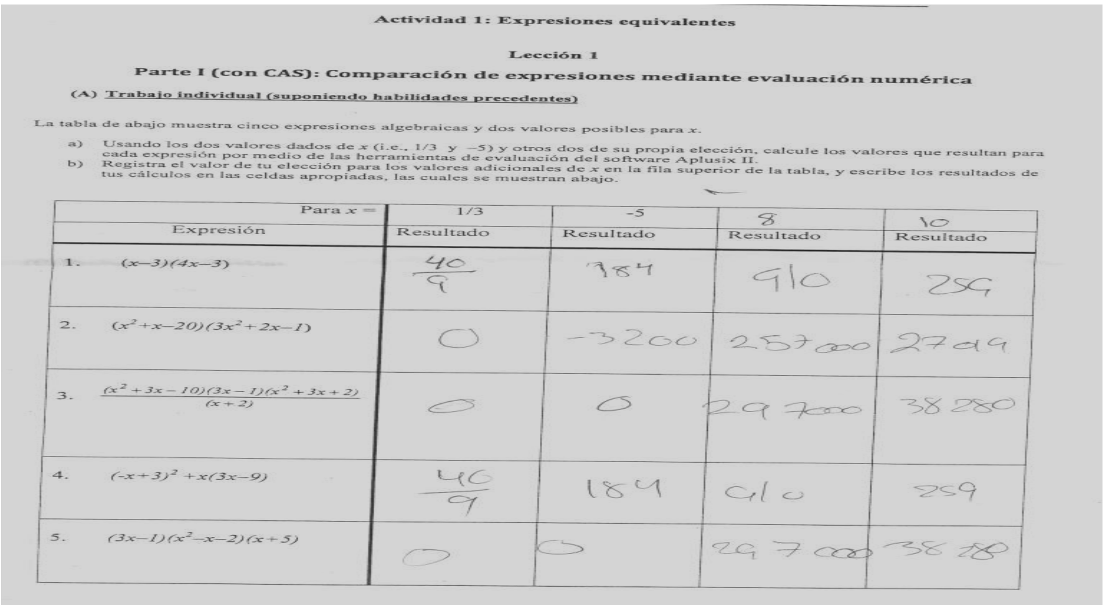
En dicha actividad 1 (ver anexo I) se observó que el uso y manejo de los comandos del CAS (Aplusix) no representó dificultades para la mayoría de los estudiantes. Sin embargo, trabajar con números fraccionarios en las operaciones de simplificación aritmética para encontrar el valor numérico de las expresiones sí representó un problema para la mayoría de ellos.

A continuación se describen las respuestas numéricas de los estudiantes y las respuestas en las preguntas de reflexión de la actividad I:

a) Los estudiantes trabajaron con el CAS siguiendo el propósito de llenar la tabla que aparece en la figura 4.2.2. De manera que realizaron sustitución algebraica y operaciones de simplificación aritmética para obtener valores numéricos, registrados en esta tabla.

b) En las dos columnas en blanco, en la parte derecha de la tabla, los estudiantes extendieron dos valores más que fueron de su propia elección.

Con el diseño de esta actividad, realizado por Kieran y Drijvers (2006), los estudiantes notaron que algunos pares de expresiones parecen siempre terminar con resultados iguales y, así, evocaron la noción de equivalencia basada en la igualdad numérica.



Actividad 1: Expresiones equivalentes

Lección 1

Parte I (con CAS): Comparación de expresiones mediante evaluación numérica

(A) Trabajo individual (suponiendo habilidades precedentes)

La tabla de abajo muestra cinco expresiones algebraicas y dos valores posibles para x.

a) Usando los dos valores dados de x (i.e., 1/3 y −5) y otros dos de su propia elección, calcule los valores que resultan para cada expresión por medio de las herramientas de evaluación del software Aplusix II.

b) Registra el valor de tu elección para los valores adicionales de x en la fila superior de la tabla, y escribe los resultados de tus cálculos en las celdas apropiadas, las cuales se muestran abajo.

Para x =	1/3	-5	8	10
Expresión	Resultado	Resultado	Resultado	Resultado
1. $(x-3)(4x-3)$	$\frac{40}{9}$	784	910	259
2. $(x^2+x-20)(3x^2+2x-1)$	0	-3200	257000	27099
3. $\frac{(x^2+3x-10)(3x-1)(x^2+3x+2)}{(x+2)}$	0	0	297000	38280
4. $(-x+3)^2+x(3x-9)$	$\frac{46}{9}$	184	910	259
5. $(3x-1)(x^2-x-2)(x+5)$	0	0	297000	38280

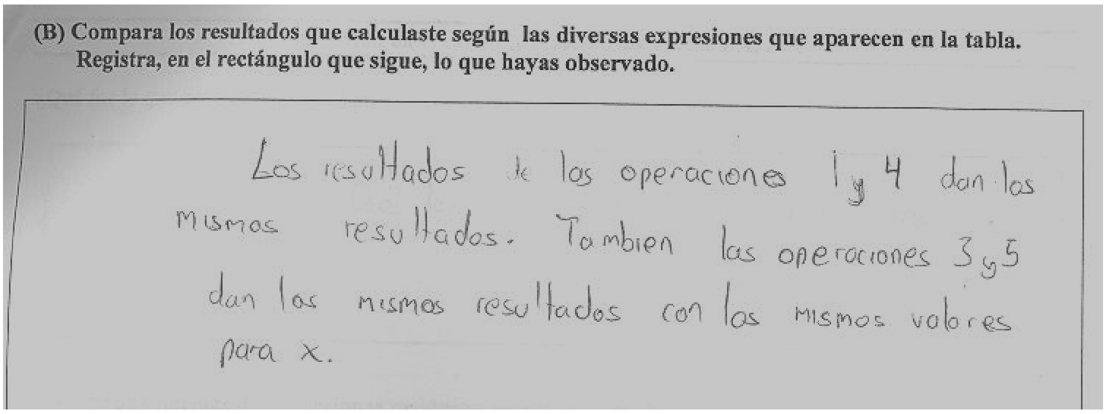
Figura 4.2.2. Muestra de una de las soluciones de los estudiantes a la evaluación numérica.

Una vez que los estudiantes obtuvieron y registraron en la tabla los valores numéricos de las expresiones (ver figura 4.2.2.), continuaron con la resolución de la serie de preguntas llamadas “de reflexión” (ver anexo 1). Así, se exponen las respuestas de los estudiantes que se consideraron más significativas.

En lo que se refiere a los resultados obtenidos del planteamiento de la siguiente pregunta, designada con el inciso (B), ver página 2 del anexo I):

(B) Compara los resultados que calculaste según las diversas expresiones que aparecen en la tabla. Registra lo que hayas observado.

En las respuestas individuales de los participantes hubo tres tipos de respuesta, las cuales llamamos 1,2 y 3. Presentamos una muestra de uno de los tipos.



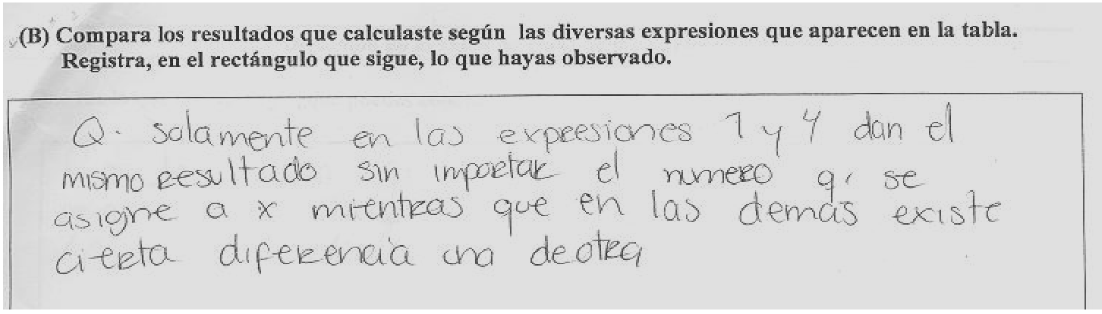
(B) Compara los resultados que calculaste según las diversas expresiones que aparecen en la tabla. Registra, en el rectángulo que sigue, lo que hayas observado.

Los resultados de las operaciones 1 y 4 dan los mismos resultados. Tambien las operaciones 3 y 5 dan los mismos resultados con los mismos valores para x.

Figura 4.2.3. Muestra de la respuesta 1 a la pregunta (B) de la Actividad I.

Ocho participantes dieron la respuesta 1 (ver figura 4.2.3.), en la cual puede apreciarse: los estudiantes observaron que en las expresiones 1 y 4 se obtuvo el mismo valor numérico (para los valores de *x* =1/3 y -5), aún cuando las expresiones que aparecían en los recuadros eran diferentes en su estructura, y que lo mismo sucedía para las expresiones 3 y 5.

Del segundo tipo de respuesta de los estudiantes presentamos una muestra:


(B) Compara los resultados que calculaste según las diversas expresiones que aparecen en la tabla. Registra, en el rectángulo que sigue, lo que hayas observado.

Q. solamente en las expresiones 1 y 4 dan el mismo resultado sin importar el numero q. se asigne a x mientras que en las demas existe cierta diferencia una de otra

Figura 4.2.4. Muestra de la respuesta 2 a la pregunta (B) de la Actividad I.

Once participantes obtuvieron el mismo valor numérico sólo para las expresiones 1 y 4 (para los valores de x =1/3 y -5), mientras que en el caso de las expresiones 3 y 5 ya no resulto el mismo valor numérico. En la figura 4.2.5. que se muestra a continuación, se puede observar a un estudiante desarrollando las transformaciones y operaciones de simplificación aritmética con el CAS Aplusix para obtener el valor numérico de la expresión 1 (ver la figura 4.2.2.).

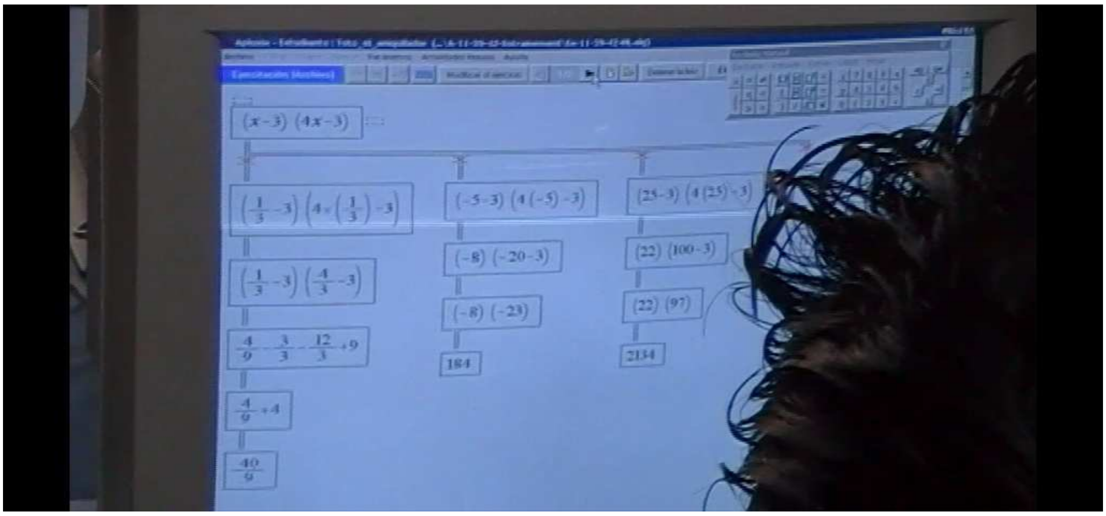


Figura 4.2.5. Fotografía de un estudiante al realizar la evaluación numérica de la expresión 1 con el CAS Aplusix.

En seguida se presenta un ejemplo del tercer y último tipo de respuesta, referente a esta pregunta (B), que los estudiantes registraron en sus hojas de trabajo.

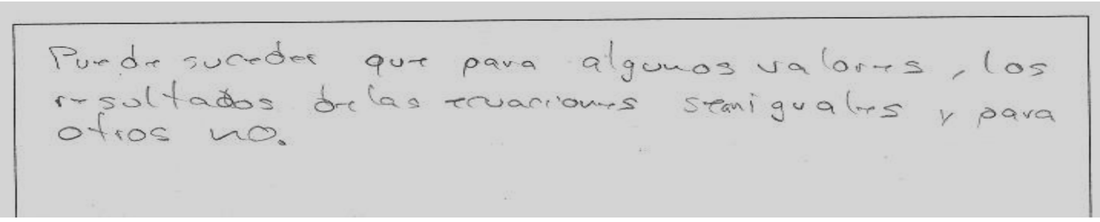


Figura 4.2.6. Muestra del tercer tipo de respuesta a la pregunta (B) de la Actividad I.

En este tipo de respuesta observamos que siete estudiantes encontraron sólo en alguna ocasión uno o dos valores numéricos iguales en las expresiones algebraicas.

Al igual que en el caso anterior (respuesta 2) parece ser que no comprenden el encadenamiento en la transformación y simplificación de las operaciones aritméticas (jerarquía de operaciones y uso de paréntesis), aún cuando el CAS les proporcionó una retroalimentación (validación) continua para verificar paso a paso la equivalencia entre las expresiones cuando ellos realizaron sus cálculos en este proceso. Estos estudiantes entendían que cuando el CAS no validaba la equivalencia (un trazo rojo doble tachado con una cruz) había algún error en su proceso. Sin embargo, no supieron identificar y corregir sus errores en esta simplificación aritmética.

La siguiente figura 4.2.7. muestra a un estudiante en el momento de tratar de localizar algún error en su proceso de sustitución algebraica para la expresión 5 que se presenta en la tabla de la figura 4.2.2.

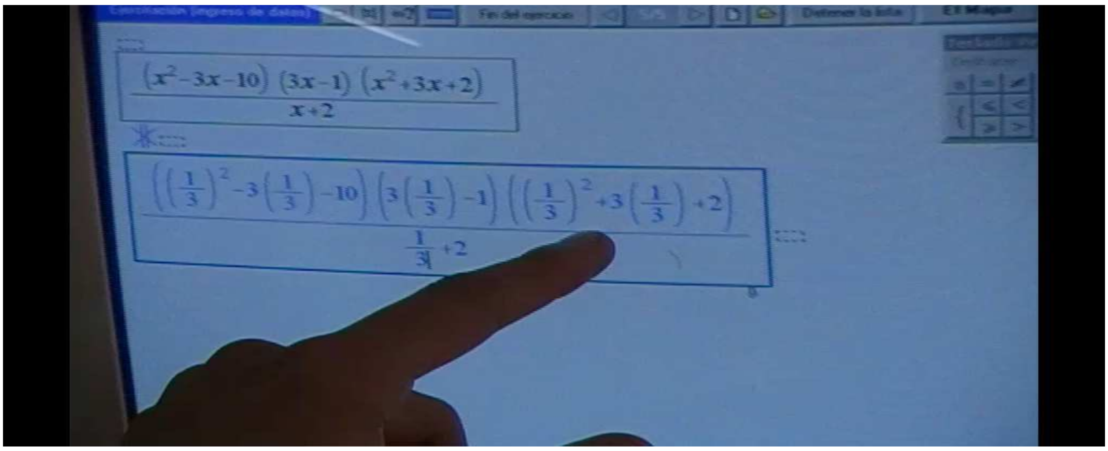


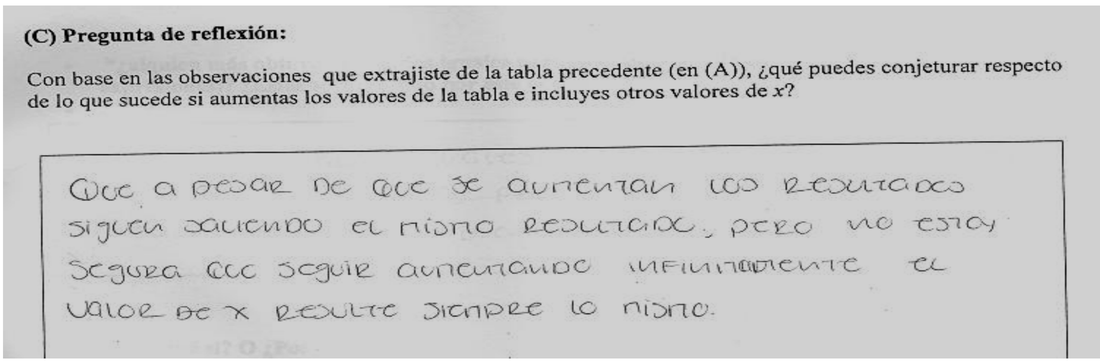
Figura 4.2.7. Estudiante que intenta identificar algún error en su proceso de evaluación numérica con fracciones.

Como parte del análisis de las respuestas proporcionadas por los alumnos, ahora se muestran los hallazgos encontrados en los tipos de respuestas más representativas de los participantes de la pregunta “*(c) de reflexión*” que se encuentra en la página 2 del Anexo I y que está directamente ligada con la anterior pregunta de reflexión (B):

Con base en las observaciones que extrajiste de la tabla precedente (en (A)), ¿Qué puedes conjeturar respecto de lo que sucede si aumentas los valores de la tabla e incluyes otros valores de x?

Podemos destacar que de los ocho estudiantes que obtuvieron los mismos valores numéricos en las expresiones 1=4 y 3=5, siete indicaron que cuando extendieron los valores de *x* volvieron a obtener el mismo resultado en los dos pares de expresiones. Cabe señalar que todos los estudiantes escogieron valores numéricos enteros positivos y en algunos casos negativos, es decir, que en ningún momento propusieron números fraccionarios o decimales y, menos, algún valor simbólico o casi simbólico como π, lo que nos hace pensar en la dificultad y malestar que presentan los estudiantes al trabajar con este tipo de valores o representaciones. A partir de sus resultados, conjeturaron que aunque se siga con la extensión, de los valores de *x* siempre se obtendrá el mismo valor numérico, sin percatarse si existen, o no, posibles restricciones en las expresiones.

En la siguiente fotografía se exhibe la respuesta de uno de los ocho estudiantes que encontraron los mismos valores numéricos para cada par de expresiones. Esta estudiante indicó no estar segura de que seguir con la extensión de valores de *x* resulte siempre el mismo valor.



(C) Pregunta de reflexión:

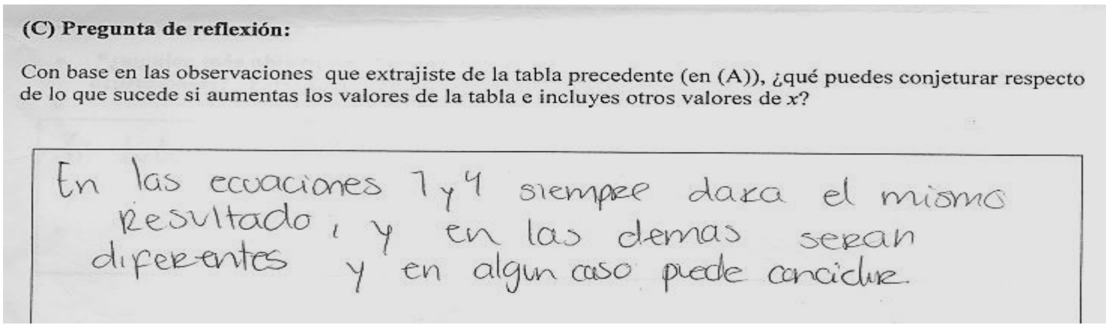
Con base en las observaciones que extrajiste de la tabla precedente (en (A)), ¿qué puedes conjeturar respecto de lo que sucede si aumentas los valores de la tabla e incluyes otros valores de *x*?

Que a pesar de que se aumentan los resultados siguen saliendo el mismo resultado, pero no estoy segura que seguir aumentando infinitamente el valor de x resulte siempre lo mismo.

Figura 4.2.8. Respuesta de la estudiante insegura de los valores numéricos de *x*.

Cuando se cuestionó su conjetura, la estudiante confesó su inseguridad respecto a los posibles valores numéricos para *x*. Lo anterior, debido a que no pudo realizar una comprobación mediante el uso de transformaciones algebraicas.

En la figura 4.2.9. se ejemplifica el tipo de conjetura realizada por los once estudiantes que obtuvieron el mismo valor numérico en las expresiones 1 y 4, pero no en las expresiones 3 y 5. Estos estudiantes conjeturaron que si extendían los valores, en las expresiones 1 y 4 se volvería a obtener el mismo resultado. Sin embargo, para las expresiones 3 y 5 ya no se obtendrá el mismo valor, lo cual parece deberse a que en la actividad de la sustitución numérica no obtuvieron el mismo resultado, lo que afectó directamente para que dieran esta conjetura.



(C) Pregunta de reflexión:

Con base en las observaciones que extrajiste de la tabla precedente (en (A)), ¿qué puedes conjeturar respecto de lo que sucede si aumentas los valores de la tabla e incluyes otros valores de *x*?

En las ecuaciones 1 y 4 siempre dara el mismo Resultado, y en las demas seran diferentes y en algun caso puede concidir.

Figura 4.2.9. Muestra de una de las conjeturas hechas por los once estudiantes que encontraron valores iguales para un sólo par de expresiones (1 y 4).

Los otros siete estudiantes restantes que encontraron algunos valores iguales entre las expresiones (respuesta 3), conjeturaron que, también, sólo para algunos valores (los casos en los que encontraron valores iguales) podrá resultar el mismo valor en las expresiones. Cuando ellos extendieron los valores de *x,* según su propia elección, y realizaron las operaciones de sustitución y simplificación no encontraron el mismo valor numérico, incluso ni en los casos en que sí habían encontrado valores iguales. Al cuestionárseles sobre este suceso, ellos argumentaron que se debía a que volvieron a cometer errores en el proceso de sustitución y simplificación aritmética.

Al terminar la actividad, el profesor ejecutó en el CAS Aplusix la opción llamada “actividad de observación” con el propósito de revisar y analizar el trabajo realizado por estos estudiantes.[7]

En la revisión de los ejercicios realizados por los estudiantes del experimento se observó que el CAS mostró la validación de la no equivalencia entre sus cálculos desde un inicio. Los estudiantes trataron de identificar en donde se encontraban estos errores (borraron y re-escribieron los cálculos varias veces). No obstante, al no identificarlos (jerarquía de operaciones y uso de paréntesis) los ignoraron y continuaron con la simplificación hasta obtener un resultado final (erróneo).

Es importante destacar que ninguno de los 26 participantes indicó o se percató de la restricción de equivalencia que existe entre las expresiones 3 y 5, para el caso en particular cuando $x = -2$ para la expresión 5, lo que provoca que el denominador se convierta en cero y que la expresión sea indeterminada.

A continuación presentamos muestras de las respuestas dadas por los estudiantes, referentes a la siguiente pregunta que consideramos significativa para nuestro análisis y que se encuentra en la actividad I (página 4 del anexo I):

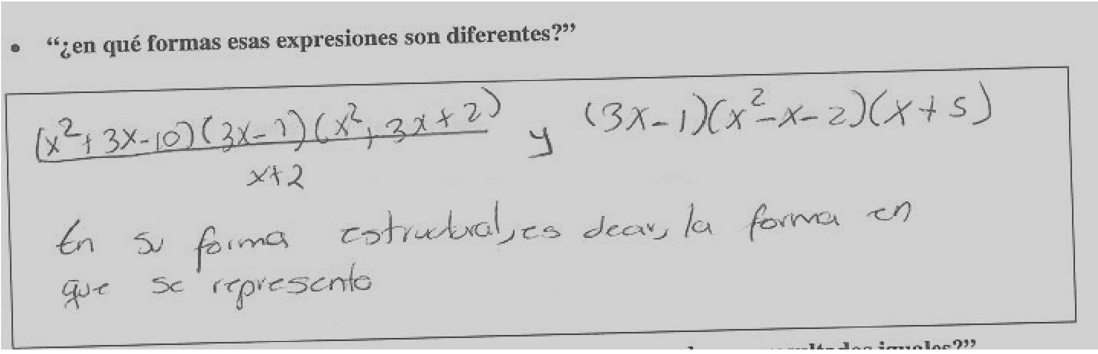
¿En qué formas esas expresiones son diferentes?

Esta pregunta se refiere a la forma en que están escritas los dos pares de expresiones que arrojaron valores iguales, lo que se hizo con el fin de obtener una visión más amplia en los estudiantes sobre la noción de equivalencia entre las expresiones.

En la siguiente figura se presenta una de las 10 respuestas. En ésta podemos observar que, para el estudiante, la forma en que están escritas las expresiones es diferente.

---

[7] En esta opción, el estudiante puede retomar sus ejercicios en su formulación final y apelar al Sistematizador de Respuestas (también denominado “magnetoscopio” o revisor de resoluciones) para revisar el detalle de sus acciones. El docente también puede hacerlo para evaluar el trabajo de los estudiantes (Manual de usuario, p.9).



• “¿en qué formas esas expresiones son diferentes?”

$\frac{(x^2+3x-10)(3x-1)(x^2+3x+2)}{x+2}$ y $(3x-1)(x^2-x-2)(x+5)$

En su forma estructural, es decir, la forma en que se representa

Figura 4.2.10. Respuesta de un estudiante con respecto a la diferencia entre las expresiones.

Otros diez estudiantes indicaron que unas expresiones están más desarrolladas que otras. Seis dijeron que es en la forma en que están acomodados los términos de las expresiones.

En relación a esta pregunta y a las respuestas dadas por los estudiantes, Ball, Pierce y Stacey (2003a) indican que la capacidad de reconocer expresiones algebraicas equivalentes de manera rápida y con confianza es importante para hacer matemáticas en una asociación inteligente con un álgebra computarizada, pues además, también es un aspecto clave de lo que ellos llamaron “expectativa algebraica”, debido a que la habilidad algebraica es paralela al cálculo numérico. Los resultados encontrados por Ball, Pierce y Stacey (2003) en su estudio, demuestran que el reconocimiento de la equivalencia algebraica, incluso en casos sencillos, es un obstáculo importante para los estudiantes.

En la sesión posterior a esta actividad se fomentó la discusión en torno a las respuestas que dieron los propios estudiantes. Los estudiantes polemizaron acerca de cuáles pares de expresiones producían resultados iguales. Cada grupo debatiente (conformado por integrantes que obtuvieron los mismos resultados) defendió sus conjeturas, argumentando sus opiniones y justificaciones. Alejandro, uno de los estudiantes, sostuvo que las expresiones 1 y 4 y 3 y 5 producen resultados iguales. Mostró a todo el grupo (mediante el uso de un cañón y una computadora) las estrategias que utilizó con el CAS Aplusix para llegar a esta conjetura.

Los estudiantes que no obtuvieron los mismos valores para cada par de expresiones observaron las estrategias de transformación que utilizo Alejandro.

Escucharon atentamente la explicación de cada paso realizado para llegar al resultado final. A partir de esta exposición cada estudiante observo, sin corregir sus hojas de trabajo y pudo detectar sus errores (aún cuando ellos están consientes de que hay diferentes caminos para obtener el resultado final).

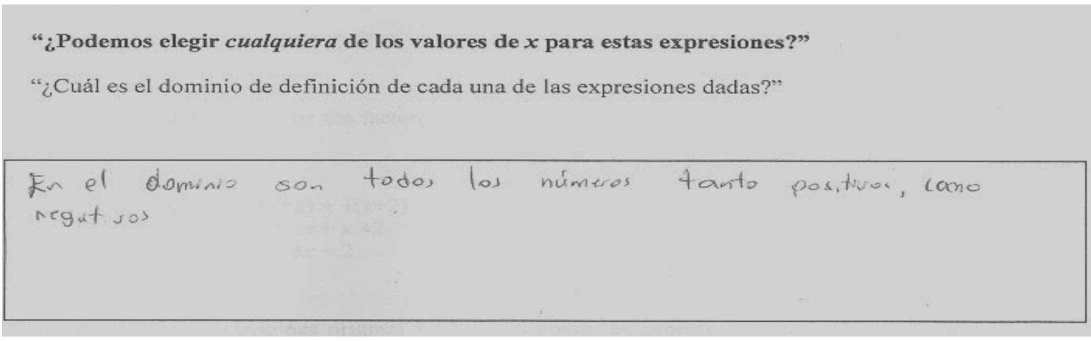
Una vez que los estudiantes analizaron, reflexionaron y conjeturaron sobre los cuestionamientos anteriores, se llegó al consenso de que las expresiones 1 y 4 y 3 y 5 producen valores iguales de salida (al menos para los valores propuestos de *x* =1/3 y -5, ningún estudiante propuso el valor de x= -2).

A partir de estas conjeturas los estudiantes continuaron y respondieron las siguientes preguntas:

¿Podemos elegir cualquiera de los valores de x para estas expresiones?, ¿Cuál es el dominio de definición de cada una de las expresiones dadas?

Las mencionadas preguntas son parte aún de la Actividad I (ver anexo I). Refiere el conjunto de valores posibles que puede tomar *x* en cada par de expresiones y que garantiza la equivalencia entre estas.

La figura 4.2.11. ejemplifica el tipo de respuesta proporcionada por uno de los estudiantes con respecto al dominio de definición para cada expresión.


"¿Podemos elegir *cualquiera* de los valores de *x* para estas expresiones?"

"¿Cuál es el dominio de definición de cada una de las expresiones dadas?"

En el dominio son todos los números tanto positivos, como negativos

Figura 4.2.11. Respuesta de un estudiante acerca del dominio de cada expresión.

Al realizar el análisis de las respuestas registradas por los estudiantes en las hojas de trabajo. Se pudo observar que los veintiséis estudiantes no consideraron la imposibilidad de probar todos los reemplazos numéricos posibles para determinar la equivalencia. Ellos especificaron que todos los números son admisibles para *x*. Así que, para ellos, cualquier valor numérico que se le asigne a *x* en cada par de expresiones (1 y 4 y 3 y 5) se obtendrá siempre el mismo resultado, por lo que conjeturaron que estas expresiones son equivalentes.

Como lo mencionan Kieran y Drijvers (2006), puede observarse cómo los estudiantes relacionan la equivalencia de dos expresiones algebraicas con lo numérico y, de cómo, esto refleja la idea de que: para todos los valores de entrada, valores de salida iguales. Lo que evoca en los estudiantes la noción de equivalencia basada en la igualdad numérica. Parece que los conceptos aprendidos en secundaria les induce a hacer este tipo de generalizaciones.

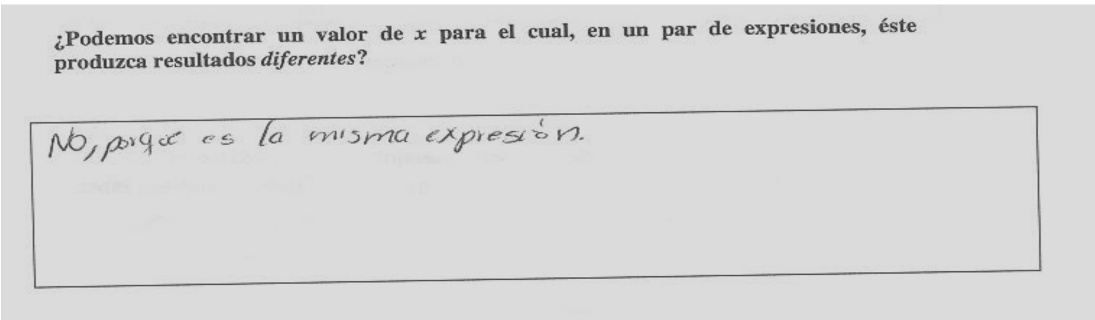
Como complemento del cuestionamiento anterior, se les pidió a los estudiantes contestar la siguiente pregunta (ver Anexo I), con la idea de hacer emerger, la reflexión sobre posibles restricciones en las expresiones.

¿Podemos encontrar un valor de x para el cual, en un par de expresiones, éste produzca resultados diferentes?

La respuesta de todos los estudiantes participantes fue siempre negativa. Tal parece que el problema radica en que la mayoría de ellos adquirió conocimientos matemáticos de una forma memorística; por ello, no siempre comprenden lo que hacen; repiten de manera mecánica un proceso estereotipado.

Los alumnos aún en este punto continúan con la creencia de que su conjetura es correcta (para valores de entrada, valores de salida iguales), simplemente por el hecho de haber seguido un procedimiento y observar un cierto patrón entre las expresiones. Situación falsa.

A continuación insertamos un ejemplo de la respuesta de los estudiantes sobre posibles restricciones en las expresiones.



¿Podemos encontrar un valor de *x* para el cual, en un par de expresiones, éste produzca resultados *diferentes*?

No, porque es la misma expresión.

Figura 4.2.12. Ejemplo de la respuesta que dio uno de los 26 estudiantes, sobre una posible restricción en las expresiones.

Más adelante, cuando se propuso a los estudiantes sustituir el valor de x= -2, se demostró que la sustitución numérica no siempre es suficiente y contundente para comprobar la equivalencia de expresiones.

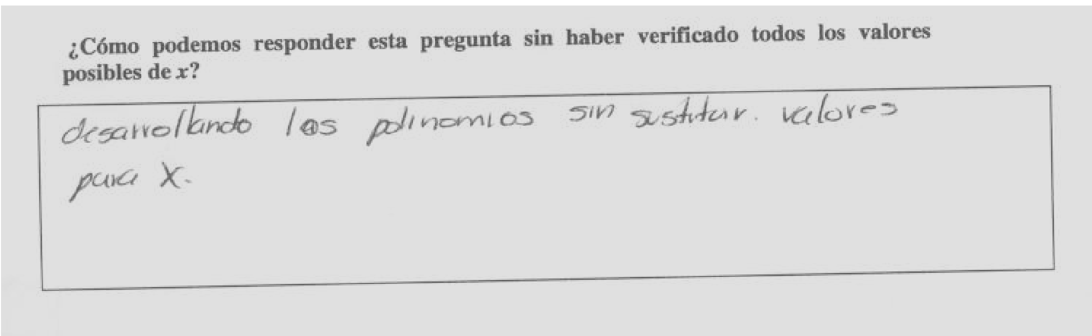
Otra de las preguntas formuladas a los estudiantes, es la que se refiere a la imposibilidad de poder verificar todos los valores admisibles para x en cada expresión y que a continuación presentamos (ver anexo I).

¿Cómo podemos responder esta pregunta sin haber verificado todos los valores?

Kieran y Drijvers (2006) indican que esta pregunta fue diseñada para motivar el uso de propiedades y de métodos algebraicos para verificar la equivalencia de expresiones.

En torno a las respuestas obtenidas de esta pregunta podemos destacar que los estudiantes respondieron que es posible realizar transformaciones algebraicas para verificar los valores admisibles de x en las expresiones, esto es, sugirieron desarrollar las expresiones (polinomios) sin sustituir valores para x, con el fin de simplificar y despejar la incógnita (x) en las expresiones para encontrar sus soluciones. De esta manera se podría obtener los valores admisibles para cada par de expresiones, lo que permitiría eliminar la necesidad de demostrar la igualdad para todos los valores de x por la evaluación exhaustiva y la comparación.

La figura 4.2.13. presenta un ejemplo de las respuestas dadas por los estudiantes a la pregunta sobre la verificación de todos los valores posibles que puede tomar x.


¿Cómo podemos responder esta pregunta sin haber verificado todos los valores posibles de x?

desarrollando los polinomios sin sustituir. valores para X.

Figura 4.2.13. Respuesta de un estudiante sobre la verificación de todos los valores posibles que puede tomar x.

En la última sección de las hojas de trabajo de esta actividad I (p.6, anexo I) se les presentó a los estudiantes el caso particular de la siguiente expresión algebraica:

$$(x + 1)(x +2) = x(x+2) + 1(x+2)$$

Esta expresión algebraica fue desarrollada y llevada a una forma escrita diferente mediante la aplicación de reglas algebraicas. En este proceso los estudiantes pudieron observar que las expresiones original y final (así como las expresiones intermedias) tienen formas diferentes.

Posteriormente, se pidió a los participantes elegir cualquier valor numérico para *x* y sustituirlo en cualquiera de las cuatro expresiones producidas y observar lo que sucedía. Luego que se realizó lo anterior, los estudiantes respondieron al siguiente cuestionamiento (ver anexo I):

¿Qué se observa? ¿Por qué sucede que todas esas expresiones diferentes producen el mismo valor numérico, cuando x es reemplazado por un número cualquiera?

Las respuestas obtenidas en este cuestionamiento fueron las mismas. Cada estudiante escribió en las hojas de trabajo que se obtiene el mismo valor numérico, debido a que estas expresiones solo están escritas de diferente manera, es decir están simplificadas o desarrolladas, pero siguen siendo la misma expresión.

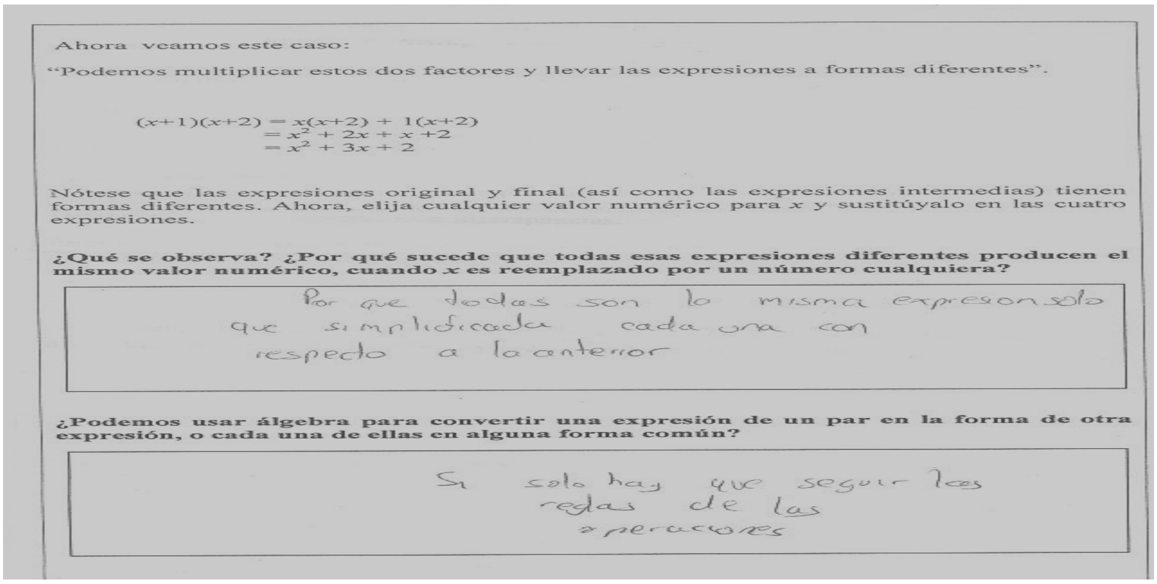
Con el propósito de continuar con la reflexión sobre las conjeturas hechas por los estudiantes e introducirlos a la siguiente actividad, en parte final de la actividad I se planteo esta pregunta:

¿Podemos usar álgebra para convertir una expresión de un par en la forma de otra expresión, o cada una de ellas en alguna forma común?

Kieran y Drijvers (2006) mencionan que cuando el estudiante tiene dificultades para determinar la equivalencia mediante la sustitución de valores en la expresión algebraica, relaciona la noción de equivalencia algebraica con una forma algebraica similar o común.

Por su parte, Saldanha y Kieran (2005) señalan que en el razonamiento sobre las expresiones algebraicas, la forma común juega un papel importante, ya que permite que los estudiantes averigüen si las expresiones dadas son equivalentes. Esta idea de expresiones, que tienen una forma común, cuando se entiende bien y es usada correctamente, juega un papel significativo y positivo en las capacidades de los estudiantes para evaluar la equivalencia de expresiones. Sin embargo, mencionan que la idea de la forma común resulta ser algo problemático en dos sentidos: Primero, porque algunos de los estudiantes consideran la forma común como una forma básica y simplificada, aún la "más simple". Así, algunos consideran que la forma de descomponer en factores es común también. Segundo, porque la complicación resulta desde un principio en la noción de la forma común. Si "*común*" es tomado como "*básico*", entonces una expresión algebraica sí puede tener algunas formas comunes: una descompuesta en factores y otra desarrollada, en lugar de la idea de dos expresiones que están expresadas en una forma común.

En la siguiente figura 4.2.14. se observa cómo los estudiantes relacionan el concepto de forma común con una forma simplificada o desarrollada de las expresiones.



Ahora veamos este caso:

"Podemos multiplicar estos dos factores y llevar las expresiones a formas diferentes".

$$\begin{aligned}(x+1)(x+2) &= x(x+2) + 1(x+2)\\ &= x^2 + 2x + x + 2\\ &= x^2 + 3x + 2\end{aligned}$$

Nótese que las expresiones original y final (así como las expresiones intermedias) tienen formas diferentes. Ahora, elija cualquier valor numérico para x y sustitúyalo en las cuatro expresiones.

¿Qué se observa? ¿Por qué sucede que todas esas expresiones diferentes producen el mismo valor numérico, cuando x es reemplazado por un número cualquiera?

Por que todas son la misma expreson solo que simplificada cada una con respecdo a la anterior

¿Podemos usar álgebra para convertir una expresión de un par en la forma de otra expresión, o cada una de ellas en alguna forma común?

Si solo hay que seguir las reglas de las operaciones

Cuadro 4.2.14. Respuesta de un estudiante sobre la forma común de las expresiones.

A continuación se presenta una breve descripción de un caso particular: El "caso Pati", mismo que se dio de manera espontánea durante la realización de este estudio exploratorio. Se describen algunas partes de lo sucedido con Patricia de 3º de secundaria, grupo 3º B, de la misma escuela, quien a petición propia quiso participar en las actividades de este trabajo de tesis. Cabe mencionar que las actividades en este caso se realizaron en el salón de clases (vacío), mediante el uso de una Laptop con el CAS Aplusix.

4.2.2. El caso de una estudiante de 3º de secundaria de desempeño alto (Pati)

Antecedentes de la estudiante: Pati tiene 15 años de edad, cursa el tercer año de secundaria (anteriormente fue alumna de quien escribe esto). Su desempeño en la materia de matemáticas, comparado con el de sus compañeros, siempre fue alto, por tanto, casi no requirió del apoyo del profesor en la resolución de las actividades del experimento.

Análisis del caso Pati: En el marco del aprendizaje de la noción de equivalencia entre expresiones algebraicas, el profesor (aplicador) le propuso a Pati resolver la actividad I, referente a la comparación de expresiones, mediante evaluación numérica con el uso del CAS Aplusix (en sólo dos sesiones se le dio a Pati una explicación sobre el uso y manejo del CAS). Durante la realización de las actividades se mantuvo un diálogo constante con Pati. Se le cuestionó sobre las estrategias utilizadas en los dos ambientes (papel y lápiz y con CAS) para conocer con mayor profundidad su pensamiento algebraico. En el desarrollo de la actividad I, Pati no encontró dificultades. Lo mismo ocurrió cuando trabajó en la sustitución y simplificación de las expresiones para obtener los valores numéricos. Ella obtuvo valores iguales para los dos pares de expresiones (1 y 4 y 3 y 5) aún cuando extendió los valores de x.

Se observó que Pati tiene un buen manejo de las transformaciones algebraicas tanto en las actividades con papel y lápiz como con el CAS. Así lo demuestran los datos registrados por ella en las hojas de trabajo. Cabe señalar que la estudiante no había tenido un acercamiento previo con la noción de equivalencia algebraica al menos no de manera explícita. A continuación presentamos la transcripción de un fragmento del dialogo sostenido entre el Profesor y Pati durante el desarrollo de la Actividad I.

E: Entrevistador

P: Patricia (Pati)

E: ¿Obtuviste el mismo valor numérico en varias expresiones?

P: Sí.

E: ¿Eso es lo que registras en tu hoja de datos?

P: Sí.

E: Y eso qué quiere decir, ¿qué las dos expresiones son la misma?

P: Ajá [mueve la cabeza para indicar que sí, mientras continúa con las transformaciones de las expresiones en el CAS].

E: ¿Y por qué crees que sean… que están escritas de diferente forma?

P: Porque están más desarrolladas unas que las otras, están más simplificadas

E: ¿Están mal desarrolladas?

P: Más desarrolladas.

E: ¿Es decir tienen otra forma?

P: Sí.

E: ¿Y qué piensas de la retroalimentación (validación) que indica el CAS, del proceso que tú estás siguiendo?, por ejemplo, cuando indica dos líneas paralelas en negro, azul y rojo entre los procesos que tú estás haciendo entre cada etapa ¿No?

P: Bueno, te ayuda, ya que en papel no sabes si las respuestas están bien o mal y aquí sí indica si estás bien en las etapas.

E: ¿Crees que con papel y lápiz podrías validar tus respuestas?

P: Sí.

E: ¿Cómo las validarías?

P: Pues aquí en el CAS observas las etapas y si indica las líneas en rojo te regresas

E: ¿A la etapa anterior?

P: Sí.

E: ¿Y si lo estuvieras haciendo en papel y lápiz?

P: En ese caso no puedes saber hasta que no termines de despejar la incógnita y sustituyas el resultado.

E: Cuando tú comparas dos expresiones que están escritas de diferente forma ¿cómo compruebas que éstas son iguales?
P: Desarrollando una de las dos.
E: ¿Y crees que esas dos expresiones, que tú ahora encuentras que son iguales (señalo la hoja de datos), sigan siendo iguales si tú aumentas los valores de *x*?
P: Sí.
E: ¿Por qué lo crees?
P: Porque… el resultado… bueno la… la ecuación que me dan es una constante.
E: ¿Es una constante?
P: Ajá, es una constante que es… aquí (señala la pantalla de Aplusix donde está escrita la expresión # 3) yo le estoy asignando unos valores, en cualquier lugar que yo lo sustituya de la ecuación siempre me va a dar el mismo resultado.
E: ¿Aunque estén escritas de diferente forma?
P: Sí.
E: ¿En cuáles expresiones obtuviste valores iguales?
P: En la Exp.#1 y la Exp #4, también en la Exp. #3 y la Exp. #5.
E: ¿Crees que todas las expresiones se puedan escribir de manera diferente? Por ejemplo, si dos expresiones se desarrollan de manera diferente ¿se podrá siempre obtener el mismo resultado?
P: Sí.
E: ¿Por qué?
P: Porque sigue siendo la misma expresión solo alteras el orden de los factores… o la simplificas.
E: ¿Qué puedes conjeturar respecto de lo que sucede si aumentas los valores de la tabla e incluyes otros valores de *x*?
P: Que se obtiene el mismo valor numérico
E: ¿Para cualquier valor?
P: Sí.

Como puede apreciarse, Pati tiene cierto conocimiento de la noción de equivalencia. Sin embargo, conforme avanzaba con el desarrollo de las actividades comenzó a dudar sobre el uso correcto del término equivalencia o igualdad.

En la última sección de las hojas de trabajo de esta actividad I (p. 6, anexo I) se presentó el caso particular de la siguiente expresión algebraica, misma que fue llevada a una forma escrita diferente mediante la aplicación de reglas algebraicas.

$$(x + 1)(x + 2) = x(x+2) + 1(x+2)$$

Recordemos que se pidió observar las expresiones generadas y elegir un valor numérico para *x* y sustituirlo en varias de éstas para saber lo que sucedía.

En esta sección Pati conjeturó, aún sin realizar cálculos, que se obtendría el mismo valor numérico al sustituir un valor numérico en cualquiera de las expresiones, generado dentro del encadenamiento algebraico de la expresión. Sin embargo, aún cuando ella tiene esta visión general de las expresiones, no fue capaz de observar la restricción que existe para la expresión 5 cuando $x = -2$ y que restringe la equivalencia de las expresiones 3 y 5.

En la siguiente figura se ve a Pati en el salón de clases en el momento de resolver la Actividad I con el uso del CAS.

Figura 4.2.15. Pati en el momento de resolver la Actividad I con el CAS (Aplusix) en el salón de clases.

A partir del análisis de los datos obtenidos en este caso, diremos que, de acuerdo con la categorización aplicada en este estudio, retomada y adaptada por Iranzo y Fortuny (2009), los grados de instrumentación e instrumentalización que desarrolló Pati son altos.

En la figura que a continuación se presenta se muestran los datos obtenidos y registrados por Pati en la tabla de la Actividad I.

Nombre: Elizondo Lozano Ana Patricia.
Fecha:

Actividad 1: Expresiones equivalentes

Lección 1

Parte I (con CAS): Comparación de expresiones mediante evaluación numérica

(A) **Trabajo individual (suponiendo habilidades precedentes)**

La tabla de abajo muestra cinco expresiones algebraicas y dos valores posibles para x.

a) Usando los dos valores dados de x (i.e., 1/3 y −5) y otros dos de su propia elección, calcule los valores que resultan para cada expresión por medio de las herramientas de evaluación del software Aplusix II.
b) Registra el valor de tu elección para los valores adicionales de x en la fila superior de la tabla, y escribe los resultados de tus cálculos en las celdas apropiadas, las cuales se muestran abajo.

Para x =	1/3	-5	4	−7
Expresión	Resultado	Resultado	Resultado	Resultado
1. $(x-3)(4x-3)$	$\frac{40}{9}$	184	13	310
2. $(x^2+x-20)(3x^2+2x-1)$	0	0	0	3124
3. $\frac{(x^2+3x-10)(3x-1)(x^2+3x+2)}{(x+2)}$	0	0	990	2376
4. $(-x+3)^2+x(3x-9)$	$-\frac{40}{9}$	184	13	310
5. $(3x-1)(x^2-x-2)(x+5)$	0	0	990	2376

Figura 4.2.16. Datos registrados por Pati sobre la sustitución numérica.

Más adelante dentro del análisis de las otras actividades (II a V) se mencionan algunos resultados obtenidos en “El caso Pati”.

1 Para concluir el análisis de la actividad I presentamos una síntesis de los rasgos que consideramos representativos en el desarrollo de esta Actividad.

El uso del CAS (Aplusix) ayudó a superar el obstáculo que representa la carencia de significado y captación de atención en los estudiantes. Se ve claramente la influencia de las herramientas proporcionadas (validación) por el CAS en la construcción de competencias en álgebra.

Durante la realización de las acciones de la actividad I, los estudiantes desarrollaron libremente sus cálculos, paso a paso en los rectángulos que contienen las expresiones. Estos pasos siempre fueron validados por el CAS que calculaba la equivalencia entre las expresiones.

Las posibilidades (simplificación de operaciones aritméticas) y restricciones del CAS (por ejemplo, restricción de simplificación en los cálculos cuando interviene una variable, no simplificar fracciones, no identificar restricciones, etc.) influyeron en las estrategias de resolución de los estudiantes, así como en las correspondientes concepciones emergentes (la noción de forma común).

En este estudio, el CAS permitió que el estudiante tuviera absoluto control al realizar sus cálculos y transformaciones algebraicas.

Dado que el CAS validó las transformaciones realizadas, representó para los estudiantes una herramienta de gran ayuda, pues entendieron la equivalencia entre las expresiones generadas. Este entendimiento es de suma importancia en los procesos algebraicos (desarrollo, resolución y simplificación de expresiones, etc.) donde en todo momento el estudiante realiza transformaciones.

Tanto las actividades como el conocimiento del alumno guiaron la forma en que se utilizó el CAS durante el desarrollo de esta actividad.

4.3. Actividad II: Comparación de expresiones mediante manipulación algebraica

El diseño de esta actividad, según Kieran y Drijvers (2006), apuntó al desarrollo de la noción de equivalencia de una forma común. Las preguntas de reflexión guiaron la identificación de expresiones equivalentes, incluyendo una justificación y la consideración de restricciones posibles.

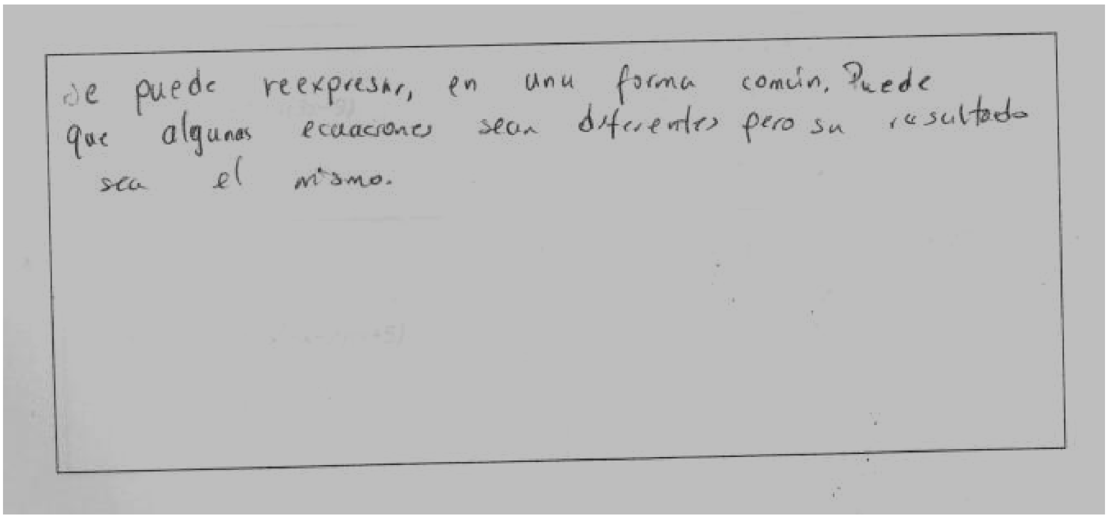
Al inicio de esta Actividad II, tomando en cuenta las observaciones obtenidas en la actividad I y a las discusiones subsiguientes en clase (ver Anexo I), se pidió a los estudiantes que conjeturaran si las expresiones anteriores podrían ser o no re-expresadas en una forma común.

¿Es posible establecer una conjetura, respecto de que las expresiones anteriores dadas pueden, en efecto, ser re-expresadas en una forma común?

En general, las respuestas de los estudiantes refieren que sí se pueden expresar en una forma común todas las expresiones, aún cuando son muy diferentes. No obstante, no argumentaron la razón de su conjetura.

Algunos estudiantes sólo registraron que al desarrollar cada par de las expresiones el resultado de ambas será el mismo.

En estas respuestas se observa que continúan usando la noción de equivalencia como algo numérico y no han reflexionado sobre la forma común algebraica tal como se ve en la siguiente figura.



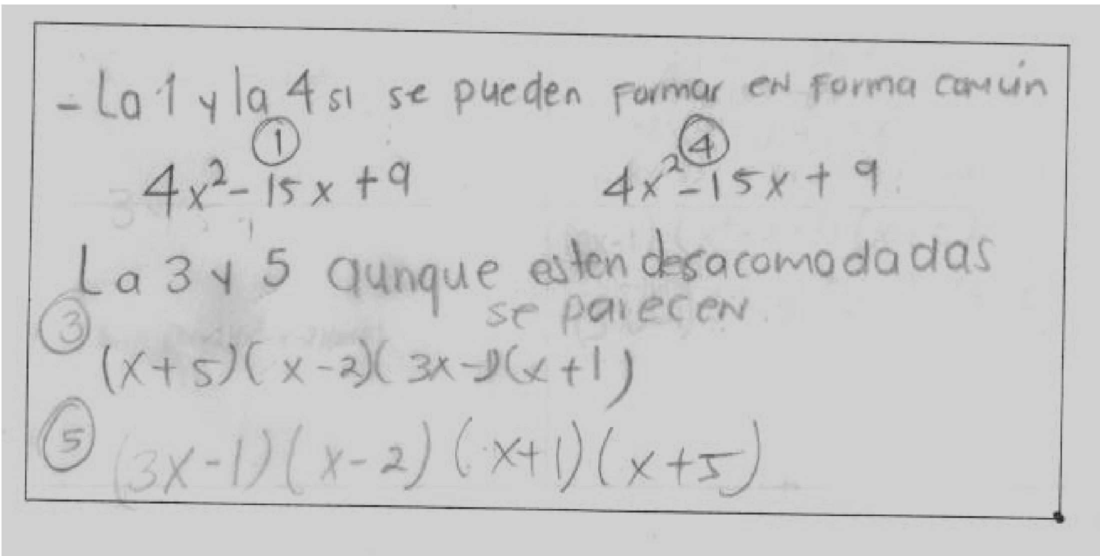
se puede reexpresar, en una forma común, Puede que algunas ecuaciones sean diferentes pero su resultado sea el mismo.

Figura 4.3.2. Respuesta de un alumno dada a la pregunta acerca de poder re-expresar en una forma común las expresiones.

Mientras que en figura siguiente se presenta la respuesta de Pati a esta misma pregunta:

¿Es posible establecer una conjetura, respecto de que las expresiones anteriores dadas pueden, en efecto, ser re-expresadas en una forma común?

Se puede observar, en su respuesta, como ella visualiza una forma común algebraica para cada par de expresiones.



- La 1 y la 4 si se pueden formar en forma común

1. $4x^2-15x+9$ 4. $4x^2-15x+9$

La 3 y 5 aunque esten desacomodadas se parecen

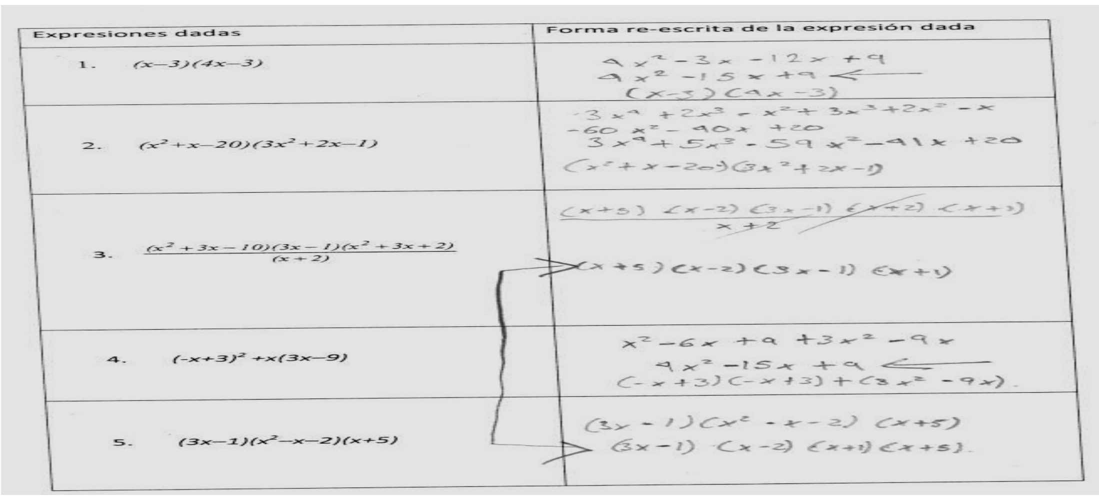
3. $(x+5)(x-2)(3x-1)(x+1)$

5. $(3x-1)(x-2)(x+1)(x+5)$

Figura 4.3.3. Respuesta de Pati a poder re-expresar las expresiones a una forma común.

Tras haber contestado la pregunta anterior, los estudiantes verificaron su conjetura con la realización de transformaciones algebraicas con papel y lápiz para re-escribir las expresiones dadas en otra forma (no necesariamente en forma desarrollada). Ellos trabajaron para re-expresar las expresiones en una forma común, sus transformaciones fueron registradas en las hojas de trabajo.

A continuación se exhibe el registro de las transformaciones algebraicas desarrolladas por Pati en esta actividad.



Expresiones dadas	Forma re-escrita de la expresión dada
1. $(x-3)(4x-3)$	$4x^2-3x-12x+9$ $4x^2-15x+9$ $(x-3)(4x-3)$
2. $(x^2+x-20)(3x^2+2x-1)$	$3x^4+2x^3-x^2+3x^3+2x^2-x-60x^2-40x+20$ $3x^4+5x^3-59x^2-41x+20$ $(x^2+x-20)(3x^2+2x-1)$
3. $\frac{(x^2+3x-10)(3x-1)(x^2+3x+2)}{(x+2)}$	$\frac{(x+5)(x-2)(3x-1)\cancel{(x+2)}(x+1)}{\cancel{x+2}}$ $(x+5)(x-2)(3x-1)(x+1)$
4. $(-x+3)^2+x(3x-9)$	$x^2-6x+9+3x^2-9x$ $4x^2-15x+9$ $(-x+3)(-x+3)+(3x^2-9x)$
5. $(3x-1)(x^2-x-2)(x+5)$	$(3x-1)(x^2-x-2)(x+5)$ $(3x-1)(x-2)(x+1)(x+5)$

Figura 4.3.4. Registros de Pati al trabajar con papel y lápiz para transformar las expresiones a una forma común.

Observemos que Pati aplica sus estrategias algebraicas en las transformaciones y logra identificar una forma común para las expresiones 1 y 4 y 3 y 5. Se corrobora así que Pati es una estudiante experta en la manipulación simbólica.

En la siguiente figura podemos observar otro tipo de estrategias utilizadas por otro estudiante. También se aprecian las dificultades que tiene cuando re-expresa las expresiones a una forma común.

Expresiones dadas	Forma re-escrita de la expresión dada
1. $(x-3)(4x-3)$	$4x^2 - 3x - 12x + 9$ $4x^2 - 15x + 9$
2. $(x^2+x-20)(3x^2+2x-1)$	$3x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x^3 + 2x^2 +$ $-60x^2 - 40x + 20$ $3x^4 + 5x^3 - 59x^2 - 41x + 20$
3. $\dfrac{(x^2+3x-10)(3x-1)(x^2+3x+2)}{(x+2)}$	
4. $(-x+3)^2 + x(3x-9)$	$-x^2+3)^2 + x(3x-4)$ $x^2 - 6x + 9 + 3x^2 - 9x$ $(x+3)(-x+3) + x(5x-9)$
5. $(3x-1)(x^2-x-2)(x+5)$	$(3x-1)(x-2)(x+1)(x+5)$

Figura 4.3.5. Registros de uno de los estudiantes al trabajar con papel y lápiz para transformar las expresiones a una forma común.

Durante la sesión de discusión (posterior al desarrollo de esta actividad) (Alejandro) solicitó pasar al pizarrón para transformar las expresiones 1,2 y 4 a una forma común, con el propósito de mostrar a sus compañeros sus estrategias. En la fotografía se ve a Alejandro.

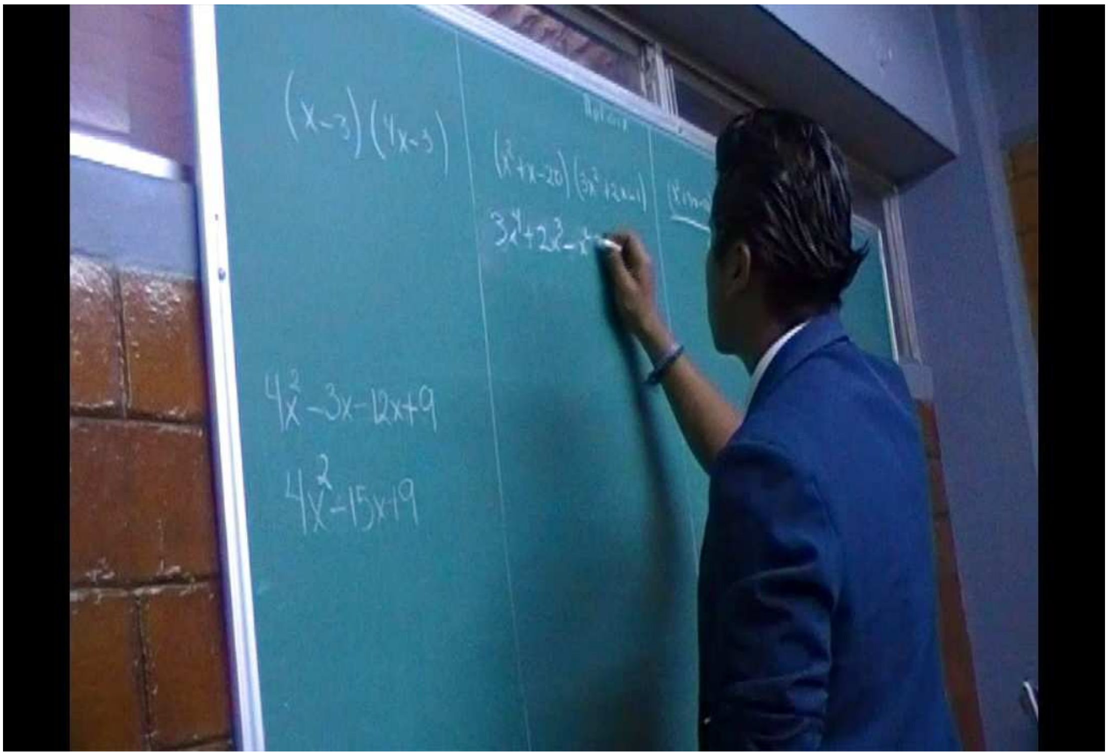


Figura 4.3.6. Alejandro realizando la transformación de las expresiones 1,2 y 4 a una forma común en el pizarrón del salón de clases.

El análisis de los datos obtenidos de la actividad II no fue completada por todos los estudiantes, debido a dificultades teóricas y a la falta de confianza para validar sus transformaciones y resultados.

Al trabajar con el método tradicional de papel y lápiz, es claro que la simplificación automática como tal no existe. Además, se requiere la capacidad de los estudiantes para visualizar, a escala global, las expresiones para ver qué maniobras de simplificación o transformación son posibles (por ejemplo, la agrupación de términos semejantes o la cancelación de factores comunes) para llevar a una forma común las expresiones y así determinar la equivalencia entre ellas. Observamos que pocos estudiantes completaron el desarrollo y transformación de las expresiones para llevarlas a una forma común.

Con este método tradicional de papel y lápiz el estudiante requiere en todo momento de la ayuda del profesor para validar sus transformaciones y resultados.

Chaachoua, Nicaud, Bronner y *Bouhineau (2004)* mencionan que los alumnos con problemas de conocimientos algebraicos pierden la motivación rapidamente y el profesor invierte demasiado tiempo identificando y corrigiendo los errores de los estudiantes.

En esta Actividad II realizada con papel y lápiz se observó que la mayoría de los estudiantes utilizaron nuevamente las estrategias de ampliar o desarrollar las expresiones y la minoría optó por descomponer en factores. Sin embargo, en su aplicación se presentaron una serie de obstáculos y dificultades que no fueron capaces de superar debido a que no recordaron los conocimientos previos.

Ball, Pierce y Stacey (2002) definen y analizan “la expectativa algebraica” en relación con algunos elementos: saber convenciones y propiedades básicas de las operaciones, capacidad para identificar la estructura y las características claves de las expresiones algebraicas. Los investigadores también consideran un punto clave dar más importancia a la expectativa algebraica, ya que están convencidos de que hay que proporcionar a los estudiantes una gama más amplia de formas y transformaciones algebraicas que los lleve por una dirección vital para el cambio y mejoramiento de estos procesos de enseñanza-aprendizaje.

4.4. Actividad III: Verificación de la equivalencia, mediante la re-escritura de la forma de una expresión algebraica dada, usando el CAS Aplusix

En esta Actividad III los estudiantes realizaron transformaciones algebraicas con el CAS Aplusix para re-escribir las expresiones y llevarlas a una forma común. Similar a la actividad I, los estudiantes usaron sus conocimientos algebraicos para identificar las formas equivalentes (o las formas no-equivalentes, cuando los errores se presentaron) rápidamente. Así, mostraron confianza en el seguimiento de las transformaciones algebraicas de las expresiones. La observación de esta actividad y los datos analizados demostraron que el descubrimiento de la operatividad del CAS es paulatino. En esta actividad los estudiantes casi no requirieron ayuda del profesor, a diferencia de la actividad anterior donde solicitaban, en todo momento, la ayuda del profesor. Se observaron mejoras significativas durante el desarrollo de esta actividad, el uso del teclado virtual del CAS se volvió cada vez más eficiente.

Como lo mencionan *Chaachoua, Nicaud, Bronner y Bouhineau (2004,)* la comparación entre una sesión con el CAS Aplusix y una con lápiz y papel demuestra la contundencia didáctica del CAS Aplusix, pues los estudiantes trabajaron con mayor motivación desde el inicio hasta el final de la sesión con una notoria autonomía y con mayor confianza. No dudaron en explorar y experimentar diferentes estrategias de transformación para la misma expresión, incluso compararon sus estrategias con las de otros compañeros, lo que propició la reflexión, en los estudiantes, en cuanto a que se pueden seguir diferentes caminos algebraicos para obtener al final la misma expresión algebraica. La posibilidad que ofreció el CAS de validar las transformaciones paso a paso, le permitió al estudiante trabajar en una dificultad a la vez.

En esta actividad el profesor sólo intervino con propuestas puntuales y estableció algunas sugerencias cuando se solicitó su ayuda. Cada estudiante trabajó a su ritmo, con autonomía y con la posibilidad de recibir una validación inmediata del CAS, en contraposición con la actividad anterior en donde se trabajó con papel y lápiz. De hecho, la utilización del CAS Aplusix hizo que, en algunas ocasiones, los estudiantes manifestaran emoción y entusiasmo con frases como: ¡ya entendí! y ¡así es más fácil!

Con el CAS Aplusix el estudiante se vio obligado a identificar sus errores y por consiguiente analizarlos y corregirlos. Caso contrario en la actividad con papel y lápiz donde la mayoría de los estudiantes dejó inconclusa la actividad.

Queremos poner énfasis en que una gran parte de los estudiantes mejoró sus competencias operativas y metodológicas, dado que hasta este momento su nivel de instrumentación e instrumentalización era del tipo procedimental (Iranzo y Fortuny, 2009).

En las siguientes figuras observamos las transformaciones algebraicas que Pati utilizó con el CAS para re-expresar las expresiones 3 y 5 a una forma común y, así, poder verificar la equivalencia de estas expresiones. También se observa el tipo de validación que proporciona el CAS (dos líneas rectas paralelas en color negro que indican la equivalencia entre las etapas) para validar las transformaciones algebraicas paso a paso y asegurar un desarrollo y resultado final correcto.

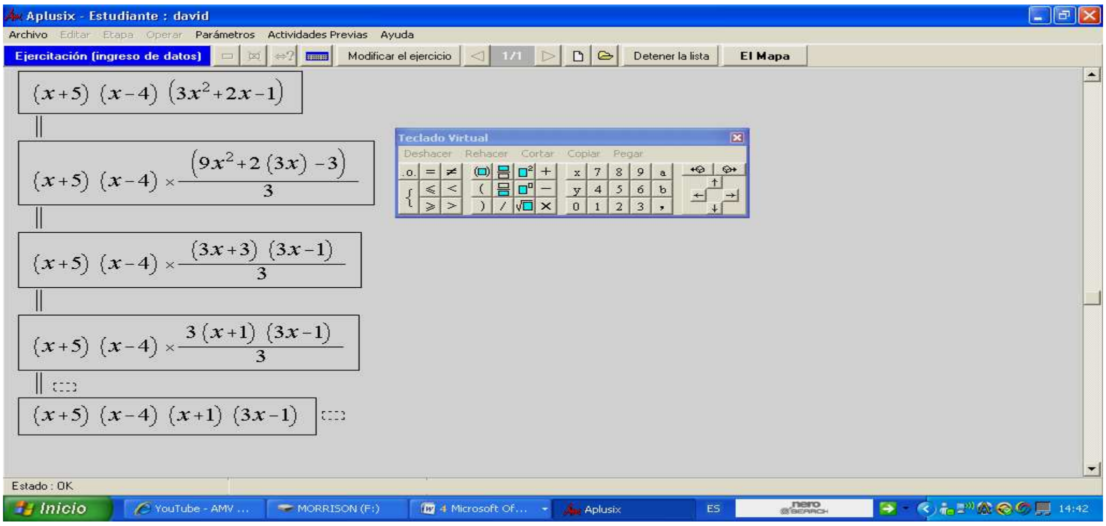


Figura 4.4.1. Transformaciones de Pati para re-expresar la Exp.3 a una forma común.

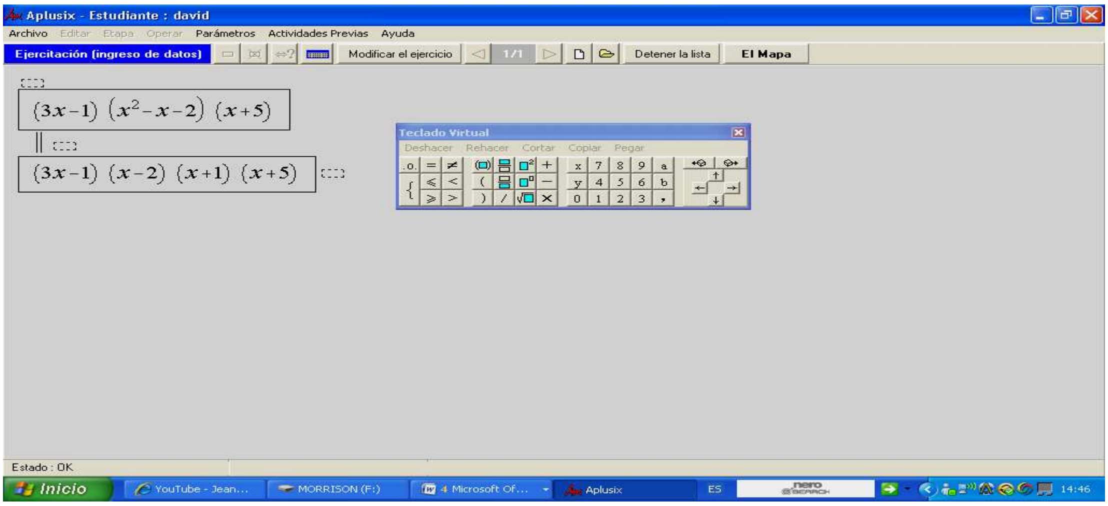


Figura 4.4.2. Transformaciones de Pati para re-expresar la expresión 5 a una forma común algebraica.

En la figura 4.4.3. se muestran las transformaciones algebraicas que efectuó otro estudiante para llevar las expresiones 1 y 4 a una forma común. Nuevamente se observa la validación que proporciona el CAS entre las transformaciones.

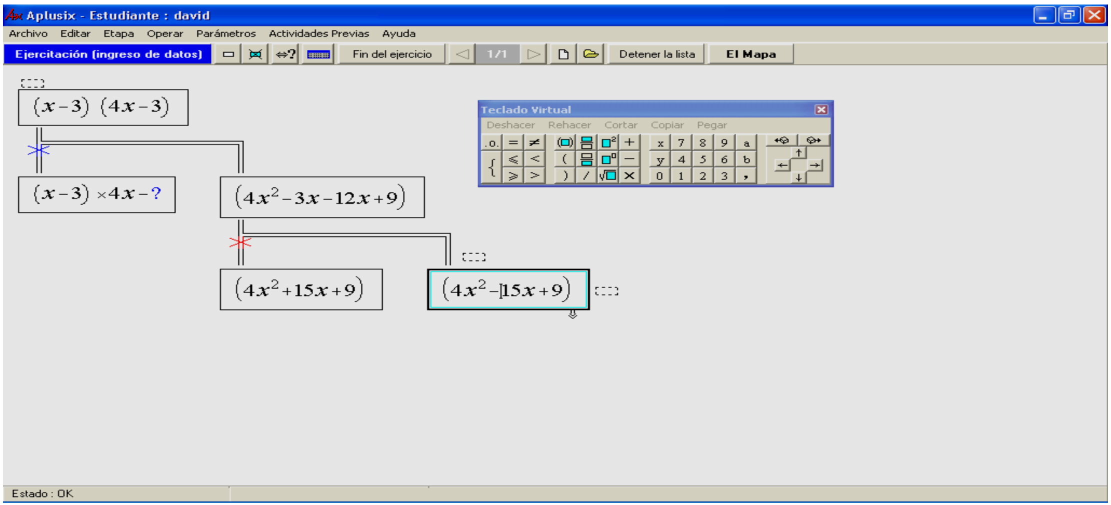


Figura 4.4.3. Transformaciones de uno de los estudiantes para re-expresar la expresión 1 a una forma común.

En esta figura se observa, en el primer paso, que el estudiante introduce la expresión dada (expresión 1). Luego duplica la etapa y borra algunos términos del paréntesis derecho. En ese momento el CAS le indica (dos líneas rectas en forma de cruz de color azul) que el proceso que se está desarrollando es indefinido o incompleto. El estudiante decide duplicar una nueva etapa, en la cual expande la expresión mediante el producto de los términos, el CAS ahora valida la equivalencia (dos líneas paralelas en negro) entre estas etapas (rectángulos). Posteriormente el estudiante vuelve a duplicar la etapa y simplifica la expresión sumando algebraicamente términos semejantes, el CAS ahora indica la no equivalencia (una vertical, en rojo y tachada significa que hay un error de equivalencia entre los dos rectángulos), debido a la colocación de un mal signo en la simplificación de los términos semejantes. El estudiante observa las etapas anteriores y visualiza un error, decide duplicar la etapa y corrige el signo; por esto, el CAS valida la correcta equivalencia entre las expresiones (un trazo negro doble entre dos expresiones significa que las dos expresiones son equivalentes).

En este caso podemos observar que el uso del CAS le permitió al estudiante desarrollarla expresión de forma más ordenada y formal (por etapas).

En la figura 4.3.5., que se presentó en la actividad II, notamos que el estudiante suele realizar sus transformaciones de forma desordenada, omite o se salta pasos algebraicos cuando trabaja con papel y lápiz. Lo anterior trae como consecuencia que no analice y reflexione sobre las expresiones que genera y que produzca errores a lo largo de las transformaciones y solución de las expresiones, lo que dificulta el entendimiento de la equivalencia algebraica.

En el caso presentado en la figura 4.4.3. puede verse que con el CAS Aplusix, el estudiante realiza sus propias transformaciones y cálculos, ya que al validar la equivalencia entre las expresiones generadas el CAS ayudó al estudiante a entender las relaciones algebraicas que existen entre las expresiones, así como a aprender a detectar y corregir sus errores.

Como mencionan Sfard (1991) y Harper (1987) la comprobación de la equivalencia es una importante retroalimentación. Sin embargo, el estudiante también necesita retroalimentación que le permita dar sentido a las expresiones de acuerdo con sus objetivos.

La barra de estado de Aplusix muestra parte del sentido: Grado de los factores, de expansión, de reducción; progresión en el proceso de resolución de la ecuación, etc. (ver figura 1.6.1. Síntesis esquemática de la Pantalla principal del CAS Aplusix).

Chaachoua, Nicaud, Bronner y *Bouhineau* (2004) señalan que el CAS Aplusix puede verse como un medio para la validación, en el sentido dado por Brousseau (1997), ya que el alumno puede saber si su respuesta es correcta o no, sin la intervención del profesor. Esto puede reducir el efecto del contrato didáctico donde los estudiantes tratan de adivinar el resultado esperado por el profesor cuando les pregunta para su validación.

4.5. Actividad IV: Verificación de la equivalencia, mediante el uso de la prueba de igualdad

El diseño de esta tarea, según Kieran y Drijvers (2006), promovió la reflexión de los estudiantes sobre las restricciones en las expresiones. Lo anterior a partir de la idea de lo que sucedería con estas expresiones si se ampliaran los valores de *x* además de los incluidos en la tabla. También en esta actividad hubo una serie de preguntas de reflexión para promover la discusión.

Para esta actividad se pidió a los estudiantes que observaran lo que sucedía cuando introducían en el CAS Aplusix dos expresiones: equivalentes y no equivalentes (ver Anexo I). Después de realizar una prueba de igualdad mediante el uso del CAS, los estudiantes registraron sus resultados y conjeturas en las hojas de trabajo. El CAS sirvió como herramienta para la validación de la equivalencia entre las expresiones dadas.

En el inciso (A) de las hojas de trabajo (ver anexo I) de esta Actividad IV, los estudiantes introdujeron directamente en la línea de entrada del CAS Aplusix la expresión 3. En el inciso (B) se pidió duplicar la etapa anterior e introducir la expresión formada por la expresión 5.

En la siguiente figura se presenta el resultado obtenido por un estudiante al introducir las expresiones 3 y 5 (ver Anexo I). El CAS valida la equivalencia entre las dos expresiones.

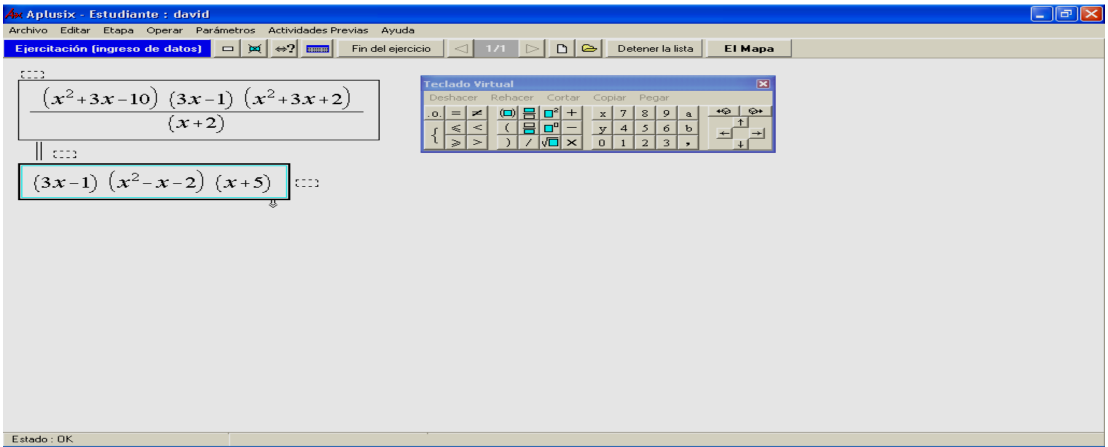


Figura 4.5.1. El CAS Aplusix valida (dos líneas paralelas en negro) la equivalencia entre las expresiones 3 y 5 sin indicar restricciones entre estas.

Una vez que los estudiantes realizaron lo anterior, contestaron la siguiente pregunta.

¿Qué muestra el CAS como resultado?

La totalidad de los estudiantes registró en sus hojas de trabajo que el CAS valida la equivalencia entre las expresiones 3 y 5 (dos líneas rectas en negro entre las expresiones validan la equivalencia).

Es necesario señalar que el CAS Aplusix no indica o muestra ningún tipo de retroalimentación a los estudiantes sobre la cuestión de las restricciones en las expresiones. Esta limitación debió obligar a los estudiantes a que cuidaran las restricciones. Kieran y Drijvers (2006) señalan que lo mismo pasa cuando se trabaja con papel y lápiz, pues no hay ninguna luz roja que los alerte. Por tanto los estudiantes deben ser capaces de detectar posibles restricciones en las expresiones. Mas, hasta este punto, los estudiantes continuaron sin observar las restricciones cuando x= -2 en la expresión 5. El hecho de que el CAS no muestre las restricciones es una limitación tecnológica que pasó inadvertida entre los estudiantes.

Posteriormente, los estudiantes continuaron con otra prueba de igualdad, usando el CAS Aplusix. Trabajaron las expresiones 2 y 5.

La figura 4.5.2. presenta el trabajo de un estudiante de la prueba de igualdad de las expresiones 2 y 5 con el CAS Aplusix. Se puede ver claramente la retroalimentación que proporciona el CAS sobre la validación de la no equivalencia.

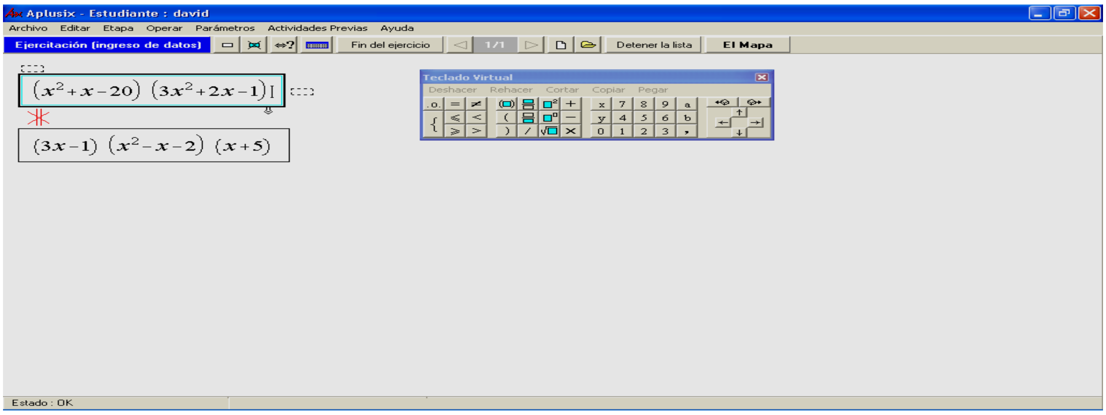


Figura 4.5.2. El CAS válida la no equivalencia entre las expresiones 2 y 5.

Obsérvese cómo el estudiante introduce en el CAS la expresión 2 en la primera línea de entrada y posteriormente duplica la etapa e introduce la expresión 5. Inmediatamente el CAS valida la no equivalencia entre las expresiones (una vertical, en rojo y tachada significa que no existe equivalencia entre los dos rectángulos).

De nuevo, se pidió a los estudiantes contestar la siguiente pregunta (ver anexo I): *¿Qué muestra el software como resultado?*

En este caso la respuesta de los estudiantes fue contundente, el CAS muestra la validación de la no equivalencia entre las expresiones (un trazo rojo doble tachado con una cruz significa que se tiene una relación de dos expresiones "no iguales"). Esta validación les proporcionó confianza y seguridad a los estudiantes para conjeturar que estas dos expresiones no son equivalentes.

Una vez que los estudiantes observaron y registraron sus conjeturas de lo sucedido en el CAS introdujeron las dos expresiones. En seguida se les pidió reemplazar x por el valor numérico de -2 en las expresiones precedentes e interpretar el resultado obtenido (ver anexo I).

Usa el CAS Aplusix para manipular algebraicamente y reemplazar x por -2 en las expresiones precedentes. Interpreta el procedimiento y el resultado mostrado.

Los estudiantes llevaron a cabo la sustitución de $x = -2$ en la expresión 3.

De veintisiete que participaron en las actividades (incluyendo a Pati), 21 estudiantes obtuvieron y registraron en sus hojas de trabajo un valor numérico de -84. Los seis estudiantes restantes continuaron con problemas aritméticos en la simplificación, ya que obtuvieron diversos valores numéricos. Luego sustituyeron el mismo valor de $x= -2$, pero ahora en la expresión 5.

Durante la realización de esta tarea sólo seis estudiantes se vieron inquietos, pues al duplicar la primera etapa donde sustituyeron el valor de x por -2 el CAS mostró la validación de la no-equivalencia entre las etapas. A pesar de eso, el profesor sólo se limitó a observar. Estos estudiantes revisaron y analizaron su proceso de sustitución algebraica una y otra vez, aunque no obtuvieron resultados en la identificación de algún error. Adjudicaron esta validación de no equivalencia debido a errores cometidos en las etapas y nunca consideraron que esta validación mostrada por el CAS Aplusix apuntaba a la indeterminación de la expresión 5. Tras revisar y analizar su procedimiento dejaron un momento el ejercicio. Enseguida, pensando en contrastar lo obtenido con el CAS Aplusix y la calculadora, optaron por realizar el cálculo de la simplificación aritmética con ayuda de su calculadora (científica).

Introdujeron en la calculadora las operaciones (aritméticas) para la obtención del valor numérico de la expresión 5. La calculadora les mostró “error”, lo cual les causó sorpresa e incertidumbre, puesto que no comprendían esta situación. Estos estudiantes le manifestaron al profesor que ellos esperaban obtener un valor numérico igual a cero. Esto fue un punto de partida para la discusión en clases.

Los otros veintiún estudiantes no tomaron en cuenta esta primera validación y continuaron con las transformaciones de simplificación. Después se enfrentaron a un problema: El CAS Aplusix les mostró la validación de la no equivalencia (un trazo azul doble con una cruz azul que significa que hay una expresión "inacabada" o "indefinida") en el momento que simplificaron el denominador (-2 + 2) de la expresión 5. La operación arrojó, como resultado, cero, lo cual esta relacionado con la indeterminación de la expresión, es decir, cuando se trata de realizar la operación de dividir un número entre cero. Sin embargo, los estudiantes registraron en sus hojas de trabajo que, en este caso, el resultado final obtenido al realizar toda la simplificación de la expresión fue cero.

Cabe decir que hasta este momento ningún estudiante (incluyendo a Pati) re-analizó y reflexionó sobre las conjeturas hechas anteriormente sobre la equivalencia entre las expresiones 3 y 5. Kieran y Drijvers (2006) argumentan que lo anterior nos deja ver que la cuestión de las restricciones en relación con la equivalencia no es fácil de comprender en los estudiantes.

En la figura 4.5.3. se presentan las transformaciones realizadas por un estudiante al sustituir el valor de x = -2 para la expresión 5, donde el CAS valida la no equivalencia entre las etapas de transformación.

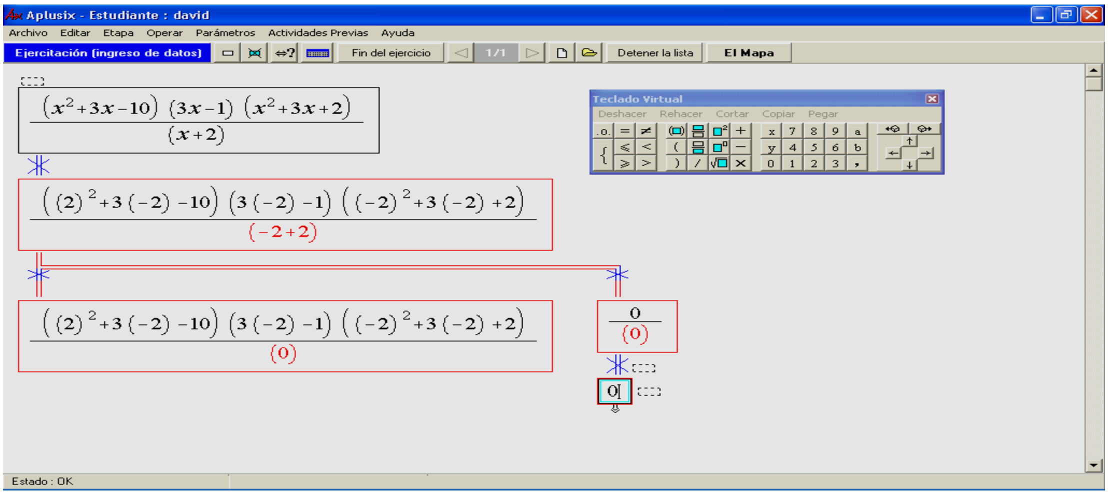


Figura 4.5.3. Sustitución algebraica de un estudiante para el valor de x= -2 en la expresión 5 donde el CAS valida la no equivalencia.

Apreciemos cómo el estudiante introdujo directamente la expresión 5 en la línea de entrada del CAS. Posteriormente duplicó la etapa y sustituyó el valor de *x* por -2, inmediatamente el CAS puso en color rojo el rectángulo y la operación (-2+2) que se encontraba en el denominador de la expresión e indicó dos líneas tachadas en azul que significan que existe una indeterminación. No obstante, los estudiantes percibieron esta validación como una indicación de la existencia de algún proceso inconcluso. El estudiante continúo duplicando la etapa y realizando la operación (-2+2) obteniendo como resultado cero y el CAS continúo indicando la no equivalencia. Inmediatamente realizó las operaciones de simplificación que se encontraban en el numerador de la expresión, de las cuales obtuvo nuevamente como resultado: cero. Entonces decidió duplicar la etapa y colocó la expresión (0/0). Finalmente colocó como resultado final un valor igual a cero, pero el CAS aún validó la no equivalencia. Sin embargo, el estudiante ignoró esta validación y concluyó esta tarea con ese resultado.

En la sesión siguiente el profesor retomó la polémica sobre el resultado correcto al realizar las operaciones aritméticas siguientes:

- cero entre cero (0/0)
- cero entre un número (0/a)
- un número entre cero (a/0)

Tras discutir y reflexionar los estudiantes llegaron a las siguientes conjeturas: cero entre cero resultará en una indeterminación, cero entre un número dará como resultado cero y por último un número entre cero es infinito. Cuando lo anterior estuvo claro para los estudiantes, espontáneamente uno comentó que entonces esto podría ser una restricción para que se cumpliera la equivalencia. Entonces el profesor le preguntó si en este caso también existía una posible restricción para que se hubiese dado la equivalencia entre las expresiones algebraicas dadas. Ante esto, todos dudaron y regresaron a analizar las expresiones algebraicas (de la 1 a la 5) para encontrar una posible restricción. A partir de ese momento, los estudiantes tomaron en cuenta la posibilidad de restricciones en las expresiones. Cuando verificaron las expresiones (1 y 4), dijeron que en este caso no había restricciones debido a que no existía un denominador, es decir ellos llegaron a la conjetura de que sólo existirá la posibilidad de restricciones cuando hubiese un cociente en alguna de las expresiones.

Al respecto, Kieran y Drijvers (2006) mencionan que la cuestión de las restricciones es un aspecto teórico importante de la noción de equivalencia. Esto conlleva tanto particularidades del modo en que el CAS trata con las restricciones, como una definición algo extraña (al menos posiblemente extraña a los ojos de los estudiantes) de equivalencia que implica un juego de valores admisibles. Estos investigadores también señalan que la definición de equivalencia, provista en los materiales de enseñanza, habla de tener un juego de valores admisibles. La cuestión de cómo tratar con las restricciones, tanto en el estudio de Kieran y Drijvers (2006) como en este estudio exploratorio, jugó un papel importante en la opinión algebraica de los estudiantes sobre lo que significa la equivalencia entre las expresiones algebraicas.

4.6. Actividad V: Verificación de la equivalencia, usando cualquiera de los métodos de CAS (Aplusix)

De acuerdo con Kieran y Drijvers (2006), esta actividad estuvo planteada de manera deliberada, y de forma relativamente abierta. Tuvo el propósito de obtener información de las “orientaciones naturales” de los estudiantes en este aspecto de la actividad. Particularmente cuando el método de sustitución numérica fue visto por los estudiantes como adecuado para determinar la equivalencia entre expresiones. Se pidió a los estudiantes determinar qué expresiones eran equivalentes. Se les dijo que podían usar cualquiera de los métodos del CAS e incluso papel y lápiz.

A continuación se presenta una serie de figuras que muestra el trabajo llevado a cabo por uno de los estudiantes; el desarrollo de la expresión 1 en el CAS Aplusix para llevarla a una forma común.

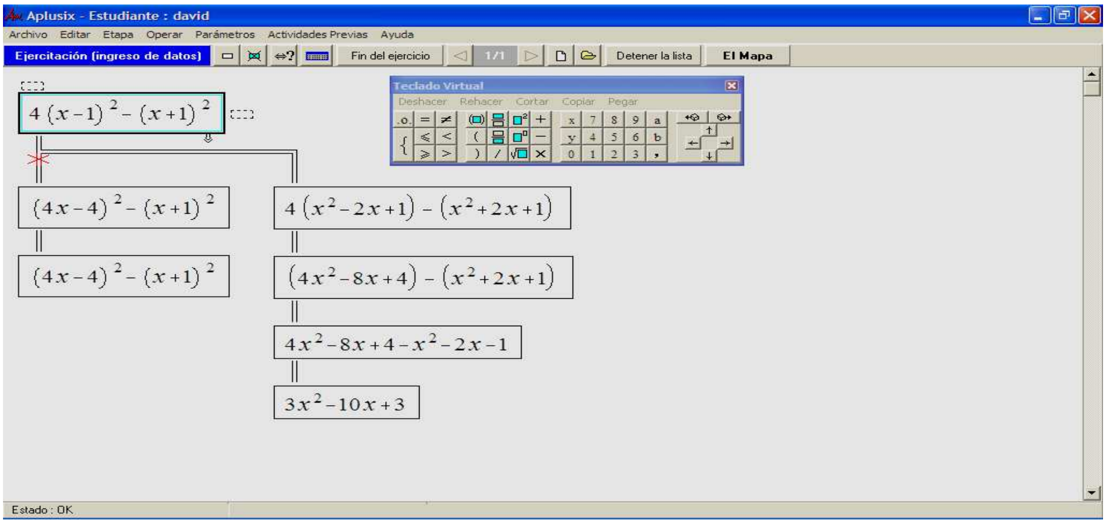


Figura 4.6.1. Desarrollo y simplificación de la expresión 1.

Vemos que el estudiante comienza a desarrollar la expresión realizando el producto 4(x-1). Pero el CAS valida la no equivalencia entre etapas. El estudiante decide duplicar (introduce un nuevo rectángulo) la etapa y ahora desarrolla los binomios. El CAS valida la equivalencia. Él continúa simplificando la expresión (quitando paréntesis y reduciendo términos semejantes), hasta llegar a una expresión que considera una forma común.

En la siguiente figura se muestra ahora el desarrollo de la expresión 2. Podemos observar que en el desarrollo y simplificación de esta expresión ya no comete errores y el CAS valida la equivalencia entre las etapas generadas. El estudiante lleva la expresión a una forma común.

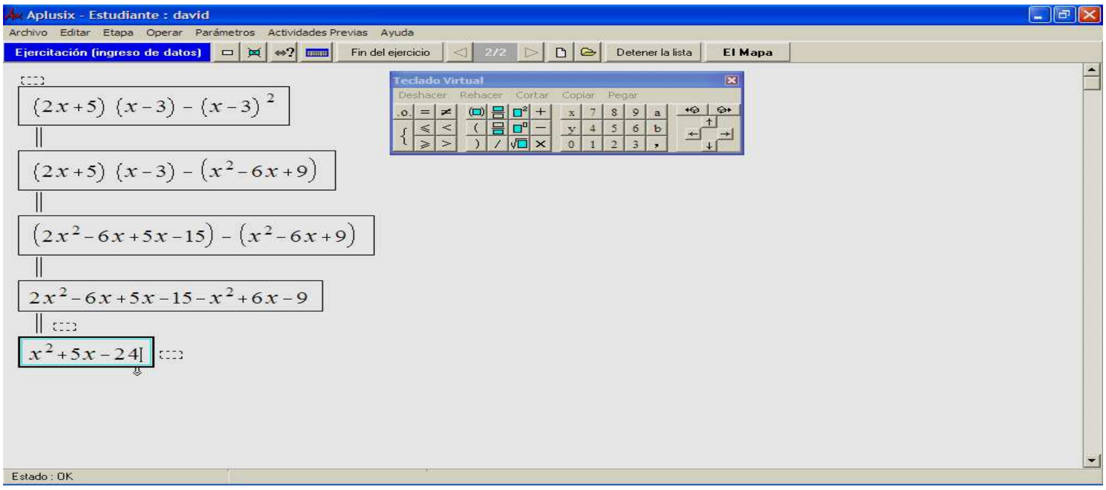


Figura 4.6.2. Desarrollo y simplificación de la expresión 2.

Ahora se presenta en ésta figura el desarrollo de la expresión 3 en el CAS.

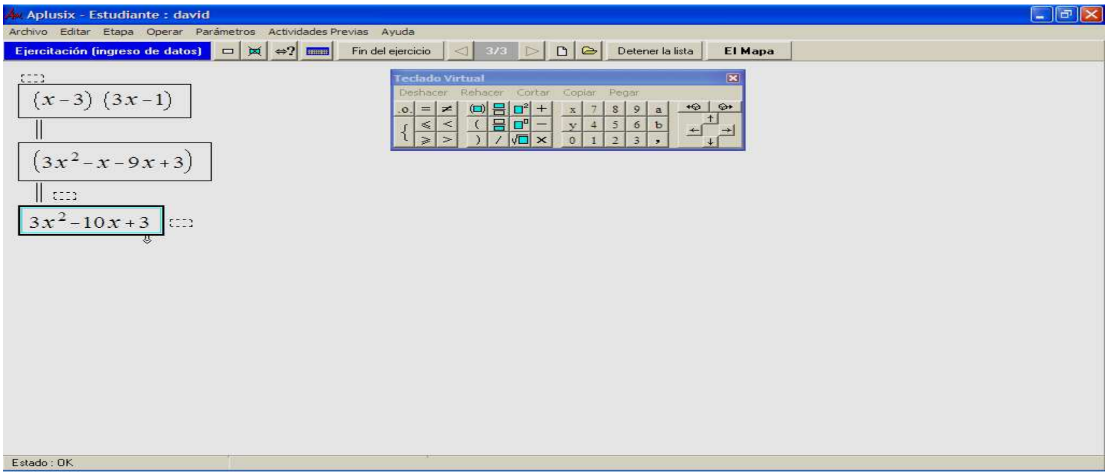


Figura 4.6.3. Desarrollo y simplificación de la expresión 3.

Es posible distinguir que el estudiante desarrolla y simplifica la expresión 3 para llevarla a una forma común.

Finalmente se exhibe en la figura 4.6.4. el desarrollo de la expresión 4 en el CAS.

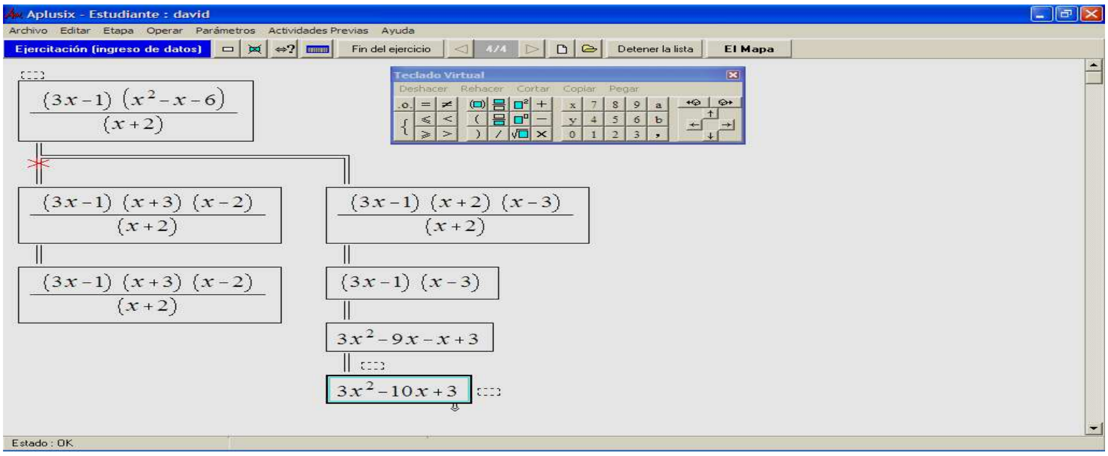


Figura 4.6.4. Desarrollo y simplificación de la expresión 4.

En esta figura vemos que el estudiante encuentra los factores el trinomio (x^2-x-6) y el CAS valida la no equivalencia. El joven duplica la etapa y corrige el error en la factorización (los signos en los binomios) y continúa con el desarrollo y simplificación de la expresión para llevarla a una forma común.

La figura 4.6.5. muestra el trabajo efectuado en el CAS por la estudiante Pati.

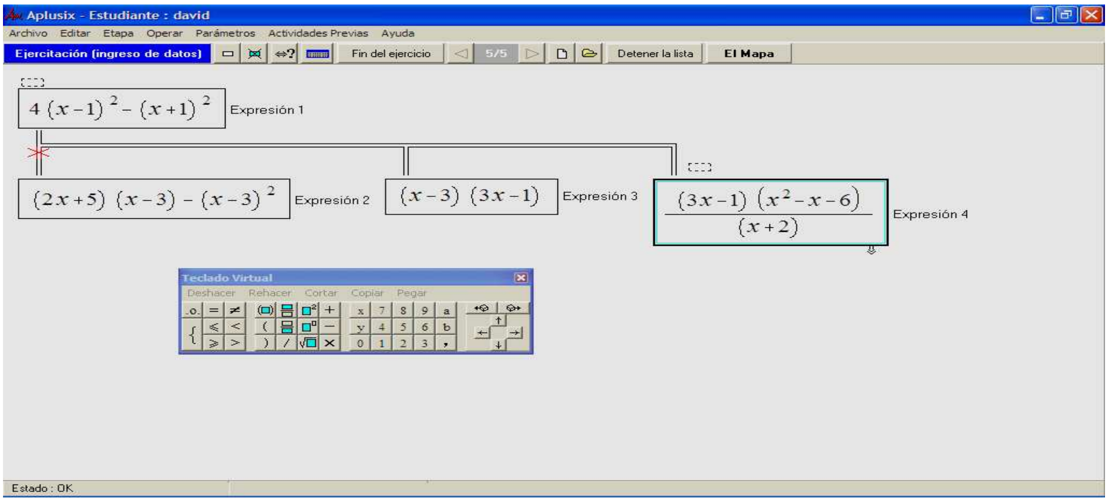


Figura 4.6.5. Trabajo de Pati para determinar la equivalencia entre las expresiones.

Observamos que Pati introduce las cuatro expresiones directamente en el CAS y con la ayuda de la validación proporcionada por el CAS determina cuales expresiones son equivalentes.

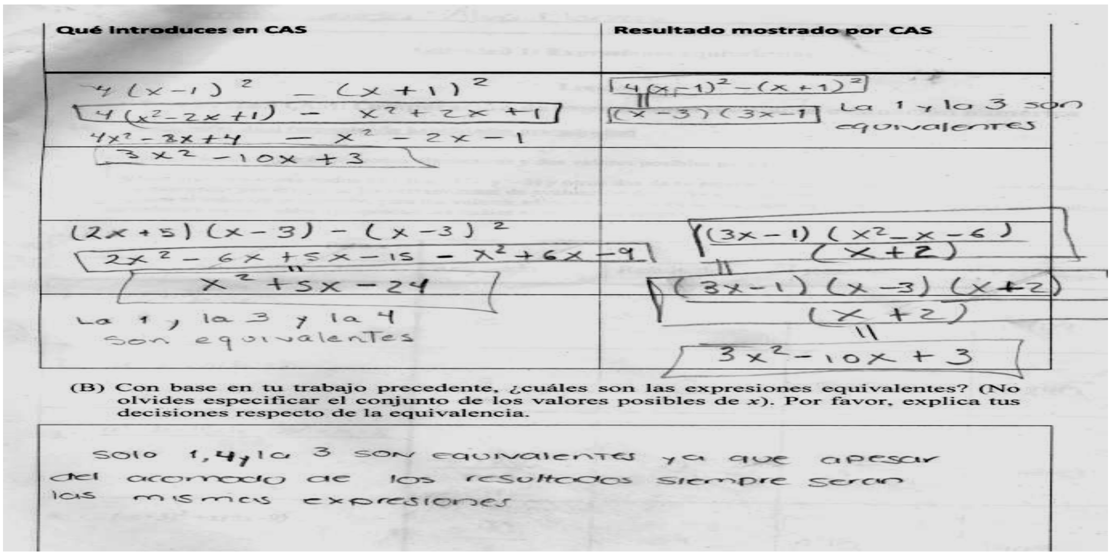
Una vez desarrollada esta actividad, se solicitó a los estudiantes que contestaran la siguiente pregunta de reflexión (ver Anexo I):

(B) Con base en tu trabajo precedente, ¿cuáles son las expresiones equivalentes? (No olvides especificar el conjunto de los valores posibles de x.) Por favor, explica tu decisión acerca de la equivalencia.

De los veintiséis participantes, veinte escribieron en sus hojas de trabajo: La expresión 1, la expresión 3 y la expresión 4 son equivalentes. Ninguno de ellos especificó el conjunto de valores posibles para *x*. Según se entiende, para ellos fue suficiente que el CAS validara la equivalencia entre las etapas de desarrollo y simplificación de las expresiones para llevarlas a una forma común y, de esta forma, llegar a esta conjetura. Como había venido ocurriendo, ninguno se percató de la restricción para la expresión 4, pese a que, anteriormente ellos habían conjeturado que cuando existiera un cociente en alguna expresión existirían restricciones para que se cumpliera la equivalencia.

Por su parte, Pati registró en sus hojas de trabajo que las expresiones 1, 3 y 4 son equivalentes. Más, cae en lo mismo que sus compañeros, no determina el conjunto de valores posibles para *x* y tampoco se percata de la restricción de equivalencia que existe en la expresión 4.

En la siguiente figura 4.6.7. se muestran los resultados de Pati registrados en las hojas de trabajo de esta Actividad V.



Qué introduces en CAS	Resultado mostrado por CAS
$4(x-1)^2 - (x+1)^2$ $4(x^2-2x+1) - x^2+2x+1$ $4x^2-8x+4 - x^2-2x-1$ $3x^2-10x+3$	$4(x-1)^2-(x+1)^2$ $(x-3)(3x-1)$ La 1 y la 3 son equivalentes
$(2x+5)(x-3) - (x-3)^2$ $2x^2-6x+5x-15 - x^2+6x-9$ $x^2+5x-24$ La 1, la 3 y la 4 son equivalentes	$\frac{(3x-1)(x^2-x-6)}{(x+2)}$ $\frac{(3x-1)(x-3)(x+2)}{(x+2)}$ $3x^2-10x+3$

(B) Con base en tu trabajo precedente, ¿cuáles son las expresiones equivalentes? (No olvides especificar el conjunto de los valores posibles de *x*). Por favor, explica tus decisiones respecto de la equivalencia.

solo 1,4,y la 3 son equivalentes ya que apesar del acomodo de los resultados siempre seran las mismas expresiones

Figura 4.6.7. Resultados registrados por Pati en las hojas de trabajo.

Los seis estudiantes restantes no concluyeron la actividad, ya que se enfrentaron con problemas teóricos. Aún con la validación proporcionada por el CAS, ellos dejaron inconcluso su trabajo, pues argumentaron que no recordaban las reglas para continuar con la manipulación algebraica.

Apoyándonos en el análisis de los datos obtenidos de las hojas de trabajo y del CAS Aplusix, además de las notas tomadas y las videograbaciones, podemos destacar lo siguiente: La totalidad de los estudiantes participantes utilizaron los comandos y herramientas del CAS Aplusix para llevar a cabo esta actividad. Ellos desarrollaron las expresiones para llevarlas a una forma común y determinaron la equivalencia. Se apoyaron, en todo momento, en la validación que ofrece el CAS acerca de la equivalencia entre las transformaciones. Ningún estudiante utilizó el método de sustitución numérica. Cuando el profesor los cuestionó sobre esto, argumentaron que era más laborioso y tardado para determinar la equivalencia entre las expresiones, ya que tendrían que asignar todo un conjunto de valores, además de cuidar posibles restricciones. El profesor les preguntó por qué no utilizaron el método tradicional de papel y lápiz. Los estudiantes contestaron que no lo habían elegido porque no podían validar sus procedimientos y resultados, lo cual los hacía propensos a cometer errores y no poder concluir la tarea.

4.7. Resumen del Capítulo IV

En este capítulo se describió el desarrollo de los estudiantes y su avance a lo largo de las actividades que se llevaron a cabo durante las sesiones de trabajo. Se expuso el análisis de los datos obtenidos, el cual tomó como base lo que escribieron los alumnos en las hojas de trabajo a lo largo de las actividades mencionadas.

Además, se detalló lo sucedido durante una sesión de entrevista con una estudiante de 3º de secundaria de desempaño alto (Pati). Además para el análisis también se tuvo en cuenta la revisión de los registros en video, las notas tomadas al término de algunas de las actividades y las discusiones en el aula.

CAPITULO V

CONCLUSIONES

La tesis pretende aportar en la comprensión del aprendizaje de la noción de equivalencia entre expresiones algebraicas por parte de los estudiantes del bachillerato a través del uso de un CAS (Aplusix). Así como dar a conocer cuáles son las estrategias de transformación que ellos emplean al manipular algebraicamente estas expresiones en un ambiente combinado (papel y lápiz y CAS) y el grado de instrumentación e instrumentalización (Dijvers y Trouche, 2008; Iranzo y Fortuny, 2009) que los estudiantes desarrollaron mediante el uso del CAS Aplusix.

En general, con las actividades presentadas (ver, Capítulo III y Anexo I) los estudiantes desarrollaron la comprensión de las propiedades algebraicas que rigen la transformación y manipulación de los símbolos (ver, pp. 82 y 83) en las expresiones y ecuaciones (Kieran y Drijvers, 2006).

Los estudiantes alcanzaron cierta fluidez al efectuar manipulaciones con los medios apropiados, ya sea mentalmente ó a mano, o con el CAS Aplusix para transformar expresiones algebraicas. Esto lo hicieron con el propósito de hallar formas equivalentes entre expresiones y probar resultados generales (ver, pp.96 y 110).

La aplicación de las actividades con el CAS Aplusix permitió a los estudiantes desarrollar la capacidad de operar con soltura las expresiones algebraicas, combinarlas y cambiar su forma (ver, pp.101 y 102). Estas destrezas constituyen la base de la habilidad para hallar las soluciones de una ecuación o expresión algebraica, el cual es un objetivo central que ha permanecido en el currículo del álgebra (ver, National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], Commission on Standards for School Mathematics, 1989).

Constatamos que la mayoría de los estudiantes desarrollaron algunas habilidades como el uso de teoremas y propiedades algebraicas básicas (por ejemplo, despejes y cambios de signo. Ver pp.101 y 112).

Por otro lado, se constató que el uso del CAS Aplusix también les ayudó a visualizar sus errores (Chaachoua, Nicaud, Bronner y Bouhineau, 2004), lo que les permitió reflexionar y rebasar algunos de los obstáculos algebraicos que se les presentaron (ver, pp. 20).

Específicamente avanzaron en la formulación de nuevas expresiones algebraicas, alternativas a las señaladas como erróneas por el software (ver, pp. 20,79 y 102).

En general, los alumnos tuvieron pocas dificultades en relación al uso y manejo del CAS Aplusix (ver, pp.62 y 75). Más bien, algunas de las dificultades son de tipo cognitivo, como las que se presentan al enfrentarse a la manipulación de un lenguaje matemático formal, como es el algebraico (ver, pp.97). Por ejemplo saltarse pasos dentro de los procedimientos y omitir signos, lo cual no es permisible cuando se utiliza un software como el que aquí se aplicó (ver, pp.102). En realidad, consideramos que este tipo de dificultades cognitivas se trasladan a otros usos del CAS (Drijvers y Trouche, 2008).

En general el uso del CAS promueve un pensamiento más algebraico, pues facilita y da un soporte visual de la terminología algebraica, y también un soporte conceptual por el avance que logran los estudiantes en la manipulación de la simbología formal (Ball, Pierce y Stacey, 2003; Kieran y Drijvers, 2006).

En el trabajo de Kieran y Drijvers (2006) la presencia de la tecnología se nota en las preguntas que involucran la coordinación de una idea matemática con algún resultado producido por la calculadora. En contraste en este trabajo de tesis el CAS Aplusix puede ser visto como un medio para la validación, en el sentido dado por Brousseau (1997), ya que el estudiante puede saber si su trabajo realizado paso a paso es correcto o no, sin la intervención del profesor, lo que puede reducir el efecto del contrato didáctico.

De manera similar al trabajo realizado por Kieran y Drijvers (2006) en este estudio exploratorio encontramos pruebas (ver pp.78,95,107) de la relación que existe entre la teoría y las técnicas dentro del ajuste de las tareas retomadas, que confirman la importancia y la productividad del acercamiento de la teoría, técnica y tarea (TTT) Kieran y Drijvers (2006). La técnica y la teoría surgen en la interacción mutua. Las observaciones hechas en ambos ambientes (CAS/Papel y lápiz) muestran como las técnicas dieron lugar al pensamiento teórico, y como las reflexiones teóricas han conducido a los estudiantes a desarrollar y usar técnicas (ver pp. 107, 109,111).

En el trabajo de estos investigadores las técnicas de CAS que facilitaron el discurso del profesor sirvieron de base para organizar y desarrollar las ideas matemáticas de los estudiantes.

Es importante hacer notar que las respuestas de los estudiantes en ambos estudios jugaron un papel central en las discusiones individuales y de grupo, pues ello permitió precisar ideas de los conceptos matemáticos en juego.

En el trabajo de Kieran y Drjvers (2006) cuando el profesor creía que era necesario hacer una discusión más rica de contenido matemático, daba tiempo suficiente para que los estudiantes reflexionaran y agregaran más comentarios a sus respuestas; él pasaba de un resultado a otro, y continuaba con la discusión en la siguiente clase o en ella misma. En contraste en este trabajo de tesis el profesor no intervino en las discusiones del grupo participante y no se agregaron comentarios extras a sus respuestas. Lo anterior fue posible gracias a la retroalimentación que les proporcionó el CAS Aplusix, lo que a su vez les permitió detectar y corregir sus errores dentro de las actividades presentadas.

Las dificultades de los estudiantes, en la coordinación de ideas matemáticas en torno a los conceptos de restricción y de equivalencia de expresiones algebraicas, fueron provocadas por las tareas diseñadas, y por el uso de CAS.

En el estudio de Kieran y Drijvers (2006) la herramienta (CAS) ayudó a la discusión en clase y propició el refinamiento de ideas sobre los conceptos matemáticos en juego. En este trabajo de tesis la herramienta (CAS) ayudó a la discusión en clase y propicio el refinamiento de procedimientos y habilidades algebraicas que incidieron en la visualización y conceptualización matemática.

Estos avances en la visualización y conceptualización de la terminología algebraica y de la simbología matemática formal posibilitan situar a los estudiantes en diferentes niveles en relación con las categorías de la teoría instrumental (ver Iranzo y Fortuny, 2009).

En conclusión, el análisis de los datos obtenidos en este estudio exploratorio permite corroborar que el uso del CAS Aplusix favorece representaciones variadas de conceptos y nociones algebraicas (Chaachoua, Nicaud, Bronner y Bouhineau, 2004). También ayuda a rebasar obstáculos algebraicos (por ejemplo, el manejo de números con signo, simplificación de términos semejantes, desarrollo y simplificación de productos, cálculos numéricos, etc.) al permitir que el estudiante se centre en las nociones algebraicas y proponer la solución de los problemas algebraicos abordados (ver, pp.110).

Los estudiantes desarrollaron una gran variedad de estrategias de transformación y resolución, asociadas con distintos usos y aplicaciones del CAS, y las diferencias pueden ser interpretadas en términos del tipo de alumnos con los que se trabajó (ver, pp. 112).

En seguida presentamos una descripción resumida de lo obtenido en este estudio exploratorio, de acuerdo con la categorización retomada y adaptada del trabajo de Iranzo y Fortuny (2009), así como de la revisión del estudio de Drijvers y Trouche (2008).

A pesar de que haría falta un estudio en profundidad para hacer una clasificación más completa, se pudieron observar las siguientes categorías de ejecuciones de los estudiantes que participaron en este estudio exploratorio, en relación con sus usos y apropiaciones del software que aquí se aplicó.

1. Autónomos. A partir de los datos obtenidos en las hojas de trabajo y las notas de observación es posible decir que cuatro de los veintiséis estudiantes que participaron en este estudio, fueron buenos (incluyendo a Pati) resolviendo problemas. Son intuitivos y no presentaron obstáculos conceptuales algebraicos en la resolución de las actividades planteadas en papel y lápiz (ver, pp. 99, 100 y 101). En estos estudiantes el grado de instrumentalización fue alto así como el grado de instrumentación. Pues en la manipulación realizada con el CAS intentaron optimizar las estrategias de transformación, basándose en propiedades y reglas de los números reales.

   Así, para estos estudiantes, el uso del CAS constituye un soporte para explorar aspectos curriculares avanzados y desarrollar sus competencias argumentativas. Según Laborde (2001), el uso de un CAS en la resolución de las actividades propuestas presenta un valor añadido que facilita aspectos materiales.

2. Instrumentales. En esta categoría pudimos ubicar a cuatro estudiantes, mismos que tienden a modelar los problemas aritméticos en problemas algebraicos. Tienen algunas dificultades (conceptuales, algebraicas y de visualización) en la transformación, evaluación y simplificación con el método tradicional de papel y lápiz. El uso del CAS les proporcionó un soporte algebraico, conceptual y visual, en el proceso de transformación algebraica. Por tanto, establecieron una relación en los cálculos paso a paso que les permitió corregir sus errores (ver, pp.78, 79 y 80). En la resolución con el CAS se apoyaron en algunas propiedades algebraicas de la expresión (axiomas y postulados). El grado de instrumentación e instrumentalización fue de medio a alto. En general, no tuvieron dificultades con el uso del CAS.

3. Procedimentales. En esta categorización tuvimos a doce estudiantes, quienes fueron más analíticos que intuitivos. A pesar de que tuvieron algunas dificultades en la transformación con papel y lápiz (por ejemplo en la simplificación y descomposición en factores. Ver, pp. 97 y 98) entendieron los conceptos algebraicos. No presentaron dificultades técnicas en el uso y manejo del CAS (utilización de las herramientas y comandos). Sin embargo, el grado de instrumentalización fue inferior al de los estudiantes del tipo instrumental. Estos alumnos razonaron sobre las expresiones algebraicas, en un nivel más bajo. No obstante, lograron completar los cálculos con ayuda de la validación de las transformaciones que les proporcionó el CAS. Observamos que ellos partieron más de las propiedades aritméticas que algebraicas. Por ejemplo, no utilizaron la reducción de términos semejantes para la simplificación de las expresiones (ver, Actividad IV; pp. 106 y 107).

4. Naíf. Por último ubicamos en esta categorización a los seis estudiantes restantes. Ellos tuvieron muchas dificultades conceptuales, algebraicas y aritméticas, por ejemplo, en la jerarquía de operaciones, uso de paréntesis,

reducción de términos semejantes y despejes (ver, pp. 78). El grado de instrumentación fue bajo. Utilizaron pocas herramientas del CAS y las que usaron principalmente fueron herramientas de cálculo de operaciones básicas (+, -, * y /). Presentaron obstáculos técnicos en el uso y manejo de las herramientas y comandos del CAS. Puede decirse que durante el desarrollo de las actividades nunca tuvieron una estrategia de resolución clara, a pesar de que el uso del CAS les proporcionó un soporte visual algebraico y conceptual. Prácticamente se fundamentaron en las herramientas aritméticas del CAS. En el desarrollo de las actividades con el CAS y con papel y lápiz no lograron pasar de la primera etapa de las transformaciones algebraicas.

Estos estudiantes denotaron que razonaron sobre reducciones aritméticas y no sobre las transformaciones de las expresiones algebraicas, lo cual, parece ser que tiene relación con su historia escolar. Es decir, con la apropiación de conocimientos previos (Ball, Pierce y Stacey, 2003; ver, pp. 81).

Estas categorías deben ser consideradas como prototipos, las cuales fueron utilizadas para categorizar y analizar el comportamiento o ejecuciones de los estudiantes.

Sin embargo, el hecho de que el comportamiento de los estudiantes se ajuste a una tipología dada no significa que se pueda llegar a una clasificación definitiva de los estudiantes.

Los resultados obtenidos relativos a las tipologías de alumnos, deben ser interpretados en el contexto del estudio exploratorio realizado.

También consideramos importante analizar el papel del profesor, lo que, en la terminología de la teoría de la instrumentación, se conoce como buscar el tipo de orquestación que el profesor instrumenta. La orquestación es necesaria para favorecer y guiar el difícil proceso de génesis instrumental del CAS. Pero en este estudio exploratorio no hemos incluido datos ni observaciones relativas a la tipología de intervención del profesor.

La investigación también se propuso documentar las ventajas de utilización de nuevos ambientes de aprendizaje de las matemáticas en el salón de clases. Se procuró que el alumno, el maestro y el conocimiento interactuaran para lograr fortalecer la construcción de significados matemáticos, tal vez más duraderos (Moreno y Waldegg, 2004).

Actualmente existe una línea de experimentación e investigación docente que se basa en el uso de las nuevas tecnologías. Muchas de éstas construidas en torno a programas de computación y al uso de algún CAS. Sin embargo, estos ambientes virtuales aún resultan alejados de la realidad cotidiana del estudiante, por lo que todavía resulta conveniente indagar acerca de los elementos didácticos que estimulan a los estudiantes a prepararse de modo más directo.

Como por ejemplo, en situaciones de enseñanza como las que aquí se instrumentaron. Se han utilizado las máquinas electrónicas (computadoras y calculadoras) y los juegos matemáticos digitales, a través de la experimentación, ofreciendo interesantes posibilidades para proponer problemas y soluciones dentro de contextos específicos. Este trabajo de tesis buscó aportar en esta dirección.

Específicamente, permitiendo que el estudiante, formulara sus propias estrategias para la búsqueda de la solución. Además, también se atrajo y generó el interés de los jóvenes que participaron en el estudio, por lo que constatamos que el uso de actividades como las que aquí se desplegaron pudo estimular la participación de los jóvenes en la exploración científica (ver Falconi y Hoyos, 2005).

Sin embargo, a manera de nota final es necesario señalar que la influencia de cualquier software, y en particular del CAS Aplusix, dependerá de los alumnos con los que se trabaje, y también de los problemas que se les propongan (ver Chaachoua, Nicaud, Bronner y Bouhineau, 2004).

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Artigue, M. (1997). Le Logiciel 'Derive' comme révélateur de phénoménes didactiques liés á l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage. *Educational Studies in Mathematics* 33: 133–169.

- Artigue, M. (2002a). L'intégration de calculatrices symboliques à l'enseignement secondaire: les leçons de quelques ingénieries didactiques. In D. Guin & L. Trouche (Eds.), *Calculatrices symboliques --transformer un outil en un instrument du travail mathématique: un problème didactique* (pp. 277-349). Grenoble: La Pensée Sauvage.

- Artigue, M. (2002b). Learning mathematics in a CAS environment: *The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work*. International Journal of Computers for Mathematical Learning 7: 245–274.

- Balacheff, N. (1994). La transposition informatique. Note sur un nouveau problème pourla didactique. In M. Artigue et al. (Eds), *Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France* (pp. 364–370). Grenoble: La Pensée Sauvage.

- Ball, L., Pierce, R., & Stacey, K. (2003). *Recognising equivalent algebraic expressions: An important component of algebraic expectation for working with CAS.* In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4, pp. 15-22). Honolulu, HI: PME.

- Beeson, M. (1996). Design principles of MATHPERT: Software to support education in algebra and calculus. In N. Kajler, (ed.), *Human Interfaces to Symbolic Computation*, Springer-Verlag.

- BOERO P. (1994 in 1995) Questioni sui temi di *SFIDA*. In J-Ph. Drouhard & M. Maurel (Dir.), *Actes de SFIDA 1-4, Séminaire Franco-Italien de Didactique de l'Algèbre* (pp. II.3 - II.8). Nice: IUFM de Nice.

- *Bouhineau-Denis-2007_(001853v1).* Curso "*Didáctica del Álgebra*". (4 hrs), CEFIEC (FCEyN). UBA.

- Brousseau, G. (1997).*Theory of didactical situations in mathematics.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer. (Edited and translated by N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, and V. Warfield).

- Caftori, N. and Paprzycki, M. (1997). The Design, Evaluation and Usage of Educational Software. *Technology and Teacher Education Annual 1997*. Eds. J.D. Price, R. S. McNeil and J. Willis. Association for the Advanced of Computers Education (CD-ROM edition).

- Cerulli, M., Mariotti, M.A. (2000). A symbolic manipulator to introduce pupils to algebra theory*. Proceedings of Workshop W6 "Learning Algebra with the Computer a Transdisciplinary Workshop*". ITS'2000, Montreal*.*

- Cerulli, M. and Mariotti, M.A. (2002). L'Algebrista: un micromonde pour l'enseignement et l'apprentissage de l'alge`bre. *Sciences et techniques e´ducatives*. (pp. 9(1–2): 149–170).

- Cerulli, M. (2004). Introducing pupils to algebra as a theory: L'Algebrista as an instrument of semiotic mediation*. Doctoral dissertation, Università degli Studi di Pisa, Italy. Retrieved* on March 30, 2006, from http://www-studenti.dm.unipi.it/~cerulli/tesi/. L'Algebrista as an instrument of semiotic mediation.

- Cuevas Vallejos, C. (2000). *¿Qué es Software Educativo o Software para la Enseñanza?* Recuperado en http://www.matedu.cinvestav.mx/~ccuevas/Software Educativo.htm

- Chaachoua, H., Nicaud; J-F., Bronner, A., Bouhineau, D. (2004*). APLUSIX, a learning environment for algebra, actual use and benefits*. Proceedings of the 10th ICME Conference [http://www.icme-organisers.dk/tsg09/].

- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en theorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathematiques*. (pp. 19: 221–266).

- Drijvers, P. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment. Design research on the understanding of the concept of paramete*r, Doctoral Dissertation, Freudenthal Institute, Utrecht University, the Netherlands. Also available through http://www.fi.uu.nl/~pauld/dissertation.

- Drijvers, P. and Trouche, L. (2008). From artifacts to instruments, a theoretical framework behind the orchestra metaphor. In M.K. Heid and G.W. Blume (Eds), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Syntheses, Cases, and Perspectives*. Greenwich, CT: Information Age Publishing.

- Falcade, R. (2003). Instruments de médiation sémiotique dans Cabri pour la notion de fonction. *Paper Presented at the ITEM Conference*, June 2003, Reims, France.

- Falconi, M. y Hoyos, V. (2005). Instrumentos y matemáticas. *Historia, fundamentos y perspectivas educativas.* México: Facultad de Ciencias, UNAM.

- Harper (1987), Ghosts of Diophanutus. Educational Studies in Matematics, n°18, pp. 75 – 90.

- Haspekian, M. (2005). An ''Instrumental Approach'' to study the integration of a computer tool into mathematics teaching: The case of spreadsheets. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 10*: (pp. 109–141).

- Hoyles, C. (2001). From describing to designing mathematical activity: The next step in developing a social approach to research in mathematics education?. *Educational Studies in Mathematics* 46: 273–286.

- Hoyles, C. and Noss, R. (2003). What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education? In A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick and F. Leung (Eds), *Second International Handbook of Mathematics Education*(Vol. 1, pp. 323–349). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic.

- Hoyos, V. (2009). Recursos tecnológicos en la escuela y la enseñanza de las matemáticas. En L. M. Garay (coord.), *Tecnologías de información y comunicación Horizontes interdisciplinarios y horizontes de investigación*, p. 77-100. México: SEP-UPN.

- Iranzo, N; Fortuny, J.M. (2009). "La influencia conjunta del uso de GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado" en *Enseñanza de las ciencias* núm. 27(3), pp. 433-446.

- Kieran, C. (1984). A comparison between novice and more-expert algebra students on tasks dealing with the equivalence of equations. In J. M. Moser (Ed.), Proceedings of the Sixth Annual Meeting of the Group for the Psychology of Mathematics Education in North America. Madison, Wisconsin.

- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 390-419). New York, U.S.A: MacMillan.

- Kieran, Boileau, Hitt, Tanguay, y Tremblay, Guzmán, Sacristán, Luis Saldanha (2003). Consultants have included Michèle Artigue (Universidad Paris 7) y Paul Drijvers (Instituto Freudenthal, Utrecht, Holanda). *Project Algebra in Partnership with Technology in Education*, APTE. From http://www.math.uqam.ca/APTE/TachesE.html

- Kieran, C., & Saldanha, L. *(2005).* Computer algebra systems (CAS) as a tool for coaxing the emergence of reasoning about equivalence of algebraic expressions*.* In H.L. Chick & J.L. Vincent (Eds.)*, Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 193-200). Melbourne, Australia: PME.

- Kieran, C., & Drijvers, P. (2006).The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection: a study of CAS use in secondary school algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 11* (pp. 205-263).

- Laborde, C. (1992). Solving problems in computer based Geometry environment: the influence of the feature of the software, *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik,* 92 (4), pp 128-135.

- Lagrange, J.-B. (2000). L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement: une approche par les techniques. *Educational Studies in Mathematics, (*pp. 43, 1-30).

- Lagrange, J.-b. (2002). E´ tudier les mathe´matiques avec les calculatrices symboliques. Quelle place pour les techniques? In D. Guin and L. Trouche (Eds), Calculatrices Symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathe´matique: un proble`me didactique (pp. 151–185). France: La Pense´e Sauvage, Grenoble.

- Lagrange, J-B., Artigue, M., Laborde, C. and Trouche, L. (2003). Technology and mathematics education: a multidimensional study of the evolution of research and innovation. In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick and F. K. S. Leung (Eds.) *Second international handbook of mathematics education.* (pp. 237-26). Dordecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

- Lagrange, J.-b. (2003). Learning techniques and concepts using CAS: A practical and theoretical reflection. In J.T. Fey (Ed.), Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education (pp. 269–283). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- Maffei, L., Mariotti, M.A. (2007). Memorizing algebraic formulas: the support of a microworld. *Proceedings of the 5th CERME*, pp. 1460-1469. Larnaka, Cyprus.

- Mariotti, A. (2002). “The Influence of Technological Advances on Students’Mathematical Learning”. In Lyn D. English (ed.), Handbook of International Research in Mathematics Education. New Jersey: LEA, Pub.

- Moreno, L. y Waldegg, G. (2004) *Aprendizaje, matemáticas y tecnología: Una visión integral para el maestro.* México. Aula XXI Santillana.

- Monaghan, J. (2005). Computer algebra, instrumentation and the anthropological approach. *Paper Presented at the 4th CAME Conference, October 2005*. Retrieved on December 20, 2005 from http://www.lonklab.ac.uk/came/events/CAME4/index.html

- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], Commission on Standards for School Mathematics**.** (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

- NGUYEN XUAN A., NICAUD J-F., JOLY F. & GÉLIS J-M. (1993): Une méthode de diagnostic automatique des connaissances en algèbre pour un module de modélisation de l’élève. In M. Baron, R. Gras & J-F. Nicaud (Dir.), *Environnements Interactifs d’Apprentissage avec Ordinateur* (pp. 217-228). Paris, Eyrolles.

- NICAUD J-F. (1987) *APLUSIX un système expert de résolution pédagogique d’exercices d’algèbre*. Thèse de Doctorat. Orsay: Université Paris-Sud.

- NICAUD J-F. (1994) Modélisation en EIAO, les modèles d’APLUSIX. In N. Balacheff & M. Viviet (Dir.) *Didactique et Intelligence Artificielle* (pp. 67-112). Grenoble: La Pensée Sauvage.

- Nicaud, Bouhineau, Chaachoua, Bittar y Bronner, (2001), APLUSIX: Recurso Didáctico para el Aprendizaje del Algebra. IMAG-Leibniz laboratory. *[http://aplusix.imag.fr]*

- Nicaud, J.-F., Bouhineau, D., & Chaachoua, H. (2004). Mixing microworld and CAS features in building computer systems that help students learn algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9,* 169-211.

- Nicaud; J-F., Bouhineau, D., Chaachoua, H., Tragalova, J. (2006). Developing Interacting Learning Environments that can be used by all the classes having access to computers*. The case of Aplusix for Algebra. Les Cahiers Leibniz, 148* [http://www.leibniz-imag.fr]

- Noss , R., & Hoyles , C. (1996). *Windows on mathematical meanings: Learning cultures and computers.* Dordrecht , The Netherlands : Kluwer Academic Publishers.

- Olive, J. & Makar, K., with V. Hoyos, L. Kor, O. Kosheleva, & R.Straesser. (2010). Mathematical knowledge and practices resulting from access to digital technologies. In Hoyles, C. & Lagrange, J-B. (Eds.), *Mathematics education and technology - Rethinking the terrain* (pp. 133-178). New York: Springer.

- Pierce, R. *(2002*). An exploration of algebraic insight and effective use of computer algebra systems*. Unpublished doctoral thesis,* University of Melbourne, Australia*.*

- Pomerantsev, L. & Korosteleva, O. (2003). Do Prospective Elementary and Middle School Teachers Understand the Structure of Algebraic Expressions? *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers: The Journal, Vol. 1: Content Knowledge*, December 2003 (electronic journal).

- Rabardel, P. (2002): Los hombres y las tecnologías*. Perspectiva cognitiva de los instrumentos contemporáneos.* Biblioteca Virtual BV-EEE.

- Rabardel, P. and Samurc¸ay, R. (2001). From Artifact to Instrument Mediated Learning. New Challenges to Research on Learning 22. Helsinki, Finland: University of Helsinki.

- Rodríguez, G. & Salazar, P. (2004). *El juego, un recurso para el reforzamiento del aprendizaje de la geometría*. Tesis de licenciatura. México: ENSM.

- Ruthven, K. & Hennesy, S. (2002). A practitioner model of the use of computer-based tools and resources to support mathematics teaching and learning. *Educational Studies in Mathematics*, 49 (1), (pp. 47-88).

- Saxe, G. y Bermudez, T. (1996). Emergent mathematical environments in children's games. En P. Nesher, L. D. Steffe, P. Cobb, B. Goldin y B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 51-68). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

- Sfard A. (1991), On dual nature of mathematics conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, nº22, pp. 1 – 36.

- Steinberg, R. M., Sleeman, D. H. & Ktorza, D. (1990). Algebra students' knowledge of equivalence of equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(2), 112-121.

- SEP. (2006). Plan y programas de estudio. México: SEP.

- Székely, M. (2009). ENLACE, INFORME. México: Secretaria de Educación Pública.

- Trouche, L. (2000). La parabole du gaucher et de la casserole a` bec verseur: e´tude des processus d'apprentissage dans un environnement de calculatrices symboliques. *Educational Studies in Mathematics* 41: 239–264.

- Trouche, L. (2004a). Environnements informatise´s et mathe´matiques: quels usages pour quels apprentissages?. *Educational Studies in Mathematics* 55: 181–197.

- Trouche, L. (2004b). Managing complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 9*: 281–307.

- Verillon, P. y Rabardel, P. (1995). "Cognition and artifacts: A contribution to the study of throught in relation to instrumented activity", *European Journal of Psychology of Education.* (pp. 10, 77-103).

- Vygotsky, L.S. (1930). La méthode instrumentale en psychologie. In B. Schneuwly and J.P. Bronckart (Eds), *Vygotsky aujourd'hui* (pp. 39–47). Neufchâ tel: Delachaux et Niestle´.

ANEXO I

Nombre: ____

Fecha: ____

Actividad 1: Expresiones equivalentes

Lección 1

Parte I (con CAS): Comparación de expresiones mediante evaluación numérica

(A) Trabajo individual (suponiendo habilidades precedentes)

La tabla de abajo muestra cinco expresiones algebraicas y dos valores posibles de *x*.

a) Usando los dos valores dados de *x* (i.e., 1/3 y –5) y otros dos valores de tu propia elección, calcula los valores que resultan para cada expresión por medio de las herramientas de evaluación del software Aplusix.

b) Registra el valor de tu elección para los valores adicionales de *x* en la fila superior de la tabla, y escribe los resultados de tus cálculos en las celdas apropiadas, las cuales se muestran abajo.

Para x =	1/3	-5		
Expresión	Resultado	Resultado	Resultado	Resultado
1. $(x-3)(4x-3)$				
2. $(x^2+x-20)(3x^2+2x-1)$				
3. $(3x-1)(x^2-x-2)(x+5)$				
4. $(-x+3)^2+x(3x-9)$				
5. $\dfrac{(x^2+3x-10)(3x-1)(x^2+3x+2)}{(x+2)}$				

(B) Compara los resultados que calculaste según las diversas expresiones que aparecen en la tabla. Registra, en el rectángulo que sigue, aquello que hayas observado.

(C) Pregunta de reflexión:

Con base en las observaciones que extrajiste de la tabla precedente (en (A)), ¿qué puedes conjeturar respecto a lo que sucede si aumentas los valores de la tabla e incluyes otros valores de *x*?

Discusión en el salón de clase de las Partes I A, B, C

"¿Qué fue lo que notaste?" y "¿qué puedes concluir?"

"¿Qué parejas de expresiones producen resultados iguales?"

"¿Alguien más obtuvo resultados iguales para <u>sus</u> elecciones de los valores de *x* (para qué par de expresiones)?¿Estás sorprendido por este hecho?

"¿Por qué si? O ¿Por qué no?"

“¿En qué forma esas expresiones son diferentes?”

“¿Hay otro par de expresiones, de diferente forma, que produzcan resultados iguales?”

“¿Cuáles?”

“¿Piensas que ese será siempre el caso para esos dos pares de ecuaciones?”

“¿Podemos elegir *cualquiera* de los valores de *x* para estas expresiones?”

“¿Cuál es el dominio de definición de cada una de las expresiones dadas?”

¿Éste produce los mismos resultados?

___

En otras palabras,

¿Podemos encontrar un valor de *x* para el cual, en un par de expresiones, éste produzca resultados *diferentes*?

¿Cómo podemos responder esta pregunta sin haber verificado todos los valores posibles de *x*?

Ahora veamos este caso:

"Podemos multiplicar estos dos factores y llevar las expresiones a formas diferentes"

$$(x + 1)(x + 2) = x(x+2) + 1(x+2)$$

$$= x^2 + 2x + x + 2$$

$$= x^2 + 3x + 2$$

Nótese que las expresiones original y final (así como las expresiones intermedias) tienen formas diferentes. Ahora, elija cualquier valor numérico para x y sustitúyalo en las cuatro expresiones.

¿Qué se observa? ¿Por qué sucede que todas esas expresiones diferentes producen el mismo valor numérico, cuando x es reemplazado por un número cualquiera?

¿Podemos usar álgebra para convertir una expresión de un par en la forma de otra expresión, o cada una de ellas en alguna forma común?

Nombre:____

Fecha:____

Parte II (con papel y lápiz, 50 minutos): Comparación de expresiones mediante manipulación algebraica

Propósito: usando álgebra, obtener formas comunes de expresiones dadas.

Tarea

En esta asignación, usa álgebra en papel y lápiz. No uses el CAS (Aplusix). Muestra todo tu trabajo en una hoja adjunta.

Considera las discrepancias observadas entre tu trabajo con álgebra en papel y lápiz de la Parte II B y las conjeturas hechas en la Parte II A.

Determina si puedes eliminar esas discrepancias.

Enlista algunas de esas discrepancias que sean susceptibles de eliminar.

(A) Con base en tus observaciones de la Parte I A y en la subsiguiente discusión en clase,

¿Es posible establecer una conjetura, respecto de que las expresiones anteriores dadas pueden, en efecto, ser re-expresadas en una forma común?

(B) Verifica tu conjetura, usando álgebra en papel y lápiz; re-escribe las expresiones dadas abajo en otra forma (no necesariamente en forma desarrollada). Muestra todo tu trabajo en la columna de la parte derecha de la tabla.

Expresiones dadas	Forma re-escrita de la expresión dada
1. $(x-3)(4x-3)$	
2. $(x^2+x-20)(3x^2+2x-1)$	
3. $(3x-1)(x^2-x-2)(x+5)$	
4. $(-x+3)^2+x(3x-9)$	
5. $\frac{(x^2+3x-10)(3x-1)(x^2+3x+2)}{(x+2)}$	

(C) En la Parte I C, hiciste algunas conjeturas basadas en evaluaciones numéricas de expresiones. Explica en qué forma las manipulaciones algebraicas, en la Parte II B, ayudó (o no) al planteamiento de cada una de esas conjeturas.

Nombre: ____

Fecha: ____

Lección 2

Parte III (con CAS, 50 minutos con discusión):

Verificación de la equivalencia, mediante la re-escritura de la forma de una expresión dada, usando el comando el CAS Aplusix II

Propósito: usar CAS como herramienta para proveer información en torno a la equivalencia de expresiones.

Dos posibles estrategias esperadas: (i) Usando los comandos del software para re-escribir formas algebraicas dadas; (ii) Usando el CAS para verificar la equivalencia sin la re-escritura de formas, mediante la verificación de la igualdad.

La columna de la parte izquierda de la tabla de abajo contiene las expresiones de la lección previa. Usando el CAS Aplusix , escribe en la columna de la parte derecha de la tabla las expresiones producidas al usar los comandos para la transformación algebraica.

Expresión dada	Resultado producido por Aplusix
1. $(x-3)(4x-3)$	
2. $(x^2+x-20)(3x^2+2x-1)$	
3. $(3x-1)(x^2-x-2)(x+5)$	
4. $(-x+3)^2+x(3x-9)$	
5. $\frac{(x^2+3x-10)(3x-1)(x^2+3x+2)}{(x+2)}$	

Discusión en el salón de clase de la Parte III

Preguntas de discusión:

"¿Qué es lo que los comandos de Aplusix parecen que hacen respecto a las expresiones 1 y 4?"

a) **"¿Se produjo la misma forma expandida al realizar las transformaciones algebraicas en Aplusix en las expresiones 1 y 4?"**____

b) Toma la parte encerrada entre paréntesis de las expresiones 1 y 4.

¿Es posible transformar la expresión 4 en la misma forma de la expresión 1?"

c) "Nota que hemos llegado a formas comunes de las expresiones dadas 1 y 4 en dos formas diferentes:

Expandiendo las expresiones 1 y 4, y produciendo la forma común $4x^2 - 15x + 9$;

Descomponiendo en factores la expresión 4, nos permite re-escribirla en la forma de la expresión 1.

“¿Qué piensas de esos dos métodos diferentes para obtener formas comunes?”

1. **“¿Pueden tener, las expresiones 3 y 5, la misma forma sin expandirlas?”** (por medio de la descomposición en factores o la simplificación).____
____
____

2. Tu trabajo algebraico en papel y lápiz y de CAS de la lección previa, **¿Te dio resultados semejantes?**__________________________________

¿En qué forma?”

3. Conclusiones: “Basados en nuestro trabajo algebraico y en la verificación usando CAS, **¿Podemos ahora concluir que las expresiones 1 y 4 (lo mismo sucede para las expresiones 3 y 5) pueden ser re-escritas en la misma forma algebraica?”**

Nombre: ____

Fecha: ____

Parte IV (con CAS, 50 minutos):

Verificación de la equivalencia, sin re-escribir la forma de una expresión, mediante el uso de una prueba de la igualdad.

Propósitos: comprender qué sucede cuando introducimos en CAS dos expresiones que son: a) equivalentes, y b) no equivalentes.

(A) Introduce, directamente, en la línea de entrada del software Aplusix II la ecuación formada por las expresiones 3:

$$\frac{(x^2+3x-10)(3x-1)(x^2+3x+2)}{(x+2)}$$

(B) Ahora duplica la caja e introduce, directamente, en la línea de entrada del CAS Aplusix la ecuación formada por la expresión 5:

$$(3x-1)(x^2-x-2)(x+5)$$

1. ¿Qué muestra Aplusix como resultado?

2. ¿Cómo interpretas este resultado?

3. Usa Aplusix para manipular algebraicamente y reemplaza *x* por – 2 en la ecuación precedente. Interpreta el procedimiento y el resultado obtenido.

Discusión en el salón de clase de la Parte IV A

Discusión breve en torno a la Parte IV A: “Al mostrar el resultado ´||´, nota que el CAS no tomó en consideración los valores posibles que puede tomar *x*”.

(C) Introduce, directamente, en la línea de entrada de Aplusix la ecuación formada por la expresión 2:

$$(x^2+x-20)(3x^2+2x-1)$$

(D) Ahora duplica la línea de entrada del CAS Aplusix e introduce, directamente, la ecuación formada por la expresión 5:

$$(3x-1)(x^2-x-2)(x+5)$$

1. ¿Qué muestra Aplusix como resultado?

2. ¿Cómo interpretas este resultado?

Discusión en clase de la Parte IV B

Discusión breve en torno a la Parte IV B:

“¿Qué resultado muestra Aplusix?”

“¿Por qué Aplusix no mostro  en el caso posterior?”

Parte V (con CAS, 50 minutos):

Verificación de la equivalencia, usando cualquiera de los métodos de CAS

He aquí un nuevo conjunto de expresiones:

Expresiones dadas
1. $4(x-1)^2-(x+1)^2$
2. $(2x+5)(x-3)-(x-3)^2$
3. $(x-3)(3x-1)$
4. $\dfrac{(3x-1)(x^2-x-6)}{(x+2)}$

(A) Usa el CAS para determinar cuáles de estas expresiones son equivalentes. Usa cualquiera de los métodos de CAS Aplusix que prefieras. Muestra todo tu trabajo en el CAS en la tabla de abajo:

Qué introduces en la CAS	Resultado mostrado por la CAS

(B) Con base en tu trabajo precedente, ¿cuáles son las expresiones equivalentes? (No olvides especificar el conjunto de los valores posibles de x). Por favor, explica tu decisión acerca de la equivalencia.